

Phénomènes de transport

II — Diffusion thermique

Les différents modes de transfert thermique

Convection La convection thermique est un transfert d'énergie thermique, par rapport à un référentiel donné, dû à un transport macroscopique de matière dans ce référentiel. Elle peut être libre, ou forcée quand le mouvement du fluide est imposé par une machine extérieure au système (pompe, ventilateur...).

Rayonnement Le rayonnement thermique est un transfert d'énergie par une onde électromagnétique située principalement dans l'infrarouge. Tout corps émet un rayonnement de spectre continu, la longueur d'onde pour laquelle un maximum de puissance est rayonnée dépendant de la température du corps.

Diffusion La diffusion thermique est un transfert thermique d'origine microscopique (transmission de proche en proche du mouvement d'agitation thermique) au sein d'un milieu matériel dans lequel la température n'est pas uniforme. Ce transfert se fait, de façon irréversible, des zones de températures élevées aux zones de basses températures et tend à rendre uniforme la distribution de température.

- Le transfert par rayonnement thermique, qui se produit dans les milieux transparents au rayonnement, est le seul pouvant avoir lieu dans le vide.
- La convection est le mode de transfert thermique principal dans les fluides.
- La conduction existe dans tous les corps matériels mais est souvent masquée par la convection dans les fluides. C'est le mode de transfert principal dans les solides.

Vecteur densité de courant thermique

Flux thermique

L'énergie transférée à travers une surface Σ orientée, pendant une durée dt , par transfert thermique s'écrit

$$\delta Q(t) = \Phi_{\Sigma}(t) dt$$

où $\Phi_{\Sigma}(t)$ est le flux thermique à travers Σ .

- Le flux thermique s'exprime en W : il représente la **puissance thermique** traversant Σ .
- Le flux thermique est une grandeur scalaire algébrique ; son signe dépend du choix d'orientation de Σ et du sens réel du transfert d'énergie thermique à travers Σ .

Vecteur densité de courant thermique

Par définition du vecteur densité de courant thermique :

$$\Phi_{\Sigma}(t) = \iint_{M \in \Sigma} \vec{j}_Q(M, t) \cdot d\vec{S}_M.$$

- La norme $\|\vec{j}_Q(M, t)\|$ s'exprime en $W \cdot m^{-2}$. Elle représente une **puissance surfacique**.
- En coordonnées cartésiennes, pour un phénomène unidimensionnel décrit par $\vec{j}_Q = j_Q(x, t) \vec{e}_x$, le flux thermique à travers une surface S normale à Ox , à l'abscisse x , orientée selon $\vec{e}_x$ est $\Phi(x, t) = j_Q(x, t) S$.
- En coordonnées sphériques, pour un phénomène unidimensionnel décrit par $\vec{j}_Q = j_Q(r, t) \vec{e}_r$, le flux thermique sortant à travers une sphère de rayon r est $\Phi(r, t) = 4\pi r^2 j_Q(r, t)$.
- En coordonnées cylindriques, pour un phénomène unidimensionnel décrit par $\vec{j}_Q = j_Q(r, t) \vec{e}_r$, le flux thermique sortant à travers un cylindre de rayon r et de hauteur H est $\Phi(r, t) = 2\pi r H j_Q(r, t)$.

Bilan d'énergie : premier principe

Écriture générale

On considère un système de volume $\mathcal{V}$ délimité par une frontière Σ fixe (donc $W_{\text{pression}} = 0$ pour ce système indéformable).

Le bilan d'énergie pendant une durée dt s'écrit sous la forme générale

$$\underbrace{dU}_{\text{variation d'énergie stockée}} = \underbrace{\delta Q_{\text{reçu}}}_{\text{énergie reçue}} + \underbrace{\mathcal{P}_{\text{prod}} dt}_{\text{énergie produite}}$$

- $dU = U(t + dt) - U(t)$ est la variation de l'énergie interne du système pendant dt ;
- $\delta Q_{\text{reçu}}$ est le transfert thermique *reçu* par le système pendant dt à travers sa frontière Σ ;
- $\mathcal{P}_{\text{prod}}$ est la puissance produite par des sources internes au système (effet Joule, réaction chimique exothermique ou endothermique, réaction nucléaire, changement de phase).

Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local

Un système est à l'équilibre thermodynamique si les grandeurs intensives y sont uniformes (température, pression, potentiel chimique de chaque espèce), et s'il n'y a pas de mouvement convectif (mouvement macroscopique de matière) en son sein.

- Lorsqu'un système est dans un état hors d'équilibre, les champs intensifs sont non uniformes, ce qui donne naissance à des flux : transfert thermique si T n'est pas uniforme par exemple.

Dans l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local, chaque volume mésoscopique $d\tau_M$ du système est à l'équilibre thermodynamique.

- On peut alors définir localement, en tout point du système, la température $T(M, t)$, et la pression $P(M, t)$.

Équation locale du bilan thermique en l'absence de sources internes

On considère un milieu de masse volumique ρ , de capacité thermique massique à volume constant¹ c_v .

On se place dans le cadre de l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local : l'équilibre thermodynamique est réalisé sur un volume mésoscopique $d\tau_M$ de masse $dm = \rho d\tau$; sa température est donc uniforme² $T(M, t)$.

On définit l'énergie interne massique $u(M, t) = \frac{\delta U}{dm}$. La variation de son énergie interne entre t et $t + dt$ est donc

lié à la variation de température : $d(\delta U) = C_v dt$, avec $C_v = c_v dm$ et $dT = T(M, t + dt) - T(M, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt$, d'où $d(\delta U) = \rho c_v d\tau dT$.

Cas unidimensionnel en coordonnées cartésiennes

Avec $T(M, t) = T(x, t)$ et $\vec{j}_Q(x, t) = j_Q(x, t) \vec{e}_x$, on a $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} S dx dt = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt$.

En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit

$$\rho c_v \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q(x, t)}{\partial x}.$$

- On obtient cette équation en faisant un bilan d'énergie à la tranche comprise entre x et $x + dx$.

1. Dans le cas d'une phase condensée — liquide ou solide — on considère $c_v \approx c_p \approx c$, capacité thermique.
2. En raison de l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.

Cas unidimensionnel en coordonnées cylindriques

Avec $T(M, t) = T(r, t)$ et $\vec{j}_Q(r, t) = j_Q(r, t) \vec{e}_r$, on a $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r H dr dt = - \frac{\partial 2\pi r H j_Q}{\partial r} dr dt$.

En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit

$$\rho c_v \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial r j_Q(r, t)}{\partial r}.$$

➤ On obtient cette équation en faisant un bilan d'énergie au tube de rayon r d'épaisseur dr .

Cas unidimensionnel en coordonnées sphériques

Avec $T(M, t) = T(r, t)$ et $\vec{j}_Q(r, t) = j_Q(r, t) \vec{e}_r$, on a $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} 4\pi r^2 dr dt = - \frac{\partial 4\pi r^2 H j_Q}{\partial r} dr dt$.

En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit

$$\rho c_v \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 j_Q(r, t)}{\partial r}.$$

➤ On obtient cette équation en faisant un bilan d'énergie à la coquille de rayon r d'épaisseur dr .

Généralisation en géométrie quelconque

En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit

$$\rho c_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j}_Q(M, t).$$

Bilan thermique en présence de sources internes

On note $p(M, t)$ la puissance volumique produite au sein du milieu, soit $\mathcal{P}_{\text{prod}} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} p(M, t) d\tau_M$.

Pour un phénomène unidimensionnel en coordonnées cartésiennes :

$$\rho c_v \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q(x, t)}{\partial x} + p(x, t).$$

➤ Énergie électrique dissipée pendant dt dans une tranche dx d'un conducteur ohmique : $\frac{dx}{\sigma S} I^2 dt$.

En géométrie quelconque :

$$\rho c_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j}_Q(M, t) + p(M, t).$$

Loi de Fourier

Quand la température n'est pas uniforme, il apparaît un courant de diffusion thermique ayant pour effet de la rendre uniforme : le flux thermique est dirigé des régions de température élevée aux régions de température faible. Dans le cas unidimensionnel il est donné par la loi de Fourier :

$$j_Q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x},$$

où $\lambda > 0$ est la **conductivité thermique** du milieu (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

En géométrie quelconque, la loi de Fourier se généralise :

$$\vec{j}_Q(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(M, t).$$

- La loi de Fourier (1815) est *phénoménologique*. Elle est valable si les variations de températures ne sont ni trop fortes, ni trop faibles, ni trop rapides.
- La loi de Fourier décrit une réponse du milieu linéaire et instantanée : la cause est le gradient de température $\overrightarrow{\text{grad}} T$ traduisant la non uniformité de la température, la réponse le courant $\vec{j}_Q$.
- Le signe $-$ rend compte de l'orientation du flux thermique vers les basses températures.
- Une conductivité thermique λ caractérise un bon conducteur thermique; un milieu est d'autant plus thermiquement isolant que sa conductivité thermique λ est faible.
- Dans les métaux, les électrons de conduction participent au transfert thermique par diffusion : en général, les bons conducteurs électriques sont de bons conducteurs thermiques.
- Pour les non métaux, les matériaux les plus conducteurs sont les plus cristallisés. Le diamant est le meilleur conducteur thermique : $\lambda = 2300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- La conductivité thermique des gaz est très faible : ce sont de très bons isolants thermiques en l'absence de convection.

Ordres de grandeur à connaître

métaux bons conducteurs électriques	$\lambda \approx 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
métaux médiocres conducteurs électriques (acier)	$\lambda \approx 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
béton , verre, eau	$\lambda \approx 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
air , laine de verre	$\lambda \approx 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

On a $\lambda \approx 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pour l'argent et le cuivre.

Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes

Dans le cas unidimensionnel, en l'absence de sources internes, on déduit de l'équation locale de bilan d'énergie et de la loi de Fourier l'**équation de la diffusion thermique** :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_v} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}.$$

On peut l'écrire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$$

où a (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) est la **diffusivité thermique** du milieu.

En géométrie quelconque, l'équation de la diffusion thermique se généralise en

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t).$$

- L'équation de la diffusion thermique est aussi appelée *équation de la chaleur*.
- L'équation de la diffusion n'est pas invariante par renversement du temps (changement de variable $t' = -t$). Cela traduit le *caractère irréversible* du phénomène de diffusion.
- On a une bonne diffusion thermique dans un milieu de conductivité λ élevée (le flux thermique y est transmis facilement) et de capacité thermique volumique ρc_v faible (le milieu a un faible pouvoir de stockage de l'énergie sous forme thermique) : $a = \frac{\text{capacité à conduire la chaleur}}{\text{capacité à accumuler la chaleur}}$.
C'est la diffusivité thermique qui joue le rôle de coefficient de diffusion.

- Les valeurs de la diffusivité a sont assez proches : $10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour les gaz et les solides, $10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour les liquides. En effet, les matériaux de conductivité λ élevée ont une masse volumique ρ élevée.
- La diffusivité a n'intervient qu'en régime variable ; en régime stationnaire, seule la conductivité λ intervient.

Echelles caractéristiques

On note L l'échelle de longueur caractéristique du phénomène et τ sa durée caractéristique. De l'équation de la diffusion on déduit

$$L \sim \sqrt{a\tau}$$

- La diffusion met un temps très long pour se produire sur une grande distance : $\tau \propto (L)^2$.

Cas où il y a de sources internes

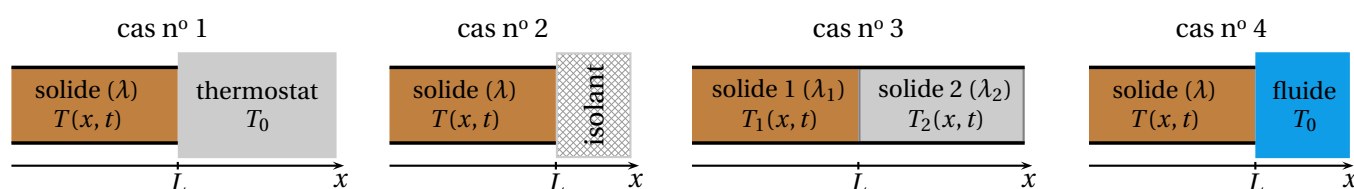
Dans le cas où une puissance volumique $p(M, t)$ est produite au sein du milieu, on en déduit respectivement dans les cas unidimensionnel et en géométrie quelconque :

$$\rho c_v \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t) \quad \text{et} \quad \rho c_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M, t) + p(M, t) .$$

Conditions aux limites

L'équation de la diffusion thermique est une équation aux dérivées partielles linéaires. Pour un jeu de conditions initiales et aux limites données, la solution est unique.

Cas n° 1	Frontière Σ en contact avec un thermostat à la température T_0 .	La température est continue.	$T(L, t) = T_0, \forall t$
Cas n° 2	Frontière calorifugée.	Le flux thermique (donc la densité de courant) est nul à travers la frontière.	$j_Q(L, t) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_t (L, t) = 0 ; \forall t$
Cas n° 3	Contact parfait entre deux solides.	Le flux thermique et la température sont continus à la traversée de la jonction.	$T_1(L, t) = T_2(L, t), \forall t$ $-\lambda_1 S \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_t (L^-, t) = -\lambda_2 S \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_t (L^+, t), \forall t$
Cas n° 4	Frontière solide Σ au contact d'un fluide.	Continuité du flux (donc de la densité de courant) donné par la loi de Newton.	$-\lambda \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)_t (L, t) = h [T(L, t) - T_0], \forall t$



Loi de Newton

La température est une grandeur continue, mais elle varie beaucoup sur une très courte distance dans le fluide au voisinage de la paroi ; on modélise cette variation rapide par une discontinuité de température, le transfert thermique étant donné par la loi de Newton : $\Phi_{cc} = hS(T - T_0)$ pour un corps de température T plongé dans un fluide à la température T_0 . Le vecteur densité de courant thermique, orienté du solide vers le fluide, est donc $j_{Q,cc} = h(T - T_0)$.

- Le coefficient conducto-convectif h est plus élevé pour un liquide que pour un gaz, et est plus important dans le cas de la convection forcée.

Régime stationnaire : résistance thermique

Cas unidimensionnel : résistance thermique

Considérons un phénomène unidimensionnel en coordonnées cartésiennes décrit par $T(x, t)$ et $\Phi(x)$, le milieu étant compris entre $x = 0$ et $x = L$, avec $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$.

L'équation de la diffusion thermique conduit à

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi(x)}{dx} = 0.$$

En régime permanent, en l'absence de sources internes, le flux thermique Φ est conservé tout le long du milieu (il ne dépend pas de x).

- La température varie de façon affine : $T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$.

On définit la **résistance thermique** R_{th} du matériau par

$$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2},$$

le flux thermique étant orienté de l'extrémité (1) vers l'extrémité (2).

- La résistance thermique est positive, et s'exprime en $K \cdot W^{-1}$.
- La résistance thermique d'un cylindre de longueur L et de section S siège d'une diffusion thermique unidimensionnelle selon son axe est

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

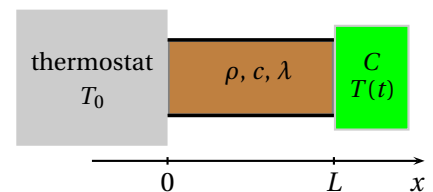
- On définit la **conductance thermique** $G_{th} = 1/R_{th}$.
- Deux milieux sont en série s'ils sont traversés par le même flux thermique. Leur résistance thermique équivalente vaut $R_{th} = R_{th,1} + R_{th,2}$: **les résistances thermiques en série s'ajoutent**.
- Deux milieux sont en parallèle s'ils ont la même différence de température entre leurs extrémités. Leur conductance thermique équivalente vaut $G_{th} = G_{th,1} + G_{th,2}$: **les conductances thermiques en parallèle s'ajoutent**.
- Une interface entre une paroi solide et un fluide (loi de Newton) peut être décrite par une résistance thermique $R_{th} = \frac{1}{hS}$.
- On peut généraliser la résistance thermique en géométrie quelconque en régime stationnaire, à partir de la définition générale

$$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi.$$

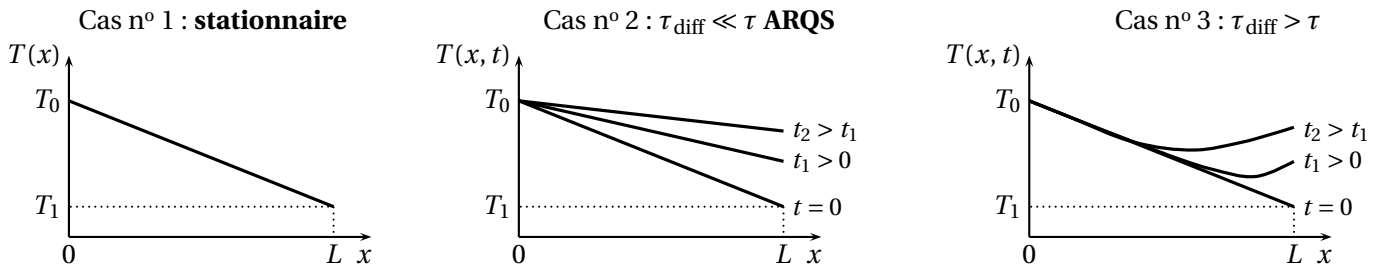
ARQS (approximation des régimes quasi-stationnaires) : analogie électrocinétique

On considère un corps de capacité thermique C de température $T(t)$, au contact d'un thermostat à la température T_0 à travers une résistance thermique R_{th} (cylindre de longueur L , de section S , de conductivité thermique λ , capacité thermique c).

Posons $T(t = 0) = T_1 < T_0$; la température du corps augmente du fait du flux thermique traversant le cylindre.



La durée caractéristique de la diffusion thermique dans le cylindre est $\tau_{diff} = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$. On note τ le temps caractéristique de l'évolution de $T(t)$.



cas n°1 Régime stationnaire (correspond à $C \rightarrow \infty$). Le profil de température est affine dans le cylindre.

cas n°2 Si $\tau_{\text{diff}} \ll \tau$, la température dans le cylindre est affine à chaque instant, la pente évoluant au cours du temps; c'est l'ARQS. La condition revient à $\rho c L \ll C$: la capacité thermique du cylindre est négligeable devant celle du corps recevant le flux thermique.

cas n°3 On n'est plus dans l'ARQS; la température $T(t)$ évolue trop rapidement pour que la température dans le cylindre puisse relaxer vers le profil affine au cours de l'évolution.

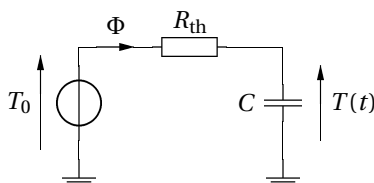
Dans le cadre de l'ARQS, on peut utiliser le concept de résistance thermique, et faire une analogie électrocinétique.

Système réel

$$C dT = \Phi dt \quad \text{et} \quad T_0 - T(t) = R_{\text{th}} \Phi$$

$$R_{\text{th}} C \frac{dT}{dt} + T(t) = T_0$$

Constante de temps $\tau = R_{\text{th}} C$.

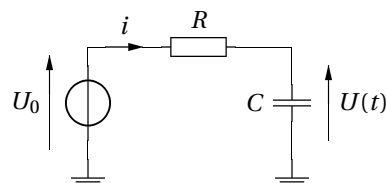


Analogie électrocinétique

$$C \frac{dU}{dt} = i \quad \text{et} \quad U_0 - U(t) = Ri$$

$$RC \frac{dU(t)}{dt} + U(t) = U_0$$

Constante de temps $\tau = RC$.



Ondes thermiques

On considère un milieu semi-infini $x > 0$ (caractéristiques λ , ρ , c_v); on impose à la frontière $x = 0$ les variations sinusoïdales de température

$$T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t).$$

En régime harmonique établi, la température solution de l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ est de la forme, en notation complexe

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + T_1 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \quad \text{avec} \quad \underline{k}^2 = -i \frac{\omega}{a} = \frac{\omega}{a} e^{-i\pi/2}.$$

On en déduit

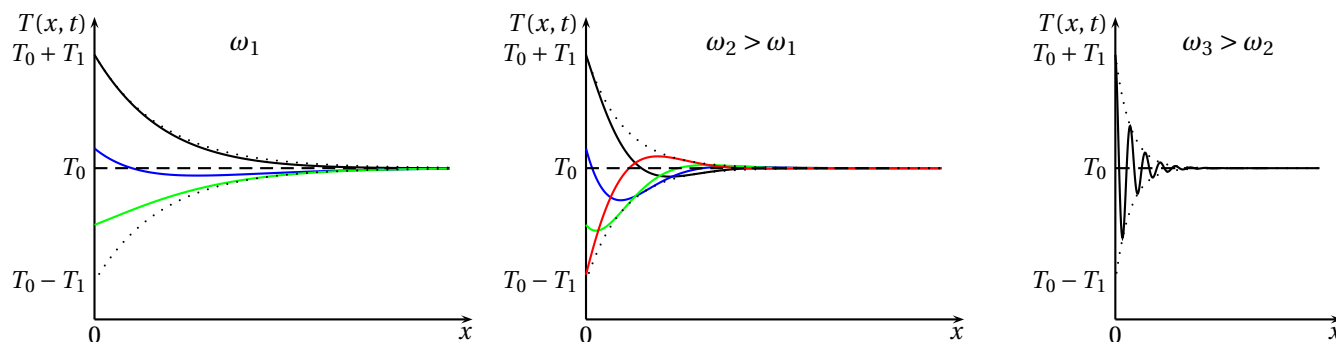
$$\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2a}} (1 - i) = \pm \frac{1 - i}{\delta} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}.$$

On ne conserve que la solution $\underline{k} = -\frac{1 - i}{\delta}$, l'autre solution donnant une température qui diverge quand $x \rightarrow +\infty$. La température dans le milieu apparaît comme une onde atténuée :

$$T(x, t) = T_0 + \underbrace{T_1 e^{-x/\delta}}_{\text{amplitude atténuée}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}_{\text{onde progressive}} = T_0 + T_1 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega \left[t - \frac{x}{v}\right]\right).$$

► L'amplitude est atténuée sur une distance caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$.

- Quand ω devient élevée, l'onde de température ne prend de valeur notable que sur une distance δ petite, appelée **épaisseur de peau** : c'est l'**effet de peau**.
- La propagation de l'onde de température se fait avec une célérité³ $v = \delta\omega = \sqrt{2a\omega}$: elle dépend de ω , le phénomène est **dispersif**.



Analogies : diffusion thermique, diffusion particulaire et conduction électrique

Conduction électrique	Diffusion thermique	Diffusion particulaire
transfert de charges (q)	transfert thermique (Q)	transfert de particules (N)
vecteur densité de courant $\vec{j}$	$\vec{j}_Q$	$\vec{j}_n$
intensité électrique $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{\delta q}{dt}$	flux thermique $\Phi = \iint \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = \frac{\delta Q}{dt}$	flux particulaire $\Phi = \iint \vec{j}_n \cdot d\vec{S} = \frac{\delta n}{dt}$
loi d'Ohm $\vec{j} = -\gamma \text{grad } V$	loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad } T$	loi de Fick $\vec{j}_n = -D \text{grad } n$
conductivité électrique γ	conductivité thermique λ	diffusivité D
potentiel électrique V	température T	densité particulaire n
résistance électrique R $V_1 - V_2 = RI$ $R = \frac{L}{\gamma S}$	résistance thermique R_{th} $T_1 - T_2 = R_{th} \Phi$ $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$	

Mais qui était-il ?



Joseph Fourier (Auxerre 1768 - Paris 1830).

Mathématicien et physicien français.

Il entre à l'ENS en 1794, où il suit les cours de Lagrange, Laplace et Monge. Après trois années en Egypte (expéditions napoléoniennes), il est nommé préfet de l'Isère en 1802. Il est nommé à l'Académie des sciences en 1817, dont il devient secrétaire perpétuel en 1822.

Son travail le plus important porte sur l'étude de la propagation de la chaleur dans un solide. Son œuvre majeure, *Théorie analytique de la chaleur* est publiée en 1822. Il montre l'importance des conditions aux limites pour la résolution des équations aux dérivées partielles, dont il cherche une solution sous forme d'une série trigonométrique. Il montre alors que toute fonction qui possède une surface sous son graphe (« intégrable ») peut être représentée comme une *série de Fourier*.

On lui doit le symbole de l'intégration $\int_a^b$.

Le symbole de la sommation $\sum$ est dû à Leibniz ; c'est un « s long », initiale de *summa* (somme en latin).

c'est ainsi que l'on écrivait somme !

3. Appelée aussi **vitesse de phase**.