TD phénomènes de transport — Diffusion de charge

5 — Résistance d'un manchon cylindrique ohmique

On considère un conducteur ohmique, de conductivité électrique γ, de forme cylindrique, limité par deux cylindres concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ et de hauteur h.
On impose les potentiels électriques V_1 sur l'armature intérieure et V_2 sur l'armature extérieure. On note $U = V_1 - V_2$ la différence de potentiel correspondante. On se place en régime stationnaire.

1. On considère un tube cylindrique de rayon r, d'épaisseur dr et de hauteur h. On effectue un bilan de charge entre t et $t+\mathrm{d}t$ en régime stationnaire :

$$\mathrm{d}Q = 0 = \delta Q_{\text{reçu}} = I(r)\,\mathrm{d}t - I(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

On a donc $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r} = 0$: l'intensité I ne dépend pas de r.
Le problème étant à symétrie cylindrique, on a $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques.
À travers un cylindre Σ de rayon $r \in [R_1, R_2]$, on a

$$I = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot\vec{e}_r = 2\pi r h j(r)\,.$$

Avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, on en déduit le champ électrique dans le conducteur

$$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma h r}\mathrm{d}\vec{S}}\,.$$

2. Avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on a

$$-\mathrm{d}V = \frac{I}{2\pi\gamma h}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

d'où

$$-\int_{V_1}^{V_2}\mathrm{d}V = \frac{I}{2\pi\gamma h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

soit

$$V_1 - V_2 = U = \frac{I}{2\pi\gamma h}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\,.$$

De $U = RI$ on en déduit la résistance

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi\gamma h}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\,.$$

3. Si $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, on a

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(1+\frac{e}{R_1}\right) \approx \frac{e}{R_1}$$

et

$$R \approx \frac{e}{2\pi R_1 h\gamma} = \frac{e}{\gamma S}$$

où S est la surface traversée par le courant I. On retrouve une expression de la même forme que pour un système unidimensionnel en coordonnées cartésiennes : résultat classique, où l'on peut considérer que la courbure du conducteur est localement négligeable si l'épaisseur du tube est très faible devant son rayon.

6 — Résistance électrique d'une coquille sphérique

1. On considère une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr. On effectue un bilan de charge entre t et $t+\mathrm{d}t$ en régime stationnaire :

$$\mathrm{d}Q = 0 = \delta Q_{\text{reçu}} = I(r)\,\mathrm{d}t - I(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

On a donc $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r} = 0$: l'intensité I ne dépend pas de r.
Le problème étant à symétrie sphérique, on a $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.
À travers une sphère Σ de rayon $r \in [R_1, R_2]$, on a

$$I = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 j(r)\,.$$

Avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, on en déduit le champ électrique dans le conducteur

$$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}\vec{e}_r}\,.$$

2. Avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on a

$$-\mathrm{d}V = \frac{I}{4\pi\gamma}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

d'où

$$-\int_{V_1}^{V_2}\mathrm{d}V = \frac{I}{4\pi\gamma}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

soit

$$V_1 - V_2 = U = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{I}{4\pi\gamma}\frac{R_2-R_1}{2\pi\gamma R_1R_2}\,.$$

De $U = RI$ on déduit la résistance

$$\boxed{R = \frac{R_2-R_1}{4\pi\gamma R_1R_2}}\,.$$

3. Si $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, on a $R_1 R_2 \approx R_1^2$, d'où

$$R \approx \frac{e}{4\pi R_1^2 \gamma} = \frac{e}{\gamma S}.$$

On retrouve une expression de la même forme que pour un système unidimensionnel en coordonnées cartésiennes : résultat classique, où l'on peut considérer que la courbure du conducteur est localement négligeable si l'épaisseur de la coquille est très faible devant son rayon.

7 — Tension de pas

1. L'intensité est le flux de $\vec{j}$ à travers la demi-sphère de rayon r :

$$\boxed{I = 2\pi r^2 j(r)}.$$

2. D'après la loi d'Ohm locale, on en déduit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}\vec{e}_r}.$$

3. Avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on obtient

$$-\int_{V(r)}^{V(\infty)=0} \mathrm{d}V = \frac{I}{2\pi\gamma}\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}r'}{r'^2}$$

soit

$$\boxed{V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r}}.$$

4. Entre les pattes de la vache, la ddp est

$$U_\text{p} = V(d-p/2) - V(d+p/2) = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{d-\frac{p}{2}} - \frac{1}{d+\frac{p}{2}}\right)$$

soit

$$\boxed{U_\text{p} = \frac{I}{2\pi\gamma}\frac{p}{d^2 - \frac{p^2}{4}}}.$$

Si $p \ll d$, on a $d^2 - \frac{p^2}{4} \approx d^2$, d'où

$$\boxed{U_\text{p} \approx \frac{Ip}{2\pi\gamma d^2}}.$$

5. En notant I_v l'intensité électrique traversant la vache, on a $U_\text{p} = RI_\text{v}$. On veut $U_\text{p} < RI_\text{max}$, soit

$$\frac{Ip}{2\pi\gamma d^2} < RI_\text{max}$$

d'où

$$d^2 > \frac{Ip}{2\pi\gamma RI_\text{max}} = d_\text{m}^2.$$

On a donc

$$\boxed{d_\text{m} = \sqrt{\frac{Ip}{2\pi\gamma RI_\text{max}}}}.$$

On calcule $\boxed{d_\text{m} = 7{,}6\ \text{m}}$.

6. L'écart p entre les pattes de la vache est plus grand que la distance entre les deux pieds d'un homme. On a donc $U_\text{p,vache} > U_\text{p,homme}$.

8 — Prise de terre d'un paratonnerre

1. La densité de courant $j(r)$ s'exprime en $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$. On a $I = 2\pi r^2 j(r)$ à travers la demi-sphère de rayon r, d'où

$$\boxed{j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}}.$$

2. On applique la loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma_\text{m} r^2}\vec{e}_r}.$$

3. Avec $\vec{E} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on obtient

$$-\mathrm{d}V = \frac{I}{2\pi\gamma_\text{m}}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

soit

$$U = V(r_a) - V(r_b) = \frac{I}{2\pi\gamma_\text{m}}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma_\text{m}}\frac{r_b - b_a}{r_a r_b}$$

On en déduit la résistance

$$\boxed{R_\text{m} = \frac{r_b - r_a}{2\pi\gamma_\text{m} r_a r_b}}.$$

4. Dans le sol, on a de même

$$-\int_{V(r)}^{V(\infty)} \mathrm{d}V = \frac{I}{2\pi\gamma_\text{s}}\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}r'}{r'^2}$$

soit en prenant $V(\infty) = 0$

$$V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma_\text{s} r}.$$

On a donc

$$V(r_b) = R_\text{s} I = \frac{I}{2\pi\gamma_\text{s} r_b}$$

d'où la résistance

$$\boxed{R_\text{s} = \frac{1}{2\pi\gamma_\text{s} r_b}}.$$

5. La prise de terre est le sol sont associés en série (ils sont traversés par la même intensité I) ; la résistance totale est donc $R_\text{T} = R_\text{m} + R_\text{s}$, soit

$$\boxed{R_\text{T} = \frac{r_b - r_a}{2\pi\gamma_\text{m} r_a r_b} + \frac{1}{2\pi\gamma_\text{s} r_b}}.$$

6. On calcule

$$R_\text{T} = \frac{0{,}34}{2\pi \times 60 \times 10^6 \times 35 \times 10^{-4}} + \frac{1}{2\pi 10^{-3} \times 0{,}35}$$

soit $\boxed{R_\text{T} = 455\ \Omega}$.

7. L'installation proposée n'est pas conforme aux règles de sécurité.

Pour remédier à ce problème, on pourrait :

— augmenter le rayon r_b (c'est le deuxième terme qui est largement prépondérant) ;

— choisir un sol de meilleur conductivité électrique ;

— placer plusieurs piquets en parallèle sur la même ligne : une association de N résistances identiques R en parallèle a pour résistance équivalente R/N.

9 — Magnétorésistance

1. La force $-\dfrac{m\vec{v}}{\tau}$ représente les interactions entre les électrons de conduction et les défauts du réseau cristallin. Le temps τ représente la durée moyenne entre deux chocs pour un électron donné.

2. Sous l'effet de la différence de potentiel entre les cylindres, il apparaît une densité de courant $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$. Le champ électrique $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$ est donc de la forme

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r}\vec{e}_r$$

où α est une constante.
De $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ on déduit

$$-\mathrm{d}V = \alpha\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

La tension U est alors donnée par

$$-\int_a^b \mathrm{d}V = U = \alpha\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \alpha\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On a donc $\alpha = \dfrac{U}{\ln(b/a)}$ et le champ électrique s'écrit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{\vec{e}_r}{r}}.$$

3. On écrit le PFD à un porteur de charge en régime permanent :

$$\vec{0} = \mathrm{e}\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

d'où $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{e}\tau}{m}\vec{E}$. On a donc

$$\vec{j}_0 = n\mathrm{e}\vec{v} = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

d'où la conductivité

$$\boxed{\sigma = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}}.$$

4. L'intensité I traversant le conducteur est

$$I = 2\pi r h j(r) = 2\pi\sigma h r E(r) = \frac{2\pi\sigma h U}{\ln(b/a)} = \frac{U}{R_0}$$

d'où la résistance

$$\boxed{R_0 = \frac{1}{2\pi\sigma h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

5. Le conducteur est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$.

5.a) Chaque porteur de charge est soumis à la force de Lorentz

$$\vec{F}_\mathrm{L} = \mathrm{e}\vec{E} + \mathrm{e}\vec{v}\wedge\vec{B}.$$

Le PFD appliqué à ce porteur en régime permanent s'écrit donc

$$\vec{0} = \mathrm{e}\vec{E} + \mathrm{e}\vec{v}\wedge\vec{B} - \frac{m}{\tau}\vec{v},$$

soit comme $\vec{j} = \mathrm{e}\vec{v}$,

$$\vec{0} = \mathrm{e}\vec{E} + \frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{n} - \frac{m}{n\mathrm{e}\tau}\vec{j}.$$

On a donc

$$\vec{j} = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\vec{E} + \frac{n\mathrm{e}\tau}{m}\frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{n} = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\vec{E} + \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{n\mathrm{e}},$$

soit

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E} + \sigma R_\mathrm{h}(\vec{j}\wedge\vec{B})}$$

avec

$$\sigma = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m} \quad \text{avec} \quad R_\mathrm{h} = \frac{1}{n\mathrm{e}}.$$

5.b) Notons

$$\vec{j} = j_r\vec{e}_r + j_\theta\vec{e}_\theta + j_z\vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques. Comme $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$, la relation précédente s'écrit

$$\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma R_\mathrm{h}\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} j_r &= \sigma E + \sigma R_\mathrm{h} j_\theta B_0 \\ j_\theta &= -\sigma R_\mathrm{h} j_r B_0 \\ j_z &= 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{j}$ est donc $\vec{j} = j_r\vec{e}_r + j_\theta\vec{e}_\theta$, normal à l'axe Oz.
Le champ $\vec{E}$ étant selon $\vec{e}_r$, il forme un angle α avec $\vec{E}$ tel que

$$\tan\alpha = \frac{j_\theta}{j_r} = -\sigma R_\mathrm{h} B_0.$$

Cet angle est constant.
Les lignes de courant font donc avec $\vec{E}$ un angle α constant.

5.c) Des équations précédentes on tire

$$j_r = \sigma E + \sigma R_\mathrm{h}(-\sigma R_\mathrm{h})B_0^2 j_r$$

soit

$$\left[1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2\right] j_r = \sigma E = j_0.$$

On a donc

$$\boxed{j_r = \frac{j_0}{1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}}.$$

5.d) On reprend le calcul de la première partie, en remplaçant σ_0 par $\dfrac{\sigma_0}{1+(\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}$. On en déduit immédiatement

$$R = \frac{1+(\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}{2\pi\sigma h}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

soit

$$\boxed{R = R_0\left[1+(\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2\right]}.$$

La variation relative de la résistance due à l'application du champ magnétique est donc

$$\boxed{\frac{R-R_0}{R_0} = (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}.$$

Pour le cuivre, on a $\dfrac{R-R_0}{R_0} = 1{,}8\times10^{-3}$.

Pour l'arséniure d'indium, on a $\dfrac{R-R_0}{R_0} = 0{,}5$.

La variation de la résistance est facilement mesurable avec les moins bons conducteurs (l'arséniure d'indium est un semi-conducteur).

➤ La magnétorésistance est utilisée pour mesurer des champs magnétiques.