

TD phénomènes de transport

Diffusion thermique

1 — Métabolisme d'un mammifère

1. On considère la sphère de rayon $r > R$. Le bilan thermique s'écrit, en régime stationnaire pour une durée dt :

$$0 = \delta Q_{\text{reçu}} + \mathcal{P}_{\text{prod}} dt,$$

où \mathcal{P} est la puissance totale créée dans l'animal par son métabolisme.

La sphère, surface fermée, est conventionnellement orientée vers l'extérieur; en notant $\Phi(r)$ le flux thermique sortant, le bilan s'écrit

$$0 = -\Phi(r) dt + \mathcal{P}_{\text{prod}} dt.$$

On en déduit :

$$\Phi(x) = \Phi_0 = \mathcal{P}_{\text{prod}}.$$

Le flux thermique à travers une sphère est indépendant de son rayon, et est égal à la puissance thermique produite à l'intérieur de la sphère, qui est intégralement évacuée par transfert thermique à travers sa surface.

2. Le problème étant à symétrie sphérique, le flux thermique sortant s'écrit

$$\Phi_0 = \iint_{M \in \Sigma} \vec{j}_Q(M) \cdot d\vec{S}_M = 4\pi r^2 j_Q(r).$$

La puissance totale produite dans la sphère de rayon R est

$$\mathcal{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 p_v.$$

Le bilan $\Phi_0 = \mathcal{P}$ conduit donc à

$$j_Q(r) = \frac{p_v R^3}{3r^2} = -\lambda \frac{dT(r)}{dr}$$

en utilisant la loi de Fourier. On a donc, la température loin de l'animal ($r \rightarrow \infty$) valant T_0 :

$$\int_{T(r)}^{T_0} dT = -\frac{p_v R^3}{3\lambda} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{p_v R^3}{3\lambda} \left[\frac{1}{r'} \right]_r^\infty = \frac{p_v R^3}{3\lambda r}$$

d'où

$$T(r) = T_0 + \frac{p_v R^3}{3\lambda r}.$$

On remarque que $T(r) > T_0$ comme attendu : le métabolisme de l'animal réchauffe son corps.

3. En considérant un contact parfait, la température est continue à la surface de l'animal; sa température cutanée vaut donc $T_c = T(R)$, soit

$$T_c = T_0 + \frac{p_v R^2}{3\lambda}.$$

Quand R est fixée, T_c diminue quand λ augmente : le milieu est meilleur conducteur de la chaleur et évacue mieux la puissance thermique produite par l'animal qui est plus refroidi.

Quand λ est fixé, T_c augmente, de façon affine, quand R augmente. Une augmentation de R augmente le flux thermique évacué selon R^2 (proportionnel à la surface de l'animal), mais la puissance totale produite est proportionnelle au volume de l'animal donc à R^3 . On a donc

$$\frac{\text{puissance produite}}{\text{puissance évacuée}} \propto R.$$

4. Le métabolisme volumique est donné par

$$p_v = \frac{3\lambda}{R^2} (T_c - T_0),$$

soit $p_{v,\text{air}} = 2,4 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$ et $p_{v,\text{eau}} = 240 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$.

Comme $\lambda_{\text{eau}} = 100\lambda_{\text{air}}$, on a $p_{v,\text{eau}} = 100p_{v,\text{air}}$ pour une même taille R de l'animal.

De plus $p_v \propto \frac{1}{R^2}$: pour un animal 10 fois plus petit, le métabolisme volumique nécessaire doit être 100 fois plus important.

Dans l'eau, où la conductivité est plus importante, le métabolisme serait trop important pour un mammifère de petite dimension. Le plus petit mammifère marin est d'ailleurs le béé phoque, dont environ la moitié de la masse corporelle est constituée de graisse isolante!

2 — Modèle d'un fusible

1. On considère la tranche de fusible comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En régime stationnaire, le bilan d'énergie interne s'écrit

$$0 = \delta^2 Q_{\text{reçu}} + \delta \mathcal{P}_{\text{prod}} dt.$$

Le transfert thermique reçu pendant dt vaut

$$\delta^2 Q_{\text{reçu}} = [j_Q(x) - j_Q(x + dx)] S dt = -\frac{dj_Q(x)}{dx} S dx dt$$

soit avec la loi de Fourier

$$\delta^2 Q_{\text{reçu}} = \lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} S dx dt.$$

Le tronçon de longueur dx a pour résistance électrique

$$\delta R = \frac{dx}{\gamma S}.$$

La puissance dissipée par effet Joule y est alors donnée par

$$\delta \mathcal{P}_{\text{prod}} = \delta R I^2 = \frac{dx}{\gamma S} I^2.$$

Le bilan d'énergie s'écrit alors

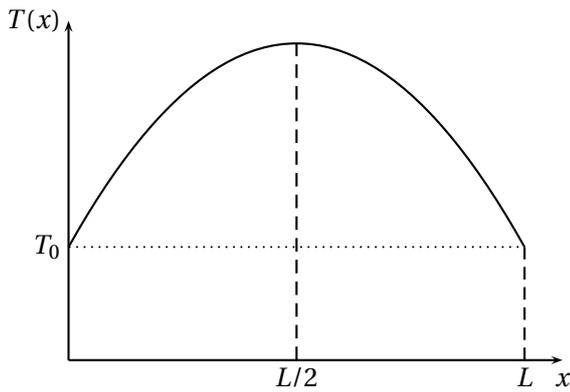
$$0 = \lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} S dx dt + \frac{dx}{\gamma S} I^2 dt,$$

soit

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2}{\lambda \gamma S^2} = 0.$$

Avec la condition $T(0) = T(L) = T_0$, la solution s'écrit

$$T(x) = T_0 + \frac{I^2}{2\lambda\gamma S^2} x(L-x).$$



2. La température est maximale au milieu du fusible, en $x = L/2$. En cas de dépassement de I_{\max} , la rupture se produit donc en $x = L/2$.

On a alors

$$T_F = T_0 + \frac{I_{\max}^2 L^2}{8\lambda\gamma S^2}$$

d'où

$$S = \frac{I_{\max} L}{2\sqrt{2\lambda\gamma(T_F - T_0)}}.$$

Pour $I_{\max} = 16 \text{ A}$, on calcule

$$S_{16} = \frac{16 \times 2,5 \times 10^{-2}}{2\sqrt{2 \times 1,2 \times 10^6 \times 65 \times (390 - 290)}} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

soit $S_{16} = 1,6 \text{ mm}^2$, ordre de grandeur tout à fait réaliste.

3. La température est maximale au milieu du fusible, en $x = L/2$. En cas de dépassement de I_{\max} , la rupture se produit donc en $x = L/2$.

On a alors

$$T_F = T_0 + \frac{I_{\max}^2 L^2}{8\lambda\gamma S^2}$$

d'où

$$S = \frac{I_{\max} L}{2\sqrt{2\lambda\gamma(T_F - T_0)}}.$$

Pour $I_{\max} = 16 \text{ A}$, on calcule

$$S_{16} = \frac{16 \times 2,5 \times 10^{-2}}{2\sqrt{2 \times 1,2 \times 10^6 \times 65 \times (390 - 290)}} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

soit $S_{16} = 1,6 \text{ mm}^2$, ordre de grandeur tout à fait réaliste.

4. Le vecteur densité de flux thermique est donné par

$$j_Q(x) = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} = -\frac{I^2}{2\gamma S^2} (L - 2x).$$

La puissance reçue par conduction en $x = 0$ (donc transférée dans le sens $+\vec{e}_x$) vaut

$$\mathcal{P}_{\text{th}}(0) = j_Q(0)S = -\frac{I^2 L}{2\gamma S}.$$

On a $\mathcal{P}_{\text{th}}(0) < 0$: la puissance est évacuée vers l'extérieur. On calcule $|\mathcal{P}_{\text{th}}| = 0,65 \text{ W}$.

La puissance reçue par conduction en $x = L$ (donc transférée dans le sens $-\vec{e}_x$) vaut

$$\mathcal{P}_{\text{th}}(L) = -j_Q(L)S = -\frac{I^2 L}{2\gamma S}.$$

Le problème étant invariant par symétrie par rapport au milieu $x = L/2$ du fusible, on a comme attendu $\mathcal{P}_{\text{th}}(0) = \mathcal{P}_{\text{th}}(L)$.

La puissance électrique produite par effet Joule dans la tranche $[x, x + dx]$ s'écrit

$$\delta \mathcal{P}_e = \delta R I^2 = \frac{I^2}{\gamma S} dx.$$

La puissance électrique fournie à l'ensemble du fil s'écrit alors

$$\mathcal{P}_e = \frac{I^2 L}{\gamma S}.$$

Ce résultat était prévisible.

Le bilan d'énergie pour tout le fusible s'écrit

$$0 = \delta Q_{\text{reçu}} + \mathcal{P}_e dt$$

avec $\delta Q_{\text{reçu}} = [\mathcal{P}_{\text{th}}(0) + \mathcal{P}_{\text{th}}(L)] dt$, d'où

$$\mathcal{P}_{\text{th}}(0) + \mathcal{P}_{\text{th}}(L) + \mathcal{P}_e = 0.$$

3 — Production d'entropie

1. En régime stationnaire, l'entropie de l'élément de longueur dx ne varie pas dans le temps. Sa variation pendant dt est donc nulle et le bilan d'entropie s'écrit

$$0 = \delta^2 S_{\text{reçu}} + \delta^2 S_{\text{créé}}.$$

L'élément reçoit en x le transfert thermique

$$\delta Q(x) = j_Q(x) A dt$$

à travers sa frontière à la température $T(x)$; l'entropie reçue en x vaut donc

$$\delta S_{\text{reçu},x} = \frac{\delta Q(x)}{T(x)} = \frac{j_Q(x)}{T(x)} A dt.$$

L'élément reçoit en $x + dx$ le transfert thermique

$$\delta Q(x + dx) = -j_Q(x + dx) A dt$$

à travers sa frontière à la température $T(x + dx)$; l'entropie reçue en $x + dx$ vaut donc

$$\delta S_{\text{reçu},x+dx} = \frac{\delta Q(x + dx)}{T(x + dx)} = -\frac{j_Q(x + dx)}{T(x + dx)} A dt.$$

L'entropie totale reçue s'écrit alors

$$\begin{aligned} \delta^2 S_{\text{reçu}} &= \delta S_{\text{reçu},x+dx} + \delta S_{\text{reçu},x} \\ &= -\left[\frac{j_Q(x + dx)}{T(x + dx)} - \frac{j_Q(x)}{T(x)} \right] A dt \\ &= -\frac{d}{dx} \left[\frac{j_Q(x)}{T(x)} \right] A dx dt. \end{aligned}$$

En régime stationnaire, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{dj_Q(x)}{dx} = 0.$$

Le flux thermique est alors indépendant de x , soit $j_Q(x) = j_Q$. On a alors

$$\begin{aligned} \delta^2 S_{\text{reçu}} &= -A j_Q \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{T(x)} \right] dx dt \\ &= j_Q \frac{1}{T^2(x)} \frac{dT(x)}{dx} A dx dt \end{aligned}$$

Avec la loi de Fourier, $j_Q = -\lambda \frac{dT(x)}{dx}$ et

$$\delta^2 S_{\text{reçu}} = -\frac{\lambda}{T^2(x)} \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)^2 A dx dt.$$

2. Le terme de production d'entropie s'écrivant $\delta^2 S_{\text{créé}} = \sigma_S A dx dt$, le bilan d'entropie conduit à

$$\sigma_S(x) = \frac{\lambda}{T^2(x)} \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)^2.$$

1. L'igloo étant hémisphérique, on prend la moitié de la surface d'une sphère.

On a bien $\sigma_S(x) > 0$, ce qui traduit le caractère irréversible du transfert thermique.

Nous en en présence d'un **état stationnaire hors d'équilibre** : les grandeurs intensives ne dépendent pas du temps, mais ce n'est pas un état d'équilibre car elle ne sont pas uniforme : il y a un gradient de température, donc un flux thermique dont le sens s'inverserait si on « passait le film à l'envers ».

Le gradient de température est uniforme en régime stationnaire :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}.$$

Le taux de production d'entropie est donc maximal à l'extrémité où la température est la plus basse, c'est-à-dire en $x = 0$; on a

$$\sigma_{S,\text{max}} = \frac{\lambda(T_2 - T_1)^2}{L^2 T_1^2}.$$

On calcule $\sigma_{S,\text{max}} = 1,78 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$.

4 — Chauffage d'un igloo

1. Question de cours, la conduction thermique étant supposée unidimensionnelle en cartésiennes si on néglige la courbure des parois. La résistance thermique est $R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$.

2. La puissance dégagée par l'inuit est

$$P = \frac{0,5 \times 10^6}{3600} = 1,4 \times 10^2 \text{ W} = 0,14 \text{ kW}.$$

3. Le flux thermique sortant est donné par

$$\Phi = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{e} (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}).$$

La température de l'igloo reste constante si $\Phi = P$, soit pour une épaisseur

$$e = \frac{\lambda S}{P} (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}).$$

On calcule $e = 43 \text{ cm}$.

4. On se place en coordonnées sphériques, en considérant $T(r)$ et $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r) \vec{e}_r$. En régime stationnaire, le flux est indépendant de r , soit $\Phi(r) = \Phi_0 = j_{\text{th}}(r) 2\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r^2$. On a donc

$$dT = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \frac{dr}{r^2}.$$

On en déduit

$$T(R_{\text{ext}}) - T(R_{\text{int}}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_{\text{ext}}} - \frac{1}{R_{\text{int}}} \right) = \Phi_0 \frac{R_{\text{int}} - R_{\text{ext}}}{2\pi\lambda R_{\text{int}} R_{\text{ext}}}.$$

La résistance donnée par $T(R_{\text{int}}) - T(R_{\text{ext}}) = R_{\text{th}}\Phi_0$ s'écrit alors

$$R_{\text{th}} = \frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}}{2\pi\lambda R_{\text{int}}R_{\text{ext}}}.$$

Dans le cas où $R_{\text{ext}} = R_{\text{int}} + e$ avec $e \ll R_{\text{int}}$, on a

$$R_{\text{th}} \approx \frac{e}{2\pi R_{\text{int}}^2 \lambda} = \frac{e}{\lambda S}$$

où $S = 2\pi R_{\text{int}}^2$ est la surface de l'igloo. On retrouve l'expression d'un mur plan, ce qui revient à négliger la courbure de la paroi.

5 — Banc de Kofler

1. On considère comme système la tranche comprise entre x et $x + dx$. On effectue un bilan d'enthalpie pendant dt en régime stationnaire :

$$0 = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt - h(T(x) - T_a) a dx dt,$$

le transfert entre le banc et l'air se faisant à travers la surface $dS = (a + 2b) dx \approx a dx$ car $b \ll a$.

On a donc

$$0 = -\frac{d\Phi}{dx} dx dt - h(T(x) - T_a) a dx dt$$

soit comme $\Phi(x) = abj_{\text{th}}(x)$

$$0 = -\frac{dj_{\text{th}}(x)}{dx} ab - h(T(x) - T_a) a.$$

Avec la loi de Fourier on obtient

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} b - h(T(x) - T_a),$$

soit

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h}{\lambda b} (T(x) - T_a) = 0.$$

En posant $\theta(x) = T(x) - T_a$ et $\delta = \sqrt{\frac{\lambda b}{h}}$, on a

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{\theta(x)}{\delta^2} = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$\theta(x) = B e^{-x/\delta} + C e^{x/\delta},$$

d'où le profil de température

$$T(x) = T_a + B e^{-x/\delta} + C e^{x/\delta}.$$

2. La distance δ caractérise la variation de la température dans la barre. On peut considérer cette dernière infinie si $L \gg \delta$ (dans la pratique si $L > 5\delta$ l'approximation est valide).

La température ne pouvant diverger, on doit alors avoir $C = 0$, soit

$$T(x) = T_a + B e^{-x/\delta}.$$

On ne connaît pas la température en $x = 0$, mais on connaît la puissance reçue : c'est la puissance dissipée par la résistance R alimentée sous une tension efficace U , donnée par

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Par continuité du flux thermique en $x = 0$ à travers la section ab , on peut écrire

$$P = \Phi(x=0) = -\lambda ab \frac{dj_{\text{th}}}{dx}(x=0) = \lambda ab \frac{B}{\delta},$$

d'où

$$B = \frac{U^2 \delta}{\lambda ab R}.$$

3. Dans le banc de longueur L , le temps caractéristique des variations de températures est $\tau^* = \frac{\rho c}{\lambda} L^2$. On peut considérer que la température dans le banc ne dépend pas de la température si, du fait de son inertie thermique, il n'a « pas le temps » de suivre les variations de températures de la résistances, qui se font avec la période $1/f$ où $f = 50$ Hz. Il faut donc

$$\frac{\lambda}{\rho c L^2} \ll f.$$

En considérant un banc en aluminium, on a $\rho = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c = 897 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\lambda = 237 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; avec $L = 0,4 \text{ m}$ on obtient $f \gg 6 \times 10^{-4} \text{ Hz}$, ce qui est largement vérifié avec $f = 50 \text{ Hz}$.

4. La température dépend de l'abscisse x sur la barre. Les cristaux restant solides jusqu'à une abscisse x_f , on en déduit la température de fusion

$$T_{\text{fus}} = T_a + \frac{U^2 \delta}{\lambda ab R} e^{-x_f/\delta}.$$

Cette température dépendant de la température extérieure T_a et du coefficient d'échange h , il est nécessaire d'étalonner le banc avant chaque utilisation.

La température de fusion maximale détectable est

$$T_{\text{fus,max}} = T_a + \frac{U^2 \delta}{\lambda ab R}.$$

La valeur de R permet de choisir la valeur de la température maximale de fusion détectable.

5. On a

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{U^2}{\lambda ab R} e^{-x/\delta}.$$

Une incertitude Δx sur la lecture de la position se traduit par une incertitude sur la température

$$\Delta T = \frac{U^2}{\lambda ab R} e^{-x/\delta} \Delta x$$

soit

$$\Delta T = \frac{T_{\text{fus}} - T_a}{\delta} \Delta x.$$

L'incertitude augmente quand T_{fus} augmente.

6 — Conduction thermique

1. Bilan classique en régime stationnaire :

$$0 = \Phi(x) - \Phi(x + dx) - h[T(x) - T_a]2\pi R dx,$$

avec $\Phi(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi R^2$, d'où

$$0 = \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} [T(x) - T_a].$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$ à partir de l'équation différentielle.

Le candidat pourra poser $\theta(x) = T(x) - T_a$ pour se ramener à une équation différentielle homogène.

La solution générale est

$$T(x) = T_a + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}.$$

2. La température est imposée à l'extrémité $x = 0$, soit $T(0) = T_0 = T_a + A + B$.

Le flux thermique est continu à l'extrémité $x = L$, soit

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_L = h [T(L) - T_a],$$

qui donne

$$\frac{\lambda}{\delta} [A e^{-L/\delta} - B e^{L/\delta}] = h [T_a + A e^{-L/\delta} + B e^{L/\delta}].$$

3. Cette hypothèse revient à dire $L \gg \delta$. On obtient $T(x) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-x/\delta}$.

4. La température diminuant le long de la tige, la paraffine est évidemment fondue entre $x = 0$ et x_f !

L'abscisse de fusion est donnée par

$$T(x_f) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-x_f/\delta} = T_f,$$

d'où

$$x_f = \delta \ln \left(\frac{T_0 - T_a}{T_f - T_a} \right).$$

Pour les deux tiges, on a donc $\frac{x_1}{\delta_1} = \frac{x_2}{\delta_2}$, soit $\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} =$

$$\frac{x_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \text{ d'où } \lambda_2 = \lambda_1 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 = 65,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

5. Le ventilateur augmente le flux conducto-convectif (sa partie convective), donc h , donc δ diminue; les abscisses de fusions sont donc plus petites.

7 — Oscillations thermiques

1. Question de cours :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ avec } a = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

2. On remplace l'expression $T(x, t)$ proposée dans l'équation aux dérivées partielles précédente :

$$i\omega \underline{\theta} = a \frac{d^2 \underline{\theta}(x)}{dx^2}$$

soit

$$\frac{d^2 \underline{\theta}(x)}{dx^2} = \frac{i\omega}{a} \underline{\theta}(x) = \frac{\omega}{a} e^{i\pi/2} \underline{\theta}(x) = \underline{k}^2 \underline{\theta}(x)$$

avec

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega}{a}} e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} (1 + i).$$

La solution générale est de la forme

$$\underline{\theta}(x) = \underline{A} e^{kx} + \underline{B} e^{-kx}.$$

On peut introduire une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}},$$

d'où

$$\underline{\theta}(x) = \underline{A} e^{\frac{(1+i)x}{\delta}} + \underline{B} e^{-\frac{(1+i)x}{\delta}}.$$

On en déduit

$$\underline{T}(x, t) = \underline{A} e^{\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t} + \underline{B} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t} + Cx + D.$$

La température ne pouvant diverger quand $x \rightarrow +\infty$, on a nécessairement $\underline{A} = 0$ et $C = 0$, d'où

$$\underline{T}(x, t) = \underline{B} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} + D.$$

En $x = 0$, on impose

$$\underline{T}(0, t) = T_a + \theta_0 e^{i\omega t} = \underline{B} e^{i\omega t} + D,$$

d'où $\underline{B} = \theta_0$ et $D = T_a$. Finalement

$$\underline{T}(x, t) = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} + T_a.$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$T(x, t) = T_a + \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right).$$

On observe une onde de température :

— son amplitude décroît exponentiellement sur une distance caractéristique δ d'autant plus courte que la pulsation est élevée;

— les variations à une distance x de la surface présentent un déphasage x/δ avec la variation à la surface, qui augmente avec x .

3. On a $\omega = 2\pi/T$ où $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ pour la période jour-nuit. L'épaisseur caractéristique est donnée par

$$\delta = \sqrt{\frac{aT}{\pi}} = 14 \text{ cm}.$$

Cette épaisseur est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un mur. Les fluctuations journalières de température sont atténuées mais pas négligeables de l'ordre côté d'un mur de faible épaisseur.

4. On cherche l'épaisseur L telle que

$$e^{-\frac{L}{\delta}} = \frac{1}{10}$$

soit $L = \delta \ln(10)$. On calcule $L = 32 \text{ cm}$.

8 — Diffusion thermique dans une barre

1. Les sources sont idéales.

1.a) On a donc $C_1 \rightarrow \infty$ et $C_2 \rightarrow \infty$. En effet, la variation de température d'une source dont l'énergie varie de ΔU est $\Delta T = \frac{\Delta U}{C}$; une source idéale est caractérisée par $\Delta T = 0$.

1.b) En régime permanent, un bilan d'énergie sur une tranche $[x, x + dx]$ s'écrit

$$0 = [j(x) - j(x + dx)] S dt$$

d'où

$$\frac{dj}{dx} = 0 = -\lambda \frac{d^2 T}{dx^2}.$$

On a donc $\frac{d^2 T}{dx^2}$ et

$$T(x) = T_1 + \frac{x}{L}(T_2 - T_1).$$

2. Régime quasi-stationnaire avec sources réelles.

2.a) Le régime quasi-stationnaire suppose que les températures des sources varient suffisamment lentement pour que l'on puisse considérer que le régime stationnaire de diffusion thermique est réalisé à chaque instant dans la barre; on peut alors écrire

$$T(x, t) = T_1 + \frac{x}{L}[T_2(t) - T_1(t)].$$

On a bien un profil affine, caractéristique du régime stationnaire... mais dont la pente varie lentement au cours du temps.

2.b) Effectuons un bilan d'énergie pour la source 1 pendant dt . Sa température varie de dT_1 avec

$$C_1 dT_1 = -\Phi(0) dt = -j(0) S dt.$$

Le courant thermique est donné par

$$j(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{L}[T_1(t) - T_2(t)].$$

On a donc

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = -\frac{\lambda S}{L}[T_1(t) - T_2(t)].$$

Le bilan d'énergie pour la source 2 s'écrit de même

$$C_2 dT_2 = +\phi(L) dt.$$

Comme le flux est uniforme dans la barre, on a

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{\lambda S}{L}[T_1(t) - T_2(t)].$$

On peut poser deux temps caractéristiques

$$\tau_1 = \frac{C_1 L}{\lambda S} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{C_2 L}{\lambda S}.$$

Les températures des sources vérifient le système

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{dT_1}{dt} = -T_1(t) + T_2(t) \\ \tau_2 \frac{dT_2}{dt} = T_1(t) - T_2(t) \end{cases}$$

► Vérifions la pertinence :

- si $T_1(t) = T_2(t)$, les températures restent constantes comme attendu;
- si $T_1(t) > T_2(t)$, $T_1(t)$ diminue et $T_2(t)$ augmente comme attendu.

On a

$$\frac{d\tau_1 T_1(t) + \tau_2 T_2(t)}{dt} = 0$$

d'où compte tenu des conditions initiales

$$\tau_1 T_1(t) + \tau_2 T_2(t) = \tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ,$$

en notant T_1° et T_2° les températures initiales des deux sources.

On a donc

$$T_2(t) = \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_2} - \frac{\tau_1}{\tau_2} T_1(t)$$

qui donne avec la première équation

$$\tau_1 \frac{dT_1}{dt} = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2} T_1(t) + \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_2}$$

soit

$$\frac{dT_1}{dt} + \frac{T_1(t)}{\tau} = \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_1 \tau_2}$$

en posant

$$\tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

La solution générale s'écrit

$$T_1(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_1 + \tau_2}.$$

La condition initiale donne

$$T_1^\circ = A + \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_1 + \tau_2}$$

d'où

$$A = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (T_1^\circ - T_2^\circ).$$

On a donc

$$T_1(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (T_1^\circ - T_2^\circ) e^{-t/\tau} + \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_1 + \tau_2}.$$

La solution pour $T_2(t)$ s'obtient directement par permutation des indices 1 et 2.

On montrerait que $T_2(t)$ vérifie la même équation différentielle que $T_1(t)$, dont la solution générale est de la forme

$$T_2(t) = B e^{-t/\tau} + \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_1 + \tau_2}.$$

La condition $T_2(t) = T_2^\circ$ permet de déterminer B , et on trouve

$$T_2(t) = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} (T_2^\circ - T_1^\circ) e^{-t/\tau} + \frac{\tau_1 T_1^\circ + \tau_2 T_2^\circ}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Compte tenu des expressions de τ_1 et τ_2 , on a

$$T_1(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (T_1^\circ - T_2^\circ) e^{-t/\tau} + \frac{C_1 T_1^\circ + C_2 T_2^\circ}{C_1 + C_2}.$$

et

$$T_2(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (T_2^\circ - T_1^\circ) e^{-t/\tau} + \frac{C_1 T_1^\circ + C_2 T_2^\circ}{C_1 + C_2},$$

avec

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

- Les deux sources tendent vers la même température finale

$$T_f = \frac{C_1 T_1^\circ + C_2 T_2^\circ}{C_1 + C_2},$$

qui ne dépend de des capacités thermiques des sources et des températures initiales.

- Cette évolution se fait avec un temps caractéristique τ ; elle est d'autant plus rapide que λ est grand (barre bonne conductrice thermique), que S est grand ou que L est petit, c'est-à-dire en fait que la résistance thermique de la barre est faible.
- Le temps caractéristique de la diffusion thermique dans la barre est

$$T^* \approx \frac{\rho c}{\lambda} L^2$$

où c est la capacité thermique massique de la barre. L'hypothèse du régime quasi-stationnaire est valide si $T^* \ll \tau$. Plaçons-nous dans le cas où $C_1 = C_2$; on a alors $C = \frac{C_1}{2}$ et l'hypothèse s'écrit²

$$\frac{\rho c}{\lambda} L^2 \ll \frac{CL}{\lambda S},$$

soit

$$C \gg \rho c S L.$$

La capacité thermique des sources doit être très grande devant celle de la barre (le volume de cette dernière étant SL , le terme $\rho c S L$ représente sa capacité calorifique).

2. On ne reporte pas le coefficient 1/2 en ordre de grandeur.

9 — Isolation d'une canalisation

1. Définition générale $T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2}$.

2. On a $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ et $\Phi(r) = 2\pi r L j_{th}$, soit

$$\Phi(r) = -2\pi \lambda L r \frac{dT}{dr}.$$

L'équation de la chaleur en régime stationnaire s'écrit $\Delta T = 0$, soit $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$. Compte tenu de l'expression du flux, on en déduit $\frac{d\Phi}{dr} = 0$: il est indépendant de r , soit $\Phi(r) = \Phi$.

D'après l'expression de Φ établie à la question précédente, on a

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\Phi}{2\pi \lambda L} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

soit

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On a donc $R_{th} = \frac{1}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

3. La résistance thermique étant définie par $\Phi = R_{conv}(T_s - T_e)$; on obtient

$$R_{conv} = \frac{1}{hS}.$$

4. Les résistances thermiques étant associées en série, on a

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi h_1 a L} + \frac{1}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2\pi h_2 b L}.$$

5. On ajoute la résistance thermique de l'isolant. Comme le transfert convectif se fait à la surface de l'isolant, on obtient

$$R'_{th} = \frac{1}{2\pi h_1 a L} + \frac{1}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2\pi \lambda_{iso} L} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{1}{2\pi h_2 r L}$$

On calcule

$$\frac{dR'_{th}}{dr} = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{1}{\lambda_{iso} r} - \frac{1}{h_2 r^2} \right) = \frac{1}{2\pi L \lambda_{iso} r} \left(1 - \frac{r_c}{r} \right)$$

avec $r_c = \frac{\lambda_{iso}}{h_2}$.

Comme $\frac{dR'_{th}}{dr} < 0$ pour $r < r_c$ et $\frac{dR'_{th}}{dr} > 0$ pour $r > r_c$, la résistance thermique est **minimale** pour $r = r_c$. C'est possible si $r_c > R_2$.

6. On a

$$2\pi L(R'_{th} - R_{th}) = \frac{1}{\lambda_{iso}} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{1}{h_2 r} - \frac{1}{h_2 b} = f(r),$$

d'où

$$f'(r) = \frac{1}{\lambda_{iso} r} - \frac{1}{h_2 r^2} = \frac{1}{\lambda_{iso} r} \left[1 - \frac{r_c}{r}\right].$$

On a bien sûr $f(r = b) = 0$: on retrouve la situation sans isolant. Comme $f'(r) < 0$ pour $r < r_c$, $f(r) < 0$ (la fonction décroît à partir de 0) : la résistance thermique de l'ensemble est plus faible que sans l'isolant. L'ajout de l'isolant se traduit, tant que son épaisseur est « faible », par une augmentation du flux thermique ! On voit le paradoxe, qui s'explique par une augmentation du flux convectif du fait de l'augmentation de la surface d'échange.

10 — Barre parcourue par un courant

1. Le bilan d'énergie appliqué à la tranche $[x, x + dx]$ en régime stationnaire s'écrit

$$0 = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt = -\frac{d\Phi}{dx} dx dt,$$

d'où $\Phi(x) = \Phi_0$ uniforme. Comme $\Phi = j_Q(x)S$, j_Q est uniforme, et d'après la loi de Fourier on a donc

$$\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{T(L) - T(0)}{L} = \frac{T_2 - T_1}{L},$$

d'où

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1.$$

La puissance fournie par la source en $x = L$ est donnée par le flux thermique en $x = L$ (qui a la même valeur pour tout x d'ailleurs), soit

$$P_2 = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

d'où

$$P_2 = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2).$$

2. Il faut ajouter un bilan d'énergie l'énergie créée dans la tranche $[x, x + dx]$ pendant dt par effet Joule :

$$\mathcal{P}_{\text{prod}} dt = \frac{\rho dx}{S} I^2 dt.$$

Le bilan d'énergie s'écrit alors

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} S dx dt + \frac{\rho dx}{S} I^2 dt,$$

d'où

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\rho I^2}{\lambda S}.$$

On en déduit

$$T(x) = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S} x^2 + Ax + B.$$

On a d'une part

$$T(0) = T_1 = B$$

et d'autre part

$$T(L) = T_2 = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S} L^2 + AL + T_1$$

d'où

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\rho I^2}{2\lambda S} L.$$

On a donc

$$T(x) = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S} x^2 + \frac{T_2 - T_1}{L} x + \frac{\rho I^2}{2\lambda S} Lx + T_1,$$

soit

$$T(x) = \frac{\rho I^2}{2\lambda S} x(L - x) + \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1.$$

La puissance à l'abscisse x est donnée par

$$P(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \rho I^2 x - \frac{\rho I^2}{2} L + \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$$

soit

$$P(x) = \rho I^2 \left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2).$$

3. La puissance cédée à l'extrémité $x = L$ vaut alors

$$P_2 = \frac{\rho I^2 L}{2} + \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2).$$

Le premier terme correspond à la puissance évacuée due à l'effet Joule, le second terme à la puissance due à la différence de température entre les extrémités de la barre.

4. En $x = 0$, on obtient

$$P_1 = -\frac{\rho I^2 L}{2} + \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2).$$

Le terme dû à la différence de température est inchangé (le flux correspondant est uniforme) ; le terme dû à l'effet Joule est changé de signe : cette puissance est ici aussi évacuée de la barre.

5. La température va évoluer de façon irréversible vers un état d'équilibre caractérisé par une température uniforme T_f dans la barre.

Considérons une tranche $[x, x + dx]$ de la barre ; un bilan d'énergie entre l'état initial où l'on isole la barre et l'état final d'équilibre s'écrit :

$$dU = \rho c S dx [T_f - T(x)].$$

L'énergie interne étant une grandeur extensive, la variation d'énergie interne entre ces deux états pour la

totalité de la barre s'obtient en sommant le terme précédent sur la totalité de la barre, soit :

$$\Delta U = \int_0^L \rho c S [T_f - T(x)] dx.$$

La barre étant calorifugée, le premier principe conduit à $\Delta U = 0$, d'où après simplification

$$\int_0^L [T_f - T(x)] dx = 0 = LT_f - \int_0^L T(x) dx$$

La température finale est donc donnée par

$$T_f = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx.$$

► On remarque que c'est l'expression de la valeur moyenne de la température $T(x)$ sur la barre à l'instant initial.

On calcule

$$T_f = \frac{\rho I^2}{2\lambda S} \left(\frac{L^3}{2L} - \frac{L^3}{3L} \right) + \frac{T_2 - T_1}{L} \frac{L^2}{2L} + T_1$$

soit

$$T_f = \frac{\rho L^2 I^2}{12\lambda S} + \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

11 — Ailette de refroidissement

1. Nous allons chercher la puissance évacuée par une ailette. On effectue un bilan d'énergie pendant dt sur la tranche comprise entre x et $s + dx$ en régime stationnaire :

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt - \delta \Phi_{lat} dt \\ &= -\frac{d\Phi}{dx} dx dt - h[T(x) - \theta_e] 2\pi R dx dt \\ &= \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} \pi R^2 dx dt - h[T(x) - \theta_e] 2\pi R dx dt. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} [T(x) - \theta_e] = 0.$$

En posant la distance caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}},$$

la solution générale de l'équation différentielle est

$$T(x) = \theta_e + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}.$$

Nous allons faire l'hypothèse que le modèle de l'ailette infinie peut s'appliquer (on discutera de cette hypothèse *a posteriori*). On doit alors avoir $B = 0$, et la condition à la limite $T(0) = \theta_0$ permet d'écrire

$$T(x) = \theta_e + (\theta_0 - \theta_e) e^{-x/\delta}.$$

La puissance totale évacuée par l'ailette est donnée par le flux thermique à travers sa section en contact avec le moteur :

$$\Phi_1 = \Phi(0) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x=0) \pi R^2.$$

► Pour s'en convaincre, effectuons un bilan d'énergie en considérant comme système la totalité de l'ailette. En régime stationnaire, on peut écrire en notant $\Phi_{tot} > 0$ le flux total sortant de l'ailette (à travers sa face latérale et son extrémité)

$$0 = +\Phi(x=0) dt - \Phi_{tot} dt$$

$$d'où \Phi_{tot} = \Phi(x=0).$$

On calcule

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\theta_0 - \theta_e}{\delta} e^{-x/\delta},$$

d'où

$$\Phi_1 = \frac{\lambda(\theta_0 - \theta_e)}{\delta} \pi R^2 = \lambda(\theta_0 - \theta_e) \sqrt{\frac{2h}{\lambda R}} \pi R^2.$$

La puissance totale dissipée par une ailette vaut donc

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{2h\lambda}{R}} (\theta_0 - \theta_e) \pi R^2.$$

On calcule $\Phi_1 = 4,8 \text{ W}$.

Il faut donc 9 ailettes pour évacuer la puissance $\Phi_T = 40 \text{ W}$.

Discussion : l'hypothèse de l'ailette infinie est-elle valide? Elle revient à considérer que la longueur de la tige est grande devant la distance caractéristique de l'évolution de la température dans celle-ci : $L \gg \delta$.

On calcule $\delta = 6,3 \text{ cm}$. L'approximation $\delta \ll L$ semble osée, mais des deux grandeurs apparaissent dans le terme $e^{-L/\delta} = 0,09$ qui est « assez petit » devant 1. L'hypothèse, sans être largement vérifiée, est acceptable.

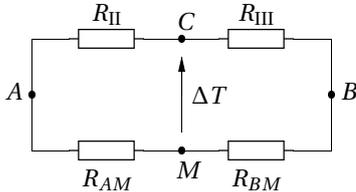
2. On pourrait améliorer le système :

- en utilisant un ventilateur pour se mettre en situation de ventilation forcée; h est alors plus élevé, ainsi que la puissance évacuée par une ailette;
- en prenant des ailettes de profil différent, qui augmente la surface d'échange pour une section donnée.

12 — Trois barres en contact

En régime stationnaire, nous pouvons décrire chaque barre par sa résistance thermique, et donner un équivalent électrique du dispositif, en notant M le point de prise de température à l'abscisse x de la barre 0.

Les barres I et II étant traversées par un même flux, elles sont en série.



On cherche la condition pour annuler la différence de température $\Delta T = T_C - T_x$.

On peut appliquer deux fois la relation du « pont diviseur de différence de températures » :

$$T_C - T_B = \frac{R_I}{R_I + R_{II}}(T_A - T_B)$$

et

$$T_x - T_B = \frac{R_{BM}}{R_{AM} + R_{BM}}(T_A - T_B).$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left(\frac{R_I}{R_I + R_{II}} - \frac{R_{BM}}{R_{AM} + R_{BM}} \right) (T_A - T_B) \\ &= \frac{R_I R_{AM} - R_{II} R_{BM}}{(R_I + R_{II})(R_{AM} + R_{BM})} (T_A - T_B). \end{aligned}$$

La condition $\Delta T = 0$ est donc réalisée pour

$$R_I R_{AM} = R_{II} R_{BM}. \quad (1)$$

Les résistances thermiques sont données par

$$R_I = \frac{L_0}{\lambda_I S_I}; \quad R_{II} = \frac{L_0}{\lambda_{II} S_{II}}; \quad R_{AM} = \frac{x}{\lambda_0 S_0}; \quad R_{BM} = \frac{L_0 - x}{\lambda_0 S_0}.$$

La condition (1) s'écrit alors

$$\frac{L_0}{\lambda_I S_I} \frac{x}{\lambda_0 S_0} = \frac{L_0}{\lambda_{II} S_{II}} \frac{(L_0 - x)}{\lambda_0 S_0},$$

soit

$$\frac{x}{\lambda_I S_I} = \frac{L_0 - x}{\lambda_{II} S_{II}}.$$

Les sections des barres étant identiques, on en déduit

$$\lambda_{II} = \frac{L_0 - x}{x} \lambda_I.$$

On calcule $\lambda_{II} = 200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

► Vous aurez bien sûr reconnu le montage équivalent au pont de Wheatstone...

13 — Compost

1. Effectuons un bilan d'énergie en régime stationnaire pour une tranche de section S , comprise entre z et $z + dz$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(z) dt - \Phi(z + dx) dt + Q \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) S dz dt \\ &= -\frac{d\Phi}{dz} dz dt + Q \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) S dz dt, \end{aligned}$$

soit comme $\Phi(z) = j_Q(z)S = -\lambda \frac{dT}{dz} S$

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dz^2} S dz dt + Q \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) S dz dt.$$

On a donc

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{Q}{\lambda} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right).$$

On en déduit

$$\frac{dT}{dz} = \frac{QH}{\lambda\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + A.$$

Nous pouvons utiliser à ce stade la condition en $z = 0$: la surface au sol étant parfaitement isolé, le flux thermique est nul en $z = 0$, soit

$$\frac{dT}{dz}(z = 0) = 0 = \frac{QH}{\lambda\pi} + A.$$

On a donc $A = -\frac{QH}{\lambda\pi}$, d'où

$$\frac{dT}{dz} = \frac{QH}{\lambda\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) - \frac{QH}{\lambda\pi}.$$

On en déduit

$$T(z) = \frac{QH^2}{\lambda\pi^2} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - \frac{QH}{\lambda\pi} z + B.$$

La condition au sommet du tas de compost, en $z = H$, est donnée par la continuité du flux thermique, donné d'un côté de l'interface par la loi de Fourier, et de l'autre par la loi de Newton :

$$-\lambda \frac{dT}{dz}(z = H) = h[T(H) - T_0]$$

soit

$$-\lambda \left[-\frac{QH}{\lambda\pi} - \frac{QH}{\lambda\pi} \right] = h \left[-\frac{QH^2}{\lambda\pi} + B - T_0 \right].$$

On a donc

$$B = \frac{2QH}{h\pi} + \frac{QH^2}{\lambda\pi} + T_0,$$

d'où

$$T(z) = \frac{QH^2}{\lambda\pi^2} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - \frac{QH}{\lambda\pi} z + \frac{2QH}{h\pi} + \frac{QH^2}{\lambda\pi} + T_0.$$

La température dans le tas de compost est donnée par

$$T(z) = \frac{QH^2}{\lambda\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + 1 - \frac{z}{H} + \frac{2\lambda}{hH} \right] + T_0.$$

La température est maximum en $z = 0$ (dérivée nulle par nullité du flux) et vaut

$$T_{\max} = \frac{QH^2}{\lambda\pi} \left[1 + \frac{2\lambda}{hH} \right] + T_0.$$

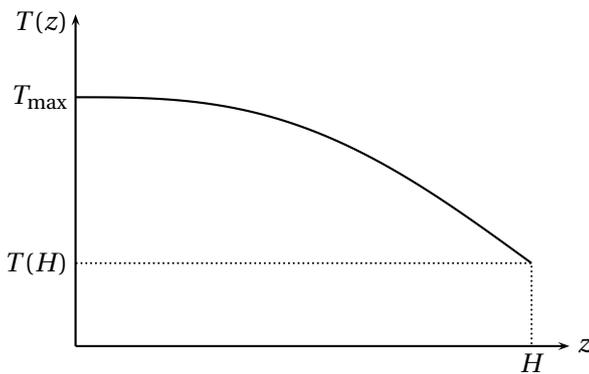
La température au sommet vaut

$$T(H) = T_{\min} = \frac{QH^2}{\lambda\pi} \frac{2\lambda}{hH} + T_0 = \frac{2QH}{\pi h} + T_0.$$

Pour $0 < z < H$, on a

$$\frac{dT}{dz} = \frac{QH}{\lambda\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) - 1 \right] < 0.$$

La température diminue vers le haut du tas (le flux thermique est partout dirigé vers le haut).



2. La puissance dégagée par le compost pourrait se calculer directement à partir de la puissance volumique donnée (en intégrant sur tout le volume du tas). Il est cependant plus simple d'effectuer un bilan d'énergie en prenant comme système le tas de compost entier.

En régime stationnaire, pendant dt , on a

$$0 = \delta Q_{\text{reçu}} dt + \mathcal{P} dt,$$

avec

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -\Phi(x=H) dt = \lambda S \frac{dT}{dz}(z=H) dt.$$

On en déduit

$$\mathcal{P} = -\lambda S \frac{dT}{dz}(z=H) = -\frac{QHS}{\pi} [\cos(\pi) - 1]$$

soit

$$\mathcal{P} = \frac{2QHS}{\pi}.$$

► On obtient le même résultat bien sûr par le calcul de

$$\mathcal{P} = \int_0^H Q \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) S dz.$$

► Le volume du tas étant SH , la puissance volumique moyenne créée vaut $\frac{2Q}{\pi}$.

3. Discussion à mener en fonction des attentes de l'examineur : qu'entend-on par « améliorer le système »? (Je n'en sais rien!).

Si la discussion porte sur la température maximale atteinte dans le tas de compost, on peut remarquer que les valeurs extrêmes de la température sont

$$T_{\min} = \frac{2QH}{\pi h} + T_0 \quad \text{et} \quad T_{\max} = T_{\min} + \frac{QH^2}{\lambda\pi} + T_0.$$

Pour un volume donné, on peut jouer sur la hauteur H du tas pour augmenter ou diminuer la température atteinte.

Augmenter la conductivité thermique du milieu, par exemple en l'humidifiant, permet de diminuer la température maximale au fond du tas.

Augmenter le coefficient h en aérant le sommet du tas permet de diminuer la température dans le tas.

14 — Moteur endoréversible de Novikov

1. Les contacts avec les sources sont deux isothermes réversibles; elles sont reliées par deux adiabatiques réversibles.

Question de cours pour retrouver $\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$.

2. Si la température du fluide est égale à celle de la source de chaleur en contact, il n'y a pas de gradient de température entre la source et le fluide, et le transfert thermique est infiniment lent. L'énergie W est donc fournie pendant une durée infirment lente : **la puissance tend donc vers zéro.**

3. Le bilan de puissance pour évolution stationnaire s'écrit

$$0 = \Phi_C + \Phi_F - P.$$

L'égalité de Clausius pour une évolution réversible du fluide s'écrit

$$0 = \frac{\Phi_C}{T_1} + \frac{\Phi_F}{T_2}.$$

► C'est bien la température du fluide qu'il faut prendre en compte : la température de la paroi en contact avec le fluide est celle du fluide, par celle de la source car il y a un gradient de température entre T_C et T_1 dans la paroi.

4. Des deux relations précédentes on déduit

$$P = \Phi_C \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Dans la paroi on a $\Phi_C = G_{\text{th}}(T_C - T_1)$ (attention au signe!). On en déduit, comme $T_2 = T_F$

$$P = G_{\text{th}}(T_C - T_1) \left(1 - \frac{T_F}{T_1} \right).$$

On a donc

$$\frac{dP}{dT_1} = G_{\text{th}} \left(\frac{T_C T_F}{T_1^2} - 1 \right) = 0$$

pour $T_1 = \sqrt{T_C T_F}$.

On a alors

$$P_{\max} = G_{\text{th}} \left(T_C - \sqrt{T_C T_F} \right) \left(1 - \frac{T_F}{\sqrt{T_C T_F}} \right) = \left(\sqrt{T_C}^2 - \sqrt{T_C T_F} \right) \left(1 - \frac{T_F}{\sqrt{T_C T_F}} \right)$$

soit

$$P_{\max} = G_{\text{th}} \left(\sqrt{T_C} - \sqrt{T_F} \right)^2.$$

Le rendement vaut

$$\eta = \frac{P}{\Phi_C} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_F}{\sqrt{T_C T_F}}$$

soit

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_F}{T_C}}.$$

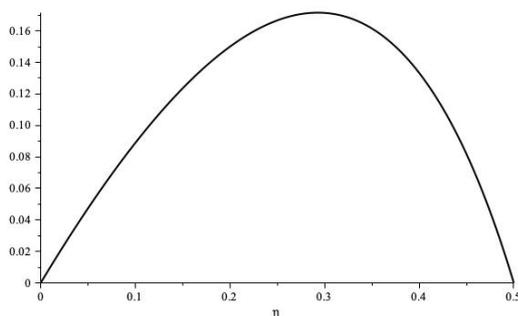
Il est inférieur au rendement du cycle de Carnot (mais on a une puissance bien supérieure).

5. On a $P = G_{\text{th}} (T_C - T_1) \left(1 - \frac{T_F}{T_1} \right)$ et $\eta = 1 - \frac{T_F}{T_1}$. On a donc $T_1 = \frac{T_F}{1 - \eta}$ d'où

$$P(\eta) = G_{\text{th}} \left(T_C - \frac{T_F}{1 - \eta} \right) \eta.$$

On peut esquisser la courbe en remarquant les cas extrêmes :

- pour $T_1 = T_F$, on a évidemment $\eta = 0$ et $P = 0$;
- pour $T_1 = T_C$, on retrouve le cycle de Carnot : c'est la valeur maximale du rendement, mais la puissance est nulle;
- la puissance est maximale pour une valeur intermédiaire du rendement.

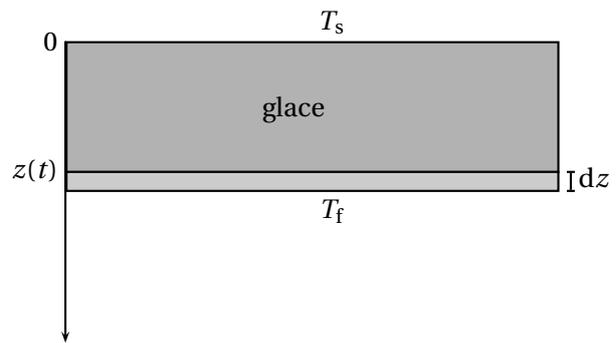


Pour poursuivre la discussion : une machine est dite endoreversible si elle est constituée de partie subissant des évolutions internes réversibles, mais telles que leurs échanges soient irréversibles. Ici, c'est le transfert thermique entre la source chaude et le fluide à travers la paroi qui est irréversible (cf le calcul classique du taux de

création d'entropie dans une paroi en régime stationnaire). Dans la pratique, on peut considérer que c'est la vitesse de l'évolution du fluide qui fixe T_1 : si elle est très lente, T_1 tend vers T_C (mais la puissance tend vers zéro), si elle est trop rapide, T_1 est trop faible et le rendement et la puissance sont faibles ; il s'agit de trouver un compromis.

15 — Gel d'un lac

1. Représentons la situation :



Un bilan d'énergie dans la glace conduit à l'équation de la chaleur (problème unidimensionnel sans source) :

$$\rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Les conditions aux limites sont

$$T_g(0, t) = T_s \quad \text{et} \quad T_g(z(t), t) = T_f.$$

2. Entre t et $t + dt$ il se forme une épaisseur dz de glace. Nous allons effectuer un bilan d'enthalpie pendant dt sur une section S de cette tranche d'eau qui se solidifie. Sa masse étant $\rho_g S dz$, sa variation d'enthalpie lors de sa solidification est³

$$dH = -\rho_g S dz \Delta_{\text{fus}} h.$$

Le bilan d'énergie s'écrit

$$dH = \delta Q_{\text{reçu}}$$

avec

$$\delta Q_{\text{reçu}} = j_Q(z(t)) S dt = -\lambda \frac{\partial T_g}{\partial z} S dt.$$

On a donc

$$-\rho_g S \Delta_{\text{fus}} h dz = -\lambda \frac{\partial T_g}{\partial z} S dt$$

soit

$$\lambda \frac{\partial T_g}{\partial z} = \rho_g \Delta_{\text{fus}} h \frac{dz}{dt}.$$

3. Supposer z constant pendant dt revient à se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

3. Attention au signe : l'enthalpie de solidification est l'opposé de l'enthalpie de fusion.

4. La première équation différentielle devient alors

$$\frac{d^2 T_g}{dz^2} = 0.$$

Le gradient⁴ de température vaut alors

$$\frac{dT_g}{dz} = \frac{T_f - T_s}{z(t)}.$$

5. L'équation différentielle établie à la question 2 s'écrit alors

$$\lambda \frac{T_f - T_s}{z(t)} = \rho_g \Delta_{\text{fus}} h \frac{dz}{dt}$$

soit en séparant les variables :

$$z dz = \lambda \frac{T_f - T_s}{\rho_g \Delta_{\text{fus}} h} dt.$$

En prenant $z(0) = 0$ (la couche de glace commence à se former à l'instant $t = 0$), on obtient

$$z^2(t) = \lambda \frac{T_f - T_s}{\rho_g \Delta_{\text{fus}} h} t,$$

soit

$$z(t) = \sqrt{\frac{\lambda(T_f - T_s)}{\rho_g \Delta_{\text{fus}} h} t}.$$

On remarque que $z(t) \propto \sqrt{t}$: l'épaisseur de la couche de glace augmente « de moins en moins vite » : l'écart de température entre les faces de la couche reste constant, mais l'épaisseur augmentant, le gradient de température diminue au cours du temps ; il en est donc de même du flux thermique évacuant l'énergie libérée par la solidification qui se trouve alors ralentie.

Les facteurs augmentant l'évacuation de l'énergie produite lors de la solidification ont pour effet d'augmenter l'épaisseur de la couche de glace pour une date t donnée :

- si la conductivité λ augmente, $z(t)$ augmente donc ;
- si $\rho_g \Delta_{\text{fus}} h$ augmente, $z(t)$ diminue (il faut évacuer plus d'énergie) ;
- si $T_f - T_s$ augmente, $z(t)$ augmente (le flux thermique augmente).

6. On calcule $z(t) = \sqrt{\frac{2,1 \times 30}{940 \times 335 \times 10^3} t}$ pour différentes valeurs de t .

| | | | |
|-----------|-----------|--------|--------|
| Durée | 1 minutes | 1 jour | 1 mois |
| Épaisseur | 3,5 mm | 13 cm | 72 cm |

Les ordres de grandeur sont cohérents.

4. On donne sa composante selon \vec{e}_z ; on a bien sûr $\text{grad } T_g = \frac{dT_g}{dz} \vec{e}_z$.
 5. L'éventuelle constante multiplicative sera dans la fonction f .

16 — Diffusion thermique instationnaire

1. On vérifie que

$$T(0,0) = T_0 \quad \text{et} \quad T(L,0) = T_0.$$

2. Le problème unidimensionnel sans source est régi par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Écrivons que $T(x, t) = T_0 + f(x)g(t)$ vérifie cette équation :

$$f(x)g'(t) = a f''(x)g(t)$$

soit

$$a \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Le premier membre de cette égalité est indépendant de t , tandis que le second membre est indépendant de x (par construction) ; chacun de ses membres ne dépend donc ni de t ni de x : ils sont donc égaux à une constante.

On a donc d'une part

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = A,$$

d'où

$$g(t) = g(0) e^{At}.$$

Physiquement, $g(t)$ ne peut diverger ; on doit donc avoir $A < 0$. Comme A est homogène à l'inverse d'un temps, on pose $A = -1/\tau$, et

$$g(t) = g(0) e^{-t/\tau}.$$

On a alors

$$a \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{1}{\tau},$$

soit

$$f''(x) + \frac{1}{a\tau} f(x) = 0.$$

On en déduit

$$f(x) = \alpha \sin\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right) + \beta \cos\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right).$$

La condition initiale s'écrit, en posant⁵ $g(0) = 1$

$$T(x,0) = T_0 + \theta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = T_0 + f(x)$$

d'où

$$f(x) = \alpha \sin\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right) + \beta \cos\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right) = \theta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

On en déduit $\beta = 0$, $\alpha = \theta$ et $\frac{1}{\sqrt{a\tau}} = \frac{\pi}{L}$, d'où $\tau = \frac{L^2}{a\pi^2}$.

On a donc

$$g(t) = \exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right) \quad \text{et} \quad f(x) = \theta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

La température dans la barre s'écrit donc

$$T(x, t) = T_0 + \theta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right).$$

3. Le vecteur densité de courant thermique est donné par la loi de Fourier

$$j_Q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda \theta \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right).$$

En notant S la section des plaques, le flux thermique en x est donné par

$$\Phi(x, t) = -\lambda S \theta \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right)$$

17 — Conductivité du givre

1. On considère un flux thermique « vertical » sur la figure.

Dans un premier temps, le cube d'air de côté b est en série avec le parallélépipède de glace de section b^2 et de longueur b .

La résistance thermique du cube d'air est

$$R_{th,1} = \frac{b}{\lambda_a b^2} = \frac{1}{\lambda_a b}.$$

Celle du parallélépipède de glace est

$$R_{th,2} = \frac{a-b}{\lambda_g b^2}.$$

La résistance thermique de l'ensemble en série est

$$R_{th,1,2} = R_{th,1} + R_{th,2} = \frac{1}{\lambda_a b} + \frac{a-b}{\lambda_g b^2} = \frac{\lambda_g b + \lambda_a(a-b)}{\lambda_a \lambda_g b^2}.$$

Ce parallélépipède « vertical » de section b^2 et de longueur a est en parallèle avec le restant du motif, de section $a^2 - b^2$, de longueur a , constitué de glace, de résistance thermique

$$R_{th,3} = \frac{a}{\lambda_g(a^2 - b^2)}.$$

La résistance thermique du motif est donc donnée par

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th,1,2}} + \frac{1}{R_{th,3}} = \frac{\lambda_g(a^2 - b^2)}{a} + \frac{\lambda_a \lambda_g b^2}{\lambda_g b + \lambda_a(a-b)}.$$

2. En notant λ la conductivité thermique du givre, la résistance thermique du motif de longueur a et de section a^2 s'écrit

$$R_{th} = \frac{a}{\lambda a^2} = \frac{1}{\lambda a}.$$

La conductivité $\lambda = \frac{1}{R_{th} a}$ est alors donnée par

$$\lambda = \frac{\lambda_g(a^2 - b^2)}{a^2} + \frac{\lambda_a \lambda_g b^2}{\lambda_g a b + \lambda_a a(a-b)}.$$

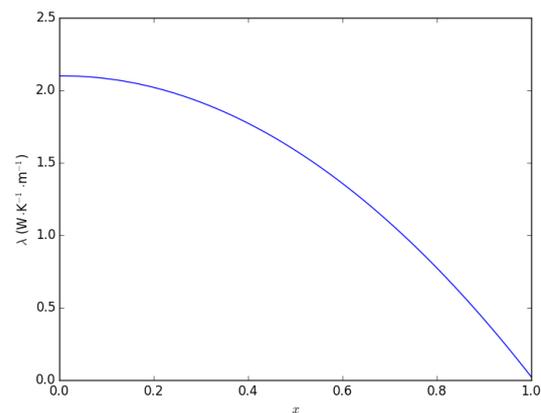
3. On peut écrire

$$\lambda = \lambda_g \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{\lambda_a \lambda_g \frac{b^2}{a^2}}{\lambda_g \frac{b}{a} + \lambda_a \left(1 - \frac{b}{a}\right)}.$$

On posant $x = b/a$, on a donc

$$\lambda = f(x) = \lambda_g(1 - x^2) + \frac{\lambda_a \lambda_g x^2}{(\lambda_g - \lambda_a)x + \lambda_a}.$$

4. On représente $\lambda(x)$, où x varie de 0 (que de la glace) à $x = 1$ (que de l'air).



5. Pour $x = 0,4$, on calcule $\lambda = 1,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Le givre est thermiquement plutôt isolant, s'opposant aux transferts thermiques entre la source froide (l'intérieur du congélateur) et le fluide compris dans le serpentin.

18 — Solidification d'une goutte

1. Prenons comme système la goutte de rayon R . Le premier principe pendant dt s'écrit

$$\delta U = \delta Q_{\text{reçu}}.$$

On a d'une part

$$dU = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c dT = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c \frac{dT}{dt} dt$$

et d'autre part

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -h4\pi R^2 [T(t) - T_a] dt.$$

Après simplification, on obtient

$$\rho c R \frac{dT}{dt} = -3h [T(t) - T_a].$$

2. L'équation différentielle précédente s'écrit

$$\tau \frac{dT}{dt} + T(t) = T_a \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\rho c R}{3h}.$$

On en déduit

$$T(t) = A e^{-t/\tau} + T_a.$$

Avec la condition initiale $T(0) = T_e$ on obtient

$$T(t) = (T_e - T_a) e^{-t/\tau} + T_a.$$

3. De la condition

$$(T_e - T_a) e^{-t_1/\tau} + T_a = T_f$$

on déduit

$$t_1 = \tau \ln \left(\frac{T_e - T_a}{T_f - T_a} \right).$$

On calcule $t_1 = 50 \text{ s}$.

4. Décrivons l'évolution :

état initial masse m d'eau liquide à $T_f = -5 \text{ }^\circ\text{C}$;

état final masse xm d'eau liquide et $(1-x)m$ d'eau solide à $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.

L'ensemble est isolé ; l'énergie nécessaire à augmenter la température de la goutte provient de la solidification, exothermique.

On considère l'état intermédiaire fictif où l'eau est liquide à $0 \text{ }^\circ\text{C}$. La variation d'enthalpie de la goutte entre l'état initial et cet état est

$$\Delta H_1 = mc(T_0 - T_f).$$

La variation d'enthalpie entre cet état et l'état final correspond à la solidification d'une masse $(1-x)m$ d'eau :

$$\Delta H_2 = -(1-x)m\Delta_{\text{fus}}h$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, le bilan pour toute l'évolution s'écrit

$$\Delta H = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

soit

$$mc(T_0 - T_f) - (1-x)m\Delta_{\text{fus}}h = 0.$$

On en déduit

$$x = 1 - \frac{c(T_0 - T_f)}{\Delta_{\text{fus}}h}.$$

On calcule $x = 0,94$: il reste 94 % de la masse de la goutte sous forme liquide.

La goutte d'eau est dans un état de surfusion : elle est liquide à une température $T_f = -5 \text{ }^\circ\text{C}$ où elle devrait être solide. Cet état est métastable : une petite perturbation (choc, impureté) déclenche le changement d'état. C'est le principe des pluies verglaçantes.

5. La dernière phase est une solidification de la goutte isobare, donc isotherme (propriété du changement d'état). La température de la goutte étant constante, son enthalpie ne varie pas ($dH = mc dT = 0$). Le premier principe appliqué à cette dernière phase de durée Δt s'écrit alors

$$0 = Q_{\text{reçu}} + Q_{\text{prod}}$$

soit

$$0 = -h4\pi R^2(T_0 - T_a)\Delta t + x \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Delta_{\text{fus}}h.$$

On en déduit

$$\Delta t = x \frac{\rho R \Delta_{\text{fus}}h}{3h(T_0 - T_a)}.$$

On calcule $\Delta t = 1,4 \times 10^2 \text{ s}$ soit un peu plus de 2 minutes.

23 — Détermination d'une conductivité thermique

1. Résultat de cours : $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$.

On en déduit $\Phi = \frac{T_1 - T_2(t)}{R_{\text{th}}}$.

2. Bilan thermique pendant dt :

$$C_2 dT_2 = \Phi dt = \frac{T_1 - T_2(t)}{R_{\text{th}}} dt,$$

d'où

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{R_{\text{th}}C_2} [T_1 - T_2(t)].$$

Système du 1^{er} ordre, avec $\tau = R_{\text{th}}C_2$.

Résolution : $T_2(t) = T_1 + [T_2(0) - T_1] e^{-t/\tau}$.

3. De la loi précédente on déduit

$$t = \tau \ln \left(\frac{T_2(0) - T_1}{T_2(t) - T_1} \right).$$

Le graphe est une droite de pente

$$\tau = R_{\text{th}}C_2 = R_{\text{th}}(C + m\bar{c}_{\text{eau}}).$$

On mesure sur le graphe $\tau = \frac{3250 - 500}{0,08 - 0,02}$.

La conductivité est donnée par $\lambda = \frac{4C_2L}{\tau\pi D^2}$.

Avec les valeurs proposées $\lambda = 243 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$: la tige est en **aluminium**.

4. Temps caractéristique : $T^* \simeq \frac{\rho c}{\lambda} L^2$. Le régime est quasi-stationnaire si $T^* \ll \tau$, soit si

$$\frac{\rho c L^2}{\lambda} \ll \frac{L}{\lambda S} C_2,$$

d'où $\rho cLS \ll C_2$: la capacité thermique de la tige doit être bien inférieure à celle du calorimètre et de l'eau.

On a $C_2 \approx 2 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On calcule $\rho cLS \approx 2 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On a donc $C_2 \approx 10c$: l'approximation est correcte, mais *a priori* sans plus.

5. Si l'évolution n'est pas quasi-stationnaire, la température $T_2(t)$ augmente « trop vite » : le profil de température dans la tige n'a donc pas le temps d'atteindre la profil affine stationnaire à chaque instant.

Compte tenu du sens de l'évolution de $T_2(t)$, ce profil présente donc une concavité vers la haut. À tout instant, la tangente au profil $T(x)$ est donc plus petite que pour le profil affine.

D'après la loi de Fourier, le flux thermique réel est donc plus faible que le flux théorique (quasi-stationnaire) :

$\Phi_{\text{réel}} < \Phi_{\text{théo}}$. Comme $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{th}}}$, on a $R_{\text{th,réel}} > R_{\text{th,théo}}$.

De l'expression $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$, on en déduit $\lambda_{\text{réel}} < \lambda_{\text{théo}}$: l'hypothèse a donc tendance à **surestimer la valeur de la conductivité de la tige**.

24 — La fine ou l'épaisse ?

1. Bilan d'énergie sur une tranche $[x, x + dx]$ en régime stationnaire :

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) - h[T(x) - T_a]2(a + b) dx = 0$$

d'où en linéarisant et en utilisant la loi de Fourier

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T(x) - T_a}{\delta^2} = 0$$

avec

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a + b)}}$$

homogène à une longueur d'après l'équation différentielle.

2. Solution générale

$$T(x) = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta} + T_a.$$

Ailette « infinie » si $L \gg \delta$. On a donc $B = 0$, et avec $T(0) = T_0$ on obtient

$$T(x) = (T_0 - T_a)e^{-x/\delta} + T_a.$$

3. On a

$$j_Q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_0 - T_a}{\delta} e^{-x/\delta}.$$

Le flux total évacué est donné par le flux entrant en $x = 0$ (on peut le justifier par un bilan d'énergie en prenant comme système la totalité de l'ailette), soit

$$\Phi_{\text{tot}} = j_Q(0)ab.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}} &= \frac{\lambda}{\delta} (T_0 - T_a)ab = \lambda(T_0 - T_a)ab \sqrt{\frac{2h(a + b)}{\lambda ab}} \\ &= (T_0 - T_a)\sqrt{2h\lambda ab(a + b)}. \end{aligned}$$

Le flux total est proportionnel à $\sqrt{ab(a + b)}$. Le rapport des flux est donné par

$$\frac{\Phi_{\text{fine}}}{\Phi_{\text{épaisse}}} = \frac{\sqrt{ab(a + b)}}{\sqrt{a'b'(a' + b')}} = \frac{2,28}{1,4} = 2,2.$$

L'ailette fine permet d'évacuer plus de deux fois plus d'énergie que l'ailette à section carrée.

4. Quand L est « grand » devant δ , on a $T(x) \approx T_a$ et l'ailette ne sert plus à rien. Compte tenu du terme $e^{-x/\delta}$, on peut se limiter à $L = 5\delta$ par exemple (ou $L = 3\delta$).

Il vaut mieux donc plusieurs ailettes courtes en parallèle qu'une ailette longue, et prendre des ailettes les plus fines possibles. La photographie confirme ces choix.