

DS n° 2

Électronique, diffusion, thermochimie

Le sujet comporte cinq parties indépendantes.

Merci de suivre les conseils suivants :

- laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires;
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points;
- respecter et indiquer la numérotation des questions;
- souligner ou encadrer les résultats.

Partie I — Conversion de puissance (Centrale PSI)

La tension V_{ps} fournie par les panneaux solaires ne permet pas de recharger directement une batterie de tension 350 V. Un régulateur MPPT (*Maximum Power Point Tracking*) constitué d'un convertisseur électronique DC/DC a pour rôle d'optimiser les valeurs des paramètres électriques de fonctionnement entre le système photo-voltaïque et la batterie. Le champ d'application de ces convertisseurs est large; on étudie ici un hacheur parallèle (convertisseur Boost) dont le schéma de principe est donné en figure I-1.

Ce système est composé principalement d'une bobine d'inductance L et de deux interrupteurs T_r et D , considérés comme idéaux. Le conducteur ohmique de résistance R modélise la batterie à charger. Un signal rectangulaire périodique de période T commande l'interrupteur T_r . Selon l'état des deux interrupteurs, on peut distinguer deux phases de fonctionnement :

- la phase active, de durée αT , lorsque l'interrupteur T_r est fermé et l'interrupteur D est ouvert; le coefficient α désigne le rapport cyclique;
- la phase de roue libre, de durée $(1 - \alpha)T$, lorsque l'interrupteur T_r est ouvert et l'interrupteur D est fermé.

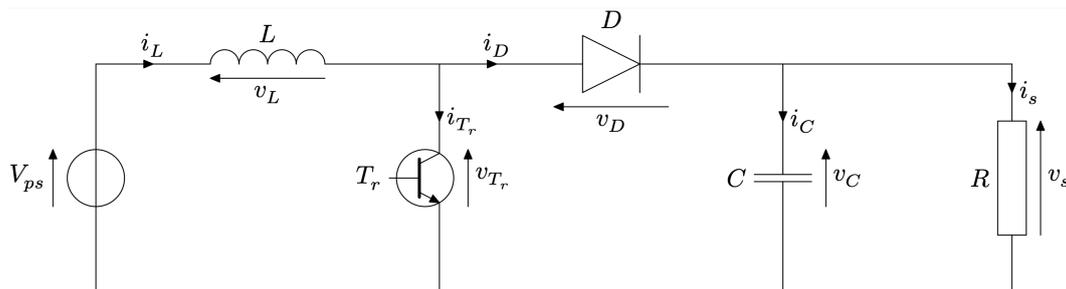


FIGURE I-1 – Schéma de principe d'un convertisseur Boost

Dans l'étude qui suit, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le régime périodique est établi;
- la tension d'alimentation V_{ps} est continue et constante;
- la valeur de la capacité C est suffisamment grande afin de pouvoir considérer la tension de sortie v_s comme supérieure à V_{ps} .

1 Phase active $0 \leq t < \alpha T$

1. On admet que $v_s > 0$. Justifier que la diode est bloquée. Représenter alors le schéma du circuit équivalent pour cette phase active supposée débuter à l'instant $t = 0$.
2. En déduit l'expression de $i_L(t)$ avec pour condition initiale $i_L(t = 0) = i_{L,\min}$.
3. Indiquer le temps caractéristique associé à l'ensemble résistance-condensateur. En déduire une condition sur C pour que la tension v_s puisse être considérée comme constante.

2 Phase de roue libre $\alpha T \leq t < T$

4. Représenter le schéma équivalent du convertisseur Boost durant la phase de roue libre, la tension v_s étant considérée comme constante.
5. On pose $i_L(t = \alpha T) = i_{L,\max}$. En déduire l'expression de $i_L(t)$ en fonction de V_{ps} , v_s , L , αT et $i_{L,\max}$.

3 Valeurs moyennes sur une période

- Déterminer deux expressions distinctes de la valeur de l'ondulation en intensité $i_{L,\max} - i_{L,\min}$, en fonction de α , T , L , V_{ps} et v_s .
- Représenter l'allure de l'évolution de l'intensité $i_L(t)$ sur une durée de deux périodes.
- En déduire $\langle v_L(t) \rangle$ et $\langle v_s(t) \rangle$, les valeurs moyennes sur une période des tensions $v_L(t)$ et $v_s(t)$, en fonction de V_{ps} et α .
- Justifier la dénomination de hacheur-survolteur associée au convertisseur Boost. Déterminer la valeur du rapport cyclique α pour permettre la recharge de la batterie étudiée si la tension aux bornes de l'association des panneaux solaires est de 72 V.

Partie II — Machine frigorifique avec une source de température variable (CCINP MP)

Dans la série de mangas *Shōnen One Piece*, Kuzan, plus connu sous le nom d'Aokiji, est l'un des Trois Amiraux de la Marine. Possesseur du Hie Hie no Mi, ou Givro-Fruit en français, il peut créer, contrôler ou devenir de la glace en maîtrisant les changements d'états.

Aokiji souhaite refroidir une partie de la mer et la geler; il sera considéré ici comme une machine frigorifique (\mathcal{S}). Cette machine est supposée réversible, cyclique et de puissance \mathcal{P} constante.

Elle fonctionne, pendant un temps Δt , entre l'atmosphère qui constitue un thermostat de température θ_c constante et une masse d'eau de mer $m = 1,0 \times 10^3$ kg, assimilée à de l'eau pure, de température T' qui passera de θ_c à T_f .

Les transferts thermiques et le travail seront comptés en convention récepteur : on appellera respectivement δQ_f et δQ_c les transferts thermiques reçus par (\mathcal{S}) de la part de la source froide et de la source chaude et δW le travail reçu par (\mathcal{S}) entre les instants t et $t + dt$.

On suppose que la durée d'un cycle est petit devant le temps caractéristique de refroidissement de la mer que l'on assimile à de l'eau pure. La machine décrit toujours un nombre entier de cycles.

On néglige les échanges thermiques entre la masse m (partie de la mer « refroidie (ou gelée) ») et le reste de la mer.

- Donner le schéma de principe de cette machine frigorifique, en indiquant le sens réel des transferts thermiques et du travail à un instant quelconque du fonctionnement de la machine frigorifique.

On s'intéresse au refroidissement de la mer qui reste dans son état liquide pendant toute la transformation, passant de θ_c à T_f .

- En appliquant le second principe sous forme infinitésimale, écrire la relation entre δQ_f , δQ_c , T' et θ_c .
- En appliquant le premier principe sous forme infinitésimale, déterminer le temps Δt nécessaire pour faire passer la mer de θ_c à T_f .
- Calculer la puissance minimale \mathcal{P}_{\min} pour que ce refroidissement dure moins que $\Delta t = 10$ min, avec $\theta_c = 293$ K.

On s'intéresse maintenant à la solidification de l'eau.

- En faisant l'hypothèse que la puissance \mathcal{P} reste constante et égale à \mathcal{P}_{\min} , exprimer le temps $\Delta t'$ nécessaire pour congeler la mer.

Calculer $\Delta t'$.

- Exprimer l'efficacité totale η de la machine frigorifique en fonction de \mathcal{P} , Δt , $\Delta t'$, T_f , m , L_{fus} , θ_c et c_{eau} , puis la calculer.

Données pour l'eau :

Conditions d'équilibre liquide-solide atmosphérique : $P^\circ = 1$ bar et $T_f = 273,15$ K.

Enthalpie massique de fusion (1 bar et 273,15 K) : $L_{\text{fus}} = 333,3$ kJ · kg⁻¹.

Capacité calorifique massique isobare : $c_{\text{eau}} = 4,18$ kJ · kg⁻¹ · K⁻¹.

Partie III — Traitement des eaux usées

L'assainissement des eaux usées dans une station d'épuration nécessite de débarrasser les effluents domestiques ou industriels des sables, graisses, déchets ménagers et agents polluants. On s'intéressera ici plus spécifiquement au pré-traitement et au traitement primaire des eaux dans la station. Les termes employés seront définis au fur et à mesure du problème.

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

Dans tout le problème, l'eau sera assimilée à un fluide incompressible.

1 — Dessalage — Déshuilage

On étudie dans cette partie la sédimentation ou la remontée à la surface de particules dans le bac de pré-traitement des eaux usées (*dessablage - déshuilage*), l'effluent ayant déjà traversé à l'entrée de la station d'épuration une grille qui retient les déchets solides les plus volumineux (*dégrillage*).

On modélise l'une de ces particules par une sphère homogène de masse volumique ρ_s et de rayon r . On note $d = \rho_s / \rho_e$ sa densité, où ρ_e est la masse volumique de l'eau. La vitesse de la bille sphérique est $\vec{v} = v(t) \vec{u}_z$.

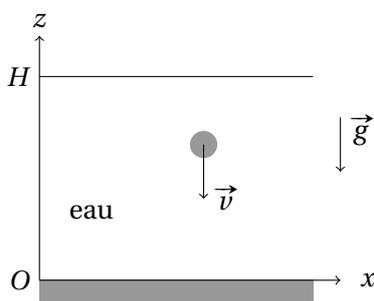


FIGURE I-2 – Particule sphérique plongée dans l'eau

On suppose que la force de traînée (ou force de frottement fluide) \vec{F}_t s'écrit sous la forme d'une force de Stokes :

$$\vec{F}_t = -6\pi\eta r \vec{v},$$

où η est la viscosité dynamique de l'eau.

1. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la bille dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen.
2. Déterminer la vitesse limite de chute¹ v_ℓ de la bille en fonction de r , d , g et $\nu = \eta / \rho_e$, viscosité cinématique de l'eau. À quelle condition y aura-t-il sédimentation, ou remontée en surface?
3. Pour les différentes particules proposées dans le tableau 1, calculer la vitesse limite v_ℓ et le temps t_c nécessaire pour parcourir une hauteur $H = 2$ m, en supposant que la vitesse limite est immédiatement atteinte.

On prendra $\nu = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $d = 2,65$ (densité du quartz) et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

	Sable grossier	Sable fin	Limon	Argile	Colloïde
Rayon r	1 mm	100 μm	10 μm	1 μm	0,1 μm

TABLE 1 – Taille typique de différentes particules

4. Le temps de chute t_c des particules ne peut dépasser 2 heures, afin d'éviter la remontée de sédiments provoquée par la sédimentation des boues. En déduire la taille minimale r_{\min} des particules solides éliminées dans le dessableur.

2 — Décantation des boues résiduelles

Cette partie s'intéresse à la modélisation des processus de sédimentation au sein du décanteur primaire, sous l'action du champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{u}_z$. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon $r \leq 1 \mu\text{m}$ et de densité d . On note $n^*(z, t)$ la densité volumique de particules, exprimée en particules $\cdot \text{m}^{-3}$.

1. Attention : ici v_ℓ est la composante algébrique de la vitesse limite : $\vec{v}_\ell = v_\ell \vec{u}_z$.

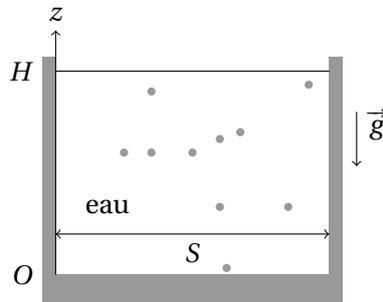


FIGURE I-3 – Particules en suspension dans un bac décanteur

Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur $H = 2$ m et de section S .

5. On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules n^* au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

5.a) La diffusion de particules se traduit par l'existence d'un flux de particules \vec{j}_D . La diffusion de particules se traduit par un flux de particules proportionnel et opposé au gradient de concentration, soit ici $\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^*$. La constante D est le coefficient de diffusion des particules sphériques dans l'eau.

Exprimer \vec{j}_D en fonction de D , $\frac{\partial n^*}{\partial z}$ et d'un vecteur unitaire.

5.b) En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à la vitesse \vec{v}_ℓ . Déterminer l'expression du flux de particules \vec{j}_C associé à la convection, en fonction de $n^*(z, t)$ et \vec{v}_ℓ . En déduire le flux total de particules $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_C$.

5.c) **Attention** : dans les questions précédentes, la vitesse limite était notée $\vec{v}_\ell = v_\ell \vec{u}_z$, avec v_ℓ algébrique; en particulier $v_\ell < 0$ dans le cas de la sédimentation. Dans les questions suivantes, l'énoncé considère $v_\ell > 0$ pour la sédimentation, notant implicitement v_ℓ la norme de la vitesse limite... On a alors $\vec{v}_\ell = -v_\ell \vec{u}_z$. Dans toute la suite, on pose donc $v_\ell = \|\vec{v}_\ell\|$.

Montrer que l'évolution de $n^*(z, t)$ est régie par l'équation de Mason-Weaver :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}.$$

6. On cherche le profil de concentration $n_\infty^*(z)$ en régime stationnaire.

6.a) Donner la forme de la solution générale pour $n_\infty^*(z)$, en introduisant une longueur caractéristique λ . Écrire la condition limite pour le flux total \vec{j} en $z = 0$, et en déduire la nouvelle forme de $n_\infty^*(z)$, que l'on exprimera en fonction de $n_0^* = n_\infty^*(z = 0)$, λ et z .

6.b) La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement de la force de Stokes :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}.$$

Montrer que la répartition des particules $n_\infty^*(z)$ peut s'interpréter à l'aide du facteur statistique de Boltzmann, qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, $n_\infty^*(z)$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{e_p}{k_B T}\right)$, e_p étant l'énergie potentielle associée à une particule et k_B la constante de Boltzmann. On pourra utiliser le résultat des questions I.1 et I.2.

6.c) Pour $T = 300$ K, estimer numériquement λ pour $r = 1 \mu\text{m}$, $r = 0,1 \mu\text{m}$ et $r = 0,01 \mu\text{m}$. Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

Données numériques

Accélération du champ de pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Partie IV — Le bioéthanol (Mines PSI)

L'épuisement des ressources fossiles ainsi que l'augmentation de l'effet de serre impliquent de trouver des solutions économes en consommation de pétrole, notamment dans le domaine des transports. Une voie consiste à mélanger l'essence à des biocarburants : le bioéthanol est ainsi présent à hauteur de 10 % dans l'essence SP95-E10, et jusqu'à 85 % dans le superéthanol E85.

Les biocarburants de seconde génération sont issus de sources ligno-cellulosiques (bois, feuilles, pailles). Afin de fabriquer le biocarburant, la cellulose contenue dans ces végétaux est tout d'abord séparée de la lignite et de l'hémicellulose par cuisson acide puis par explosion à la vapeur. La cellulose, polymère de glucose, est ensuite transformée en glucose (sucre à six atomes de carbone de formule brute $C_6H_{12}O_6(s)$) par hydrolyse enzymatique. Le glucose est enfin transformé en éthanol lors d'une étape de fermentation utilisant des levures.

1. Représenter la structure de Lewis de la molécule d'éthanol CH_3CH_2OH . Expliquer pourquoi l'eau et l'éthanol sont miscibles. Quelle est la conséquence sur les carburants à base de mélange d'essence et d'éthanol?
2. Écrire l'équation chimique (réaction (1)) de la synthèse de l'éthanol liquide à partir de la fermentation anaérobie d'une mole de glucose ($C_6H_{12}O_6(s)$). Seul du dioxyde de carbone est produit en même temps que l'éthanol.
3. Calculer l'enthalpie standard de réaction de cette réaction à 298 K en commenter le résultat obtenu.

On cherche à présent à mesurer la quantité de chaleur libérée lors de la combustion complète de l'éthanol dans l'air. On brûle complètement 3 g d'éthanol dans une enceinte isobare adiabatique à partir de la température $T_i = 298,0$ K. À la fin de l'expérience, l'eau du calorimètre est à la température $T_f = 318,0$ K. Le volume d'eau initialement contenu dans le calorimètre est de 1000 mL et on négligera la capacité calorifique du calorimètre par rapport à celle du volume d'eau.

4. Écrire l'équation bilan de la réaction (notée (2)). Pourquoi dit-on que le bioéthanol est un carburant propre alors que sa combustion produit des gaz à effets de serre?
5. Calculer grâce à l'expérience de calorimétrie l'enthalpie standard molaire de la réaction de combustion de l'éthanol (liquide) à 298 K.
6. Calculer grâce aux données fournies en annexe l'enthalpie standard molaire de la réaction de combustion de l'éthanol (liquide) à 298 K. Conclure.

Données

Enthalpies standard de formation, entropies standard et capacités calorifiques molaires standard (à 298 K) :

espèce	$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹)	S_m° (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹)	$C_{p,m}^\circ$ (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹)
$C_2H_5OH(g)$	-235	283	
$C_2H_5OH(l)$	-277	161	112
$O_2(g)$	0	205	29
$N_2(g)$			29
$CO_2(g)$	-394	214	37
$H_2O(g)$	-242	189	34
$H_2O(l)$	-286	70	75

Enthalpie standard de combustion du glucose :



Masses molaires :

$M(C) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(H) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Partie V — Maîtrise des outils mathématiques

1. On donne en coordonnées cylindriques le vecteur $\vec{J}(M) = J_0 r^2 \vec{e}_r$.

Calculer le flux de $\vec{J}(M)$ à travers un cylindre d'axe Oz , de rayon r et de hauteur H .

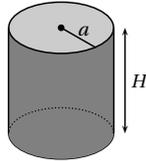
2. On donne en coordonnées sphériques le vecteur $\vec{A}(M) = \frac{a}{r^2} \vec{e}_r$.

Calculer le flux de $\vec{A}(M)$ à travers la sphère de centre O et de rayon r .

3. Donner le volume :

— d'une sphère de rayon a ;

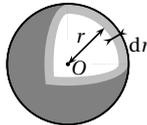
— d'un cylindre de rayon a et de hauteur H .



4. Donner la surface d'une sphère de rayon a .

5. Donner la surface latérale d'un cylindre de rayon a et de hauteur H .

6. Donner le volume d'une coquille sphérique de centre O , de rayon r et d'épaisseur dr .



7. On donne l'équation différentielle $\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$.

La résoudre sachant que $u(t_0) = U_0$.

8. On donne l'équation différentielle $\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{T(x)}{L^2} = \frac{T_0}{L^2}$.

La résoudre avec $T(0) = T_1$ et $\frac{dT}{dx}(x=0) = 0$.

9. On donne l'équation différentielle $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T(x)}{L^2} = 0$.

La résoudre sachant que $T(0) = T_0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = 0$.

10. Représenter sur le même graphique, pour $t \geq 0$, les courbes relatives aux expressions

$$N_1(t) = \frac{N_0}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad N_2(t) = \frac{N_0}{2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

On indiquera le maximum d'information sur le graphique.