

Partie I — Conversion de puissance (Centrale PSI)

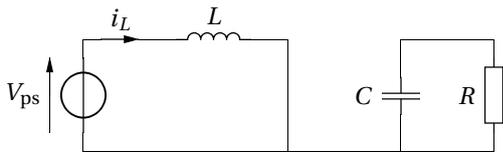
1 Phase active $0 \leq t < \alpha T$

1. Le transistor étant fermé, on a $v_{T_r} = 0$. La loi des mailles conduit donc à $v_s + v_D = 0$, d'où

$$v_D = -v_s < 0.$$

Comme $v_D < 0$, la diode est bloquée.

Le schéma électrique équivalent est donc



2. La loi des mailles (mailles du générateur) s'écrit

$$V_{ps} = L \frac{di_L}{dt},$$

d'où comme $i_L(t = 0) = i_{L,\min}$

$$i_L(t) = \frac{V_{ps}}{L} t + i_{L,\min}. \tag{1}$$

3. Le temps caractéristique associé à l'ensemble résistance-condensateur est

$$\tau = RC.$$

La tension v_s , qui varie avec le temps caractéristique τ , doit très peu varier pendant les phases de fonctionnement du montage, soit

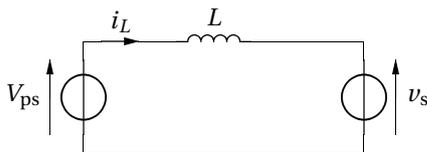
$$\tau \gg T.$$

On en déduit la condition

$$C \gg \frac{T}{R}.$$

2 Phase de roue libre $\alpha T \leq t < T$

4. Durant la phase de roue libre, la diode est passante et le transistor bloqué; le schéma équivalent au circuit est donc



5. La loi des mailles s'écrit

$$v_s + L \frac{di_L}{dt} - V_{ps} = 0.$$

Avec $i_L(t = \alpha T) = i_{L,\max}$, on en déduit

$$i_L(t) = \frac{V_{ps} - v_s}{L} (t - \alpha T) + i_{L,\max}. \tag{2}$$

3 Valeurs moyennes sur une période

6. Écrivons que $i_L(t = \alpha T) = i_{L,\max}$ à partir de l'équation (1) :

$$i_{L,\max} = \frac{V_{ps}}{L} \alpha T + i_{L,\min},$$

d'où

$$i_{L,\max} - i_{L,\min} = \frac{V_{ps}}{L} \alpha T. \tag{3}$$

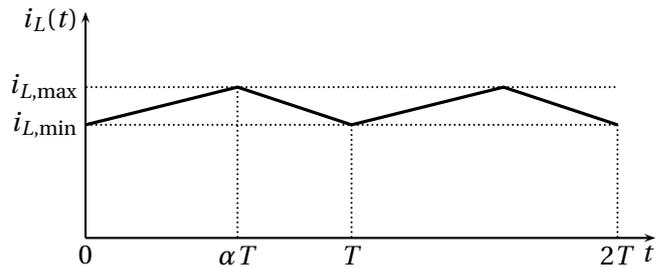
En régime périodique établi, on a $i_L(t = 0) = i_{L,\min}$, d'où $i_L(t = T) = i_{L,\min}$ à partir de l'équation (2) :

$$i_{L,\min} = \frac{V_{ps} - v_s}{L} (1 - \alpha) T + i_{L,\max},$$

d'où

$$i_{L,\max} - i_{L,\min} = \frac{v_s - V_{ps}}{L} (1 - \alpha) T. \tag{4}$$

7. L'intensité $i_L(t)$ est affine par morceaux, croissante pendant la phase active et décroissante pendant la phase de roue libre, d'où



8. On a $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, d'où $\langle v_L(t) \rangle = L \langle \frac{di_L(t)}{dt} \rangle$.

Comme $i_L(t)$ est périodique, on a

$$\langle \frac{di_L(t)}{dt} \rangle = 0$$

d'où

$$\langle v_L(t) \rangle = 0.$$

D'après (3) et (4), on a

$$\frac{V_{ps}}{L} \alpha T = \frac{v_s - V_{ps}}{L} (1 - \alpha) T$$

soit $\alpha V_{ps} = (1 - \alpha) v_s - (1 - \alpha) V_{ps}$. On en déduit

$$v_s = \frac{V_{ps}}{1 - \alpha}.$$

9. Comme $0 < \alpha < 1$, on a $v_s > V_{ps}$, d'où le nom de **hacheur-survolteur**.

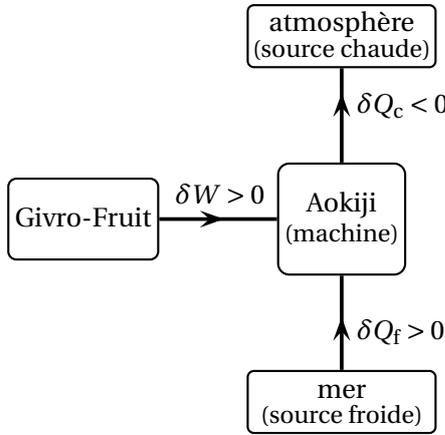
Le rapport cyclique est donné par $\alpha = 1 - \frac{V_{ps}}{v_s}$.

Avec $V_{ps} = 72 \text{ V}$ et $v_s = 350 \text{ V}$, on obtient

$$\alpha = 0,79.$$

Partie II — Machine frigorifique avec une source de température variable (CCINP MP)

1. La machine thermique provoque un transfert thermique dans le sens non spontanée de la source froide (la mer) vers la source chaude (l'atmosphère), ce qui nécessite une puissance mécanique.



2. Pendant un cycle, on peut considérer les températures des sources comme constantes; le second principe peut alors s'écrire sous forme infinitésimale

$$dS = \frac{\delta Q_c}{\theta_c} + \frac{\delta Q_f}{T'} + \delta S_{\text{créé}}.$$

L'évolution étant supposée réversible, on a $\delta S_{\text{créé}} = 0$. Le fonctionnement étant cyclique, on a $dS = 0$ sur un cycle (l'entropie est une fonction d'état). On en déduit

$$\frac{\delta Q_c}{\theta_c} + \frac{\delta Q_f}{T'} = 0.$$

3. Le premier principe s'écrit sous forme infinitésimale :

$$dU = \delta Q_c + \delta Q_f + \delta W.$$

Pour un cycle, on a $dU = 0$.

L'énergie reçue pendant un cycle de durée dt est $\delta W = \mathcal{P} dt$, d'où

$$\delta Q_c + \delta Q_f + \mathcal{P} dt = 0.$$

L'eau reçoit de la part de la machine un transfert thermique opposé à celui reçu par la machine de la part de l'eau. Le premier principe sous forme différentielle appliqué à la masse m d'eau liquide s'écrit donc, pour cette évolution isobare

$$dH = -\delta Q_f.$$

Comme $dH = mc_{\text{eau}} dT'$, on a

$$\delta Q_f = -mc_{\text{eau}} dT'.$$

Avec $\delta Q_c = -\frac{\theta_c}{T'} \delta Q_f$ d'après le second principe, on a

$$0 = \delta Q_f \left(1 - \frac{\theta_c}{T'} \right) + \mathcal{P} dt$$

soit

$$0 = -mc_{\text{eau}} \left(1 - \frac{\theta_c}{T'} \right) dT' + \mathcal{P} dt.$$

La relation

$$\mathcal{P} dt = mc_{\text{eau}} dT' - mc_{\text{eau}} \theta_c \frac{dT'}{T'}$$

intégrée sur la durée du processus s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \Delta t &= mc_{\text{eau}} \int_{\theta_c}^{T_f} dT' - mc_{\text{eau}} \theta_c \int_{\theta_c}^{T_f} \frac{dT'}{T'} \\ &= mc_{\text{eau}} (T_f - \theta_c) - mc_{\text{eau}} \theta_c \ln \left(\frac{T_f}{\theta_c} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta t = \frac{mc_{\text{eau}}}{\mathcal{P}} \left[T_f - \theta_c - \theta_c \ln \left(\frac{T_f}{\theta_c} \right) \right].$$

4. On calcule

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{10^3 \times 4,18 \times 10^3}{10 \times 60} \left[273,15 - 293 - 293 \times \ln \frac{273,15}{293} \right]$$

soit

$$\mathcal{P}_{\min} = 4,9 \text{ kW}.$$

5. Cette fois, la température de l'eau reste constante pendant la solidification. Il n'est donc pas nécessaire d'envisager une transformation infinitésimale sur un cycle.

Pour toute la phase de solidification, le second principe s'écrit

$$\frac{Q_c}{\theta_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0.$$

En appliquant le premier principe à la mer, on a

$$\Delta H = -Q_f = mL_{\text{sol}} = -mL_{\text{fus}}.$$

On a donc $Q_f = mL_{\text{fus}}$, d'où

$$Q_c = -\frac{\theta_c}{T_f} mL_{\text{fus}}.$$

Le premier principe s'écrit de même

$$0 = Q_f + Q_c + \mathcal{P}_{\min} \Delta t'$$

soit

$$0 = mL_{\text{fus}} - \frac{\theta_c}{T_f} mL_{\text{fus}} + \mathcal{P}_{\min} \Delta t',$$

d'où

$$\Delta t' = \frac{mL_{\text{fus}}}{\mathcal{P}_{\min}} \left(\frac{\theta_c}{T_f} - 1 \right).$$

On calcule

$$\Delta t' = 4,9 \times 10^3 \text{ s} = 82 \text{ min}.$$

6. L'efficacité totale de la machine frigorifique est donnée par

$$\eta = \frac{Q_{f,\text{tot}}}{W_{\text{tot}}}$$

avec

$$Q_{f,\text{tot}} = -mc_{\text{eau}}(T_f - \theta_c) + mL_{\text{fus}}$$

et

$$W_{\text{tot}} = \mathcal{P}(\Delta t + \Delta t'),$$

On calcule

$$\eta = \frac{mc_{\text{eau}}(\theta_c - T_f) + mL_{\text{fus}}}{\mathcal{P}(\Delta t + \Delta t')}.$$

$$\eta = 15.$$

Partie III — Traitement des eaux usées

1 — Dessalage — Déshuilage

1. Dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen, la bille est soumise à

— son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s g \vec{u}_z$;

— la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e g \vec{u}_z$;

— la force de frottement $\vec{F}_t = -6\pi\eta r v \vec{u}_z$.

2. Lorsque la bille atteint sa vitesse limite, le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{F}_t,$$

soit en projetant selon \vec{u}_z :

$$0 = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e g - 6\pi\eta r v_\ell.$$

On en déduit

$$6\pi\eta r v_\ell = \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_e \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_e}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_e (1 - d),$$

d'où

$$v_\ell = \frac{2r^2 g \rho_e}{9\eta} (1 - d).$$

En notant $v = \eta / \rho_e$, on a donc

$$v_\ell = \frac{2gr^2}{9v} (1 - d).$$

Il y a sédimentation (soit $v_\ell < 0$) si $d > 1$.

Il y a remontée en surface (soit $v_\ell > 0$) si $d < 1$.

3. On calcule $v_\ell = \frac{2 \times 9,81}{9 \times 10^{-6}} (1 - 2,65)r^2$ puis $t_c = \frac{2}{v_\ell}$.

	Sable grossier	Sable fin	Limon
$ v_\ell $	3,6 ms ⁻¹	36 mm · s ⁻¹	0,36 mm · s ⁻¹
t_c	0,56 s	56 s	93 min

	Argile	Colloïde
$ v_\ell $	3,6 μm · s ⁻¹	36 nm · s ⁻¹
t_c	6,4 jours	640 jours

4. On veut $t_{\text{max}} = \frac{H}{|v_\ell|} = \frac{9vH}{2gr_{\text{min}}^2(d-1)}$, d'où

$$r_{\text{min}} = \sqrt{\frac{9vH}{2gt_{\text{max}}(d-1)}}.$$

On calcule

$$r_{\text{min}} = \sqrt{\frac{9 \times 10^{-6} \times 2}{2 \times 9,81 \times 2 \times 3600 \times (2,65 - 1)}} = 8,8 \times 10^{-6} \text{ m},$$

soit $r_{\text{min}} = 8,8 \mu\text{m}$.

2 — Décantation des boues résiduelles

Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

5.a) En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{\text{grad}} n^* = \frac{\partial n^*}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial n^*}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial n^*}{\partial z} \vec{u}_z,$$

La densité étant de la forme $n^*(z, t)$, on en déduit

$$\vec{j}_D = -D \frac{\partial n^*(z, t)}{\partial z} \vec{u}_z.$$

5.b) Les particules traversant une section S normale à Oz , orientée selon \vec{u}_z (soit $\vec{S} = S\vec{u}_z$), pendant dt sont comprises dans le cylindre de hauteur $v_\ell dt$ et de section S .

Son volume étant $d\tau = Sv_\ell dt$, il contient $\delta N = n^*(z, t)d\tau = n^*(z, t)Sv_\ell dt$ particules.

On définit la densité $\vec{j}_C = j_C \vec{u}_z$ associée à la convection par $\delta N = \vec{j}_C \cdot \vec{S} dt = j_C \vec{u}_z \cdot S\vec{u}_z dt = j_C S dt$.

En identifiant avec l'expression précédente, on obtient $j_C = n^*(z, t)v_\ell$, soit

$$\vec{j}_C = n^*(z, t)v_\ell \vec{u}_z.$$

Le flux total de particules est alors

$$\vec{j} = -D \frac{\partial n^*(z, t)}{\partial z} \vec{u}_z + n^*(z, t)v_\ell \vec{u}_z.$$

En notant $\vec{v}_\ell = -v_\ell \vec{u}_z$ on obtient

$$\vec{j} = -D \frac{\partial n^*(z, t)}{\partial z} \vec{u}_z - n^*(z, t) v_\ell \vec{u}_z.$$

5.c) Effectuons un bilan de particules sur volume de section S , compris entre z et $z + dt$.

Il contient $\delta N = n^*(z, t) S dz$ particules. Entre t et $t + dt$, ce nombre varie de

$$d(\delta N) = (n(z, t + dt) - n(z, t)) S dz = \frac{\partial n^*}{\partial t} S dz dt.$$

En l'absence de sources internes de particules, le bilan de particules s'écrit $d(\delta N) = \delta^2 N_{\text{reçu}}$.

Entre t et $t + dt$, le système reçoit

$$\delta^2 N_{\text{reçu}} = j(z, t) S dt - j(z + dz, t) S dt = -\frac{\partial j}{\partial z} S dz dt.$$

Le bilan s'écrit alors

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}.$$

On obtient bien l'équation de Mason-Weaver.

6. Cas du régime stationnaire.

6.a) Considérons le régime stationnaire atteint (limite $t \rightarrow \infty$). On a alors $\frac{\partial n_\infty^*}{\partial t} = 0$, et l'équation de Mason-Weaver s'écrit

$$D \frac{d^2 n_\infty^*}{dz^2} + v_\ell \frac{dn_\infty^*}{dz} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 n_\infty^*}{dz^2} + \frac{v_\ell}{D} \frac{dn_\infty^*}{dz} = 0.$$

Chaque terme ayant la dimension de $[n_\infty^*]/L^2$, on peut définir une longueur caractéristique

$$\lambda = \frac{D}{v_\ell}.$$

L'équation s'écrit alors $\frac{d^2 n_\infty^*}{dz^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{dn_\infty^*}{dz} = 0$. Il s'agit

d'une équation du premier ordre en $F(z) = \frac{dn_\infty^*}{dz}$, de la

forme $\frac{dF}{dz} + \frac{F(z)}{\lambda} = 0$, dont la solution générale s'écrit

$$\frac{dn_\infty^*}{dz} = F(z) = A e^{-z/\lambda},$$

A étant une constante déterminée par les conditions initiales.

Une intégration supplémentaire conduit alors à la forme générale de la solution de l'équation différentielle :

$$n_\infty^*(z) = -\lambda A e^{-z/\lambda} + B.$$

On note $n_0^* = n_\infty^*(z=0) = B - \lambda A$, soit

$$n_\infty^*(z) = n_0^* + \lambda A (1 - e^{-z/\lambda}).$$

On peut aussi remarquer que l'on a une équation différentielle homogène d'ordre deux. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r/\lambda = 0$, soit $r(r + 1/\lambda) = 0$. Elle admet donc deux racines réelles $r_1 = -1/\lambda$ et r_2 . La solution générale s'écrit alors $n_\infty^*(z) = A' e^{r_1 z} + B' e^{r_2 z}$, soit

$n_\infty^*(z) = A' e^{-z/\lambda} + B'$. On retrouve la forme générale établie précédemment.

Aucune particule ne pouvant traverser le fond du bac, on a la condition limite $j(z=0) = 0$:

$$D \frac{dn_\infty^*}{dz}(0) + v_\ell n_\infty^*(0) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dn_\infty^*}{dz}(0) + \frac{n_\infty^*(0)}{\lambda} = 0,$$

d'où $A + \frac{n_0^*}{\lambda} = 0$. La densité de particules s'écrit donc

$$n_\infty^*(z) = n_0^* - n_0^* (1 - e^{-z/\lambda}) \quad \text{soit} \quad n_\infty^*(z) = n_0^* e^{-z/\lambda}.$$

6.b) La densité de particules s'écrit¹

$$\begin{aligned} n_\infty^*(z) &= n_0^* \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right) = n_0^* \exp\left(-\frac{z|v_\ell|}{D}\right) \\ &= n_0^* \exp\left(-\frac{2gr^2(d-1)z}{9vD}\right), \end{aligned}$$

soit, avec $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$

$$\begin{aligned} n_\infty^*(z) &= n_0^* \exp\left(-\frac{2gr^2(1-d)z6\pi\eta r}{9vk_B T}\right) \\ &= n_0^* \exp\left(-\frac{4\pi r^3(d-1)\rho_e g z}{3k_B T}\right). \end{aligned}$$

Une particule de masse $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s$ a une énergie potentielle dont dérivent la résultante du poids et de la poussée d'Archimède

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{\Pi}_A &= -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s g \vec{u}_z + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e g \vec{u}_z \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e (1-d) g \vec{u}_z = -\frac{de_p}{dz} \vec{u}_z. \end{aligned}$$

L'énergie potentielle vaut donc

$$e_p(z) = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e (1-d) g z.$$

La densité volumique de particules en régime stationnaire est bien donnée par la statistique de Boltzmann

$$n_\infty^*(z) = n_0^* \exp\left(-\frac{e_p(z)}{k_B T}\right).$$

6.c) Pour $T = 300$ K, on calcule

$$\lambda = \frac{D}{v_\ell} = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \frac{9v}{2gr^2(1-d)} = \frac{k_B T}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e (d-1)g}.$$

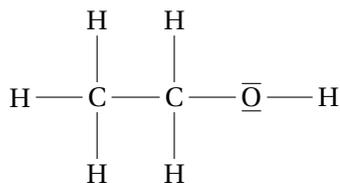
rayon	$r = 1 \mu\text{m}$	$r = 0,1 \mu\text{m}$	$r = 0,01 \mu\text{m}$
λ	61 nm	61 μm	6,1 cm

La diffusion ne joue de rôle notable que sur une distance de l'ordre de λ . On peut donc négliger la diffusion dans un bac de profondeur H si $\lambda \ll H$. D'après les résultats du tableau précédent, on voit que **la diffusion peut être négligée dans la modélisation de la sédimentation pour les trois tailles de particules envisagées.**

1. Attention à la différence de notation de v_ℓ entre les premières questions et les questions suivantes...

Partie IV — Le bioéthanol (Mines PSI)

1. La structure de Lewis de l'éthanol est



Du fait de la présence de l'atome d'oxygène électronégatif, la molécule d'éthanol est polaire et susceptible de former des liaisons hydrogène, comme la molécule d'eau, ce qui explique que l'eau et l'éthanol sont miscibles.

Les alcanes présents dans l'essence sont des molécules apolaires, peu miscibles dans l'éthanol.

Un carburant à base d'essence et d'éthanol sera donc hétérogène, formé d'une phase alcool et d'une phase alcane.

2. La réaction de fermentation anaérobie d'une mole de glucose s'écrit



3. L'enthalpie standard de cette réaction est donnée par

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) + 2\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2) - \Delta_f H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)$$

L'enthalpie standard de formation du glucose n'est pas donnée, mais on donne l'enthalpie standard de la réaction



soit comme $\Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})) = 0$ (élément dans son état standard de référence)

$$\Delta_{\text{comb}} H^\circ = 6\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2(\text{g})) + 6\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) - \Delta_f H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)$$

On en déduit

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_{\text{comb}} H^\circ + 2\Delta_f H^\circ(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) - 4\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2) - 6\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{g}))$$

On calcule

$$\Delta_r H^\circ = -2816 + 2 \times (-277) - 4 \times (-394) - 6 \times (-242)$$

soit

$$\Delta_r H^\circ = -342 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On a $\Delta_r H^\circ < 0$: la réaction est **exothermique**.

4. La réaction de combustion de l'éthanol a pour bilan



Contrairement à la combustion d'hydrocarbures fossiles, le carbone rejeté par la combustion du bioéthanol a été préalablement fixé par les plantes; le bilan est donc neutre en terme de production de gaz à effet de serre. De plus, la combustion de l'éthanol libère moins de CO_2 que celle des alcanes constituant l'essence (octane).

5. On part initialement de n moles d'éthanol (correspondant à $m = 3$ g).

Le mélange initial contient donc $3n$ moles de O_2 , $12n$ moles de N_2 et n_{eau} moles d'eau.

Le mélange final contient $2n$ moles de CO_2 , les $12n$ moles de N_2 qui ne participent pas à la réaction et $n_{\text{eau}} + 3n$ moles d'eau (eau formée par la réaction et eau initialement contenue dans le calorimètre).

On calcule

$$n = \frac{m}{M_{\text{éth}}} = \frac{3}{46} = 6,5 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

et

$$n_{\text{eau}} = \frac{1000}{18} = 55,5 \text{ mol}$$

Le réacteur étant isolé, le premier principe appliqué au contenu du réacteur s'écrit

$$\Delta H = 0$$

On décompose la réaction en deux étapes fictives :

1re étape : réaction isotherme et isobare, la variation d'enthalpie du système étant ΔH_1 ;

2e étape : élévation de la température du milieu final de T_i à T_f , la variation d'enthalpie du système étant ΔH_2 .

L'enthalpie étant une fonction d'état, on a

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

Pour l'étape correspond à la réaction chimique, l'avancement final est $\xi_f = n$, d'où

$$\Delta H_1 = n\Delta_r H^\circ$$

Pour l'étape d'élévation de température, on a

$$\Delta H_2 = \left[2nC_{\text{pm}}^\circ(\text{O}_2) + 12nC_{\text{pm}}^\circ(\text{N}_2) + (n_{\text{eau}} + 3n)C_{\text{pm}}^\circ(\text{H}_2\text{O}) \right] (T_f - T_i)$$

De la relation $\Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$ on déduit

$$\Delta_r H^\circ = - \left[2C_{\text{pm}}^\circ(\text{O}_2) + 12C_{\text{pm}}^\circ(\text{N}_2) + \left(3 + \frac{n_{\text{eau}}}{n} \right) C_{\text{pm}}^\circ(\text{H}_2\text{O}) \right] (T_f - T_i)$$

On calcule

$$\Delta_r H^\circ = - \left[2 \times 29 + 12 \times 29 + \left(3 + \frac{55,5}{6,5 \times 10^{-2}} \right) \times 75 \right] \times (318 - 298)$$

soit

$$\Delta_r H^\circ = -1293 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

6. L'enthalpie standard de réaction de combustion de l'éthanol (liquide) est donnée par

$$\Delta_r H^\circ = -1369 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2(\text{g})) + 3\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\ell)) - \Delta_f H^\circ(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\ell)) - 3\Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})).$$

On calcule en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\Delta_r H^\circ = 2 \times (-394) + 3 \times (-286) - (-277)$$

La grandeur estimée expérimentalement ne diffère que de 6 % de la valeur tabulée, ce qui est correct compte tenu des hypothèses effectuées (capacité calorifique du calorimètre négligée).

Partie V — Maîtrise des outils mathématiques

1. Le flux à travers le cylindre Σ est

$$\Phi = \iint_{M \in \Sigma} \vec{J}(M) \cdot d\vec{S}_M = 2\pi r H \times J_0 r^2$$

soit $\Phi = 2\pi H J_0 r^3$.

2. Le flux à travers la sphère Σ est

$$\Phi = \iint_{M \in \Sigma} \vec{J}(M) \cdot d\vec{S}_M = 4\pi r^2 \times \frac{a}{r^2}$$

soit $\Phi = 4\pi a$.

3. Volume d'une sphère de rayon a :

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Volume d'un cylindre de rayon a et de hauteur H :

$$V = \pi a^2 H.$$

4. Surface d'une sphère de rayon a :

$$S = 4\pi a^2.$$

5. Surface latérale d'un cylindre de rayon a et de hauteur H :

$$S = 2\pi a H.$$

6. Volume d'une coquille sphérique de centre O , de rayon r et d'épaisseur dr :

$$d\tau = 4\pi r^2 dr.$$

7. La solution générale de l'équation différentielle

$$\tau \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0 \text{ est}$$

$$u(t) = A e^{-t/\tau}.$$

On a $u(t_0) = A e^{-t_0/\tau} = U_0$, d'où

$$u(t) = U_0 e^{-(t-t_0)/\tau}.$$

8. La solution générale de $\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{T(x)}{L^2} = \frac{T_0}{L^2}$ est

$$T(x) = A \cos\left(\frac{x}{L}\right) + B \sin\left(\frac{x}{L}\right) + T_0.$$

On a

$$T(0) = A + T_0 = T_1$$

d'où $A = T_1 - T_0$, et

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{L} \sin\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{B}{L} \cos\left(\frac{x}{L}\right)$$

d'où

$$\frac{dT}{dx}(x=0) = \frac{B}{L} = 0.$$

Finalement

$$T(x) = (T_1 - T_0) \cos\left(\frac{x}{L}\right) + T_0.$$

9. La solution générale de $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T(x)}{L^2} = 0$ est

$$T(x) = A e^{x/L} + B e^{-x/L}.$$

On a $T(0) = A + B = T_0$, et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = 0$$

n'est possible que pour $A = 0$.

Finalement $B = T_0$ et

$$T(x) = T_0 e^{-x/L}.$$

10. On a $N_1(0) = N_0$ et $N_2(0) = 0$, ainsi que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} N_2(t) = \frac{N_0}{2}.$$

