Sujet d'entraînement n° 2 — Diffusion thermique

Diffusion thermique : loi de phoque ?

Le but de ce problème est de déduire la taille minimale des mammifères marins de l'équilibre entre les pertes thermiques par conduction et la production de chaleur par le métabolisme.
On note Γ la puissance thermique (en W) produite par le métabolisme.

1. Nous cherchons à relier la puissance thermique du métabolisme à la masse corporelle M sous la forme $\Gamma = aM^b$.

Les pertes thermiques se faisant par les échanges à la surface du corps, elles sont proportionnelles à la surface corporelle.

En supposant la masse volumique uniforme, à quelle caractéristique géométrique la masse est-elle proportionnelle ?

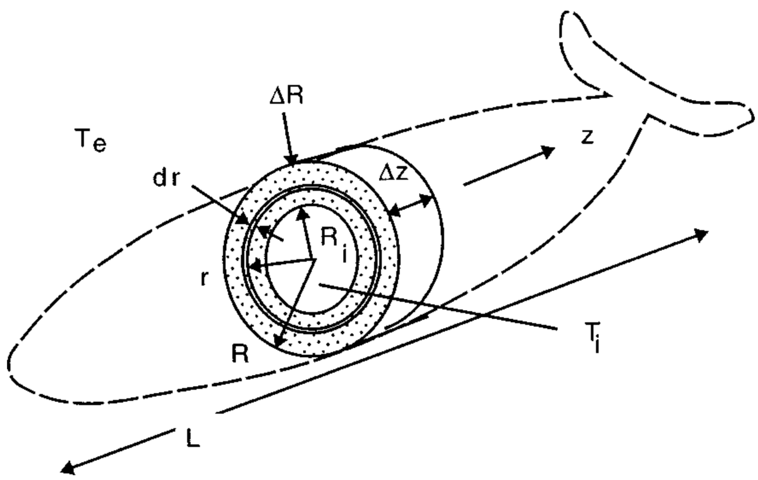
En se plaçant en régime stationnaire, par un raisonnement simple, déterminer la valeur de l'exposant b.

Cette loi a été étudiée en 1932 par M. Kleiber, qui aboutit à une loi empirique, valable « de la souris à l'éléphant » : $\Gamma = aM^b$, avec $a = 3{,}6$ § · I · et $b = 73$. Comparer à la valeur déterminée par analyse dimensionnelle.

On prendra $b = 0{,}73$ pour la suite du problème.

2. On modélise le mammifère marin par un cylindre de rayon R, constitué d'une partie centrale chaude de rayon R_i maintenue à la température T_i, protégée de l'extérieur à la température T_e par une couche de graisse d'épaisseur ΔR, de conductivité thermique λ (cf. figure).

On considère un cylindre de rayon r, avec $R_\mathrm{i} \leqslant r \leqslant R$ (sa surface latérale est dans la couche de graisse), de longueur Δz. On note $\Phi(r)$ le flux thermique sortant à travers ce cylindre.



Montrer que $\Phi(r)$ est indépendant de r en régime permanent. On le notera par la suite Φ.

3. Exprimer Φ en fonction de λ, $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ et d'autres données.

4. L'eau étant un bon conducteur thermique, nous considérerons qu'en régime permanent, la température cutanée est égale à la température extérieure : $T(R) = T_\mathrm{e}$.

En déduire la chute de température $\Delta T = T_\mathrm{i} - T_\mathrm{e}$ entre la partie centrale chaude de l'animal et l'extérieur, en fonction de λ, Φ, ΔR, R_i et Δz.

5. En considérant l'animal comme un cylindre de rayon constant de longueur L, déterminer alors le flux thermique total Φ_c en fonction de L, ΔR, R_i, λ et ΔT, .

6. Pour la plupart des mammifères aquatiques rapides, le rapport de leur diamètre sur leur longueur vérifie $0{,}2 \leqslant D/L \leqslant 0{,}3$. Nous prendrons pour la suite $D/L = 0{,}25$.

Exprimer alors le flux total Φ_c en fonction du rayon R, de λ, de ΔT et du rapport $x = \dfrac{\Delta R}{R_\mathrm{i}}$ de l'épaisseur de la couche de graisse sur le rayon de la partie chaude du corps.

7. Commenter le sens de variation de Φ_c avec x.

8. En notant ρ la masse volumique moyenne de l'animal de rayon R et de longueur L[1], écrire la puissance thermique Γ produite par le métabolisme en fonction de ρ, R et des coefficient empiriques a et b définis à la question 1.

9. Montrer qu'en régime permanent, on peut écrire entre R_i et ΔR la relation

$$R_i + \Delta R = B\left[\ln\left(1+\frac{\Delta R}{R_i}\right)\right]^C,$$

où B et C sont des constantes dont on déterminera les expressions.

10. En déduire la relation exprimant la variation du rapport graisseux $x = \dfrac{\Delta R}{R_i}$ en fonction du rayon R de l'animal, de b et de la constante B déterminée précédemment.

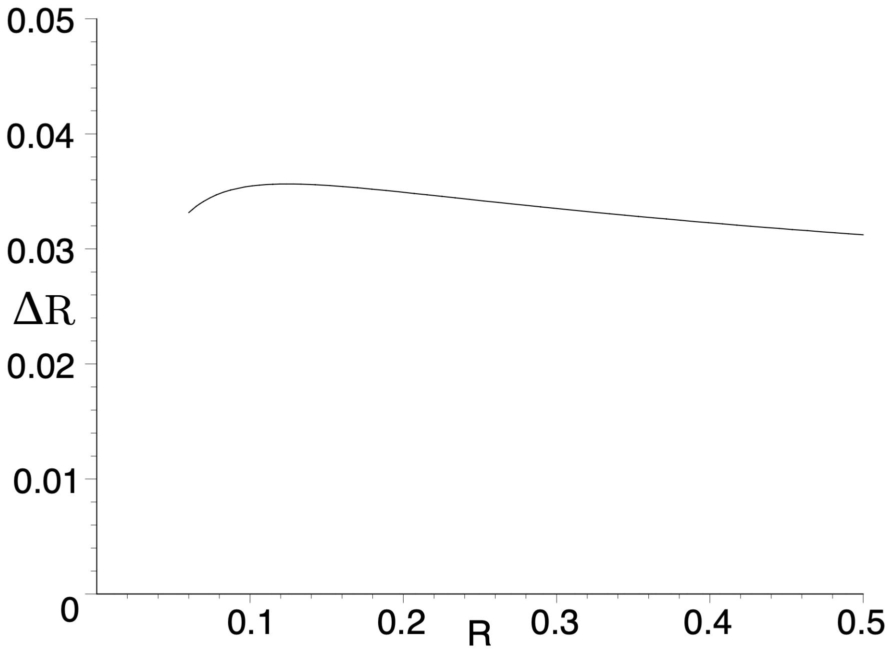
11. On donne : $T_i = 37\ °C$; $T_e = 4{,}0\ °C$; $a = 3{,}6$; $b = 0{,}73$; $\rho = 1000\ \mathrm{kg\cdot m^3}$; pour les tissus graisseux, $\lambda = 0{,}1\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.
Exprimer numériquement $x = f(R)$ et tracer la courbe correspondante.
Commentez.

12. Le volume de la masse graisseuse ne peut dépasser une certaine fraction du volume corporel total. Nous fixerons comme seuil $x_{\min} = 1$.

12.a) Quel est alors la fraction du volume corporel total occupé par le noyau central chaud ?

12.b) Montrer qu'on doit avoir $R \geqslant R_{\min}$, où $R_{\min}$ est le rayon minimal que peut avoir un mammifère marin. Déterminer l'expression de $R_{\min}$ en fonction de B et b, et calculer sa valeur.

13. Exprimer l'épaisseur ΔR de la couche de graisse en fonction de R et de $x(R)$.
On donne de graphe de ΔR en fonction de R :



Commentez. L'allure de la courbe dépend-elle de D/L, ΔT ou λ ?

Ce problème a été écrit à partir de l'article *Lower size limit of aquatic mammals*, de Boye K. Ahlborn et Robert W. Blake, paru dans l'*American Journal of Physics* (Am. J. Phys. 67 (10), October 1999).

1. On a toujours $D/L = 0{,}25$.

Solution

1. Les pertes sont proportionnelles à la surface corporelle, c'est-à-dire au carré de la dimension caractéristique de l'animal : $\Gamma \propto L^2$. La masse de l'animal est proportionnelle à son volume, c'est-à-dire $\boxed{M \propto L^3}$. On a donc $\Gamma \propto M^{2/3}$. On peut écrire $\Gamma = aM^b$, avec $\boxed{b = 2/3 \approx 0{,}67}$.
Le résultat empirique est assez proche du résultat théorique.
Complément : pour les petits animaux, il est en fait trop approximatif de dire que les pertes sont proportionnelles à la surface corporelle.

2. Considérons le tube de longueur Δz, de rayon r et d'épaisseur dr. Le bilan d'énergie en régime permanent s'écrit

$$0 = \Phi(r)\,\mathrm{d}t - \Phi(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = 0$, et $\boxed{\Phi(r) = \Phi}$ constante.
Le flux thermique est indépendant de r en régime permanent.

3. Considérons comme système le cylindre de longueur Δz et de rayon r. Le flux thermique sortant s'écrit

$$\Phi = 2\pi r\,\Delta z\, j(r),$$

soit en utilisant la loi de Fourier $j(r) = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$,

$$\boxed{\Phi = -2\pi r\,\Delta z\lambda\frac{\mathrm{d}T(r)}{\mathrm{d}r}}.$$

Remarque : le flux sortant est bien positif, car la température décroît dans la couche graisseuse.

4. D'après l'expression de Φ, on a

$$\mathrm{d}T = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda\,\Delta z}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Le flux Φ étant indépendant de r, cette relation s'intègre sur la largeur de la couche graisseuse :

$$\int_{T_\mathrm{i}}^{T_\mathrm{e}}\mathrm{d}T = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda\,\Delta z}\int_{R_\mathrm{i}}^{R_\mathrm{i}+\Delta R}\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

soit en posant $\Delta T = T_\mathrm{i} - T_\mathrm{e}$,

$$\boxed{\Delta T = \frac{\Phi}{2\pi\lambda\,\Delta z}\ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_\mathrm{i}}\right)}.$$

5. Le flux à travers une longueur Δz vaut

$$\Phi = \frac{2\pi\lambda\Delta T}{\ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_\mathrm{i}}\right)}\Delta z.$$

À travers longueur L de l'animal, le flux total vaut donc

$$\Phi_\mathrm{c} = \frac{\Phi}{\Delta z}L$$

soit

$$\boxed{\Phi_\mathrm{c} = \frac{2\pi\lambda L}{\ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_\mathrm{i}}\right)}\Delta T}.$$

6. On a $\dfrac{2R}{L} = 0{,}25$, soit $L = 8R$. Le résultat précédent s'écrit alors

$$\boxed{\Phi_\mathrm{c} = \frac{16\pi\lambda R}{\ln(1+x)}\Delta T}.$$

7. Le rapport x caractérise l'isolation thermique de l'animal : plus x est élevé, plus l'épaisseur de la couche de graisse relativement au rayon de l'animal est grande.
D'après l'expression obtenue, le flux total Φ_c est une fonction décroissante de x : **plus l'épaisseur relative de la couche isolante est important, plus les pertes sont faibles**, ce qui est attendu.

8. La volume de l'animal est $\pi R^2 \times 8R$; sa masse vaut alors $M = \rho 8\pi R^3$. On a donc

$$\boxed{\Gamma = a\left(8\pi\rho R^3\right)^b}.$$

9. Considérons comme système le phoque (longueur L).
En régime permanent, le bilan d'énergie s'écrit

$$0 = \delta U_\text{éch} + \delta U_\text{prod}$$

soit

$$0 = -\Phi_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t + \Gamma\,\mathrm{d}T,$$

d'où

$$a\left(8\pi\rho R^3\right)^b = 16\pi R\frac{\lambda\Delta T}{\ln(1 + \frac{\Delta R}{R_\mathrm{i}})}.$$

On a donc

$$R^{3b-1} = \frac{16\pi\lambda\Delta T}{a(8\pi\rho)^b}\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_\mathrm{i}}\right)\right]^{-1}.$$

Le rayon total $R = R_\mathrm{i} + \Delta R$ vérifie donc

$$\boxed{R_\mathrm{i} + \Delta R = \left(\frac{2\lambda\Delta T(8\pi)^{1-b}}{a\rho^b}\right)^{\frac{1}{3b-1}}\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_\mathrm{i}}\right)\right]^{-\frac{1}{3b-1}}}.$$

Le résultat est bien de la forme demandée, avec

$$\boxed{B = \left(\frac{16\pi\lambda\Delta T}{a(8\pi\rho)^b}\right)^{\frac{1}{3b-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = -\frac{1}{3b-1}}.$$

10. On a $R = B\,[\ln(1+x)]^{-\frac{1}{3b-1}}$, soit

$$\ln(1+x) = \left(\frac{R}{B}\right)^{-(3b-1)} = \left(\frac{B}{R}\right)^{3b-1},$$

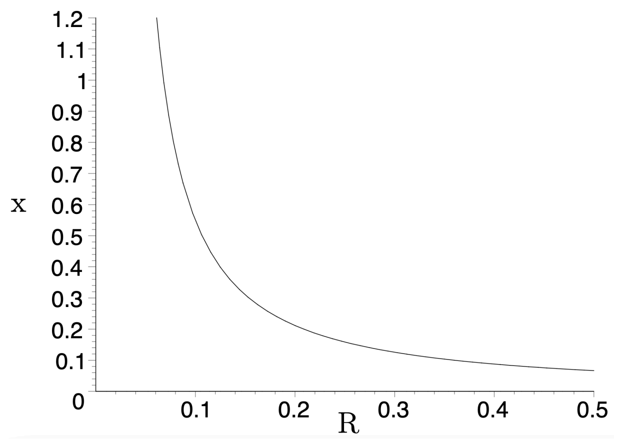
d'où

$$\boxed{x = \exp\left[\left(\frac{B}{R}\right)^{3b-1}\right] - 1}\,.$$

11. On calcule $B = 5{,}00 \cdot 10^{-2}$ m. Numériquement, l'épaisseur relative de graisse est donnée par

$$\boxed{x(R) = \exp\left[\left(\frac{0{,}05}{R}\right)^{1{,}19}\right] - 1}\,.$$

On trace la courbe $x = f(R)$:



Plus l'animal est petit, plus la couche de graisse prend une part importante de son volume corporel.

12. **12.a)** Pour $x = 1$, on a $\Delta R = R_\mathrm{i}$. Le volume du noyau chaud est $V_\mathrm{i} = \pi R_\mathrm{i}^2 L$. Le volume de la couche de graisse est

$$V_\mathrm{g} = [\pi(R_\mathrm{i} + \Delta R)^2 - \pi R_\mathrm{i}^2]L = 3\pi R_\mathrm{i}^2 L = 3V_\mathrm{i}\,.$$

Le volume corporel total vaut $V = V_\mathrm{g} + V_\mathrm{i} = 4V_\mathrm{i}$.

Pour x = 1, le noyau central n'occupe plus que 25 % du volume corporel total.

12.b) La courbe précédente nous montre que x est une fonction décroissante de R. Donc on aura $x \leqslant 1$ pour $R \geqslant R_\mathrm{min}$, avec $x(R_\mathrm{min}) = 1$.
De $R = B\,[\ln(1+x)]^{-\frac{1}{3b-1}}$, on tire

$$\boxed{R_\mathrm{min} = B\,[\ln 2]^{-\frac{1}{3b-1}}}\,.$$

On calcule $\boxed{R_\mathrm{min} = 6{,}8\text{ cm}}$.
C'est du même ordre de grandeur que la taille d'un bébé phoque.

13. On $R = R_\mathrm{i} + \Delta R = \dfrac{\Delta R}{x} + \Delta R$, d'où

$$\boxed{\Delta R = \frac{x(R)}{1 + x(R)} R}\,,$$

l'expression de $x(R)$ étant donnée précédemment.

Le graphe $x(R)$ fait apparaître que x reste à peu près constant quand R varie.

L'épaisseur de la couche de graisse d'un animal cylindrique ne dépend donc pas de la taille de l'animal.
C'est la valeur de b qui déterminer cette propriété. Les paramètres ΔT, λ et D/L n'ayant d'effet que sur le coefficient B, on peut dire que l'allure de la courbe ne dépend pas de ces paramètres.