Sujet d'entraînement n° 3 — Diffusion thermique

Étude du contact thermique

1 Réponse d'un milieu semi-infini à un choc thermique

On considère un milieu semi-infini ($x > 0$), de masse volumique ρ et de chaleur massique c, initialement à la température T_0. On y étudie la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel : $T(x, t)$.
À l'instant $t = 0$, on impose la température $T(0,0) = T_e$ à la paroi $x = 0$.
La condition initiale (juste avant le choc thermique) s'écrit $T(x,0) = T_0$.
La réponse du système est étudiée *après un intervalle de temps court* (cette condition est discutée en fin de problème) ; la partie du milieu très loin de la frontière n'étant pas affecté après un temps court, les conditions aux limites s'écrivent $T(0, t) = T_e$ et $T(\infty, t) = T_0$.
On note λ la conductivité thermique du matériau, ρ sa masse volumique et c sa chaleur massique.

1. Établir l'équation de la diffusion thermique. On introduira la diffusivité thermique $a = \lambda/(\rho c)$ du matériau.

2. On cherche une solution de l'équation de la chaleur sous la forme $T(x, t) = T(u)$, où l'on a posé

$$u = \frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

2.a) Quelle est la dimension de u (justifier la réponse) ?

2.b) On pose

$$T^*(u) = \frac{T(u) - T_e}{T_0 - T_e}.$$

Quelle est la dimension de cette grandeur ?
Avec la fonction $T^*(u)$, comment s'écrivent :

— la condition initiale $T(x,0) = T_0$?
— la condition à la frontière $T(0, t) = T_e$?
— la condition à la limite $T(\infty, t) = T_0$?

3. Montrer que l'on a

$$\frac{d^2T^*}{du^2} + 2u\frac{dT^*}{du} = 0.$$

4. En déduire [1] l'expression de $\frac{dT^*}{du}$ à une constante multiplicative près que l'on notera A.

5. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
On définit la fonction erreur :

$$\mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-v^2}\,dv,$$

avec $\mathrm{erf}(\infty) = 1$ et $\mathrm{erf}(0) = 0$.
Déterminer complètement $T^*(u)$ en fonction de $\mathrm{erf}(u)$.

6. En déduire l'expression de $T(x, t)$ sous la forme d'une intégrale.

1. On pourra poser $f(u) = \frac{dT^*}{du}$.

7. Montrer que le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$j_{\text{th}}(x,t) = -(T_0 - T_e)\frac{b}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right),$$

où b est un coefficient appelé *effusivité* du matériau, que l'on exprimera en fonction de λ, ρ et c.

8. Quelle est la profondeur ℓ caractéristique de la diffusion thermique à l'instant t ?

Le milieu n'est pas semi-infini, mais de profondeur L. L'étude menée précédemment décrit la réponse du système pour un « intervalle de temps court ».

Donner une condition sur t pour que le modèle du milieu semi-infini reste valable.

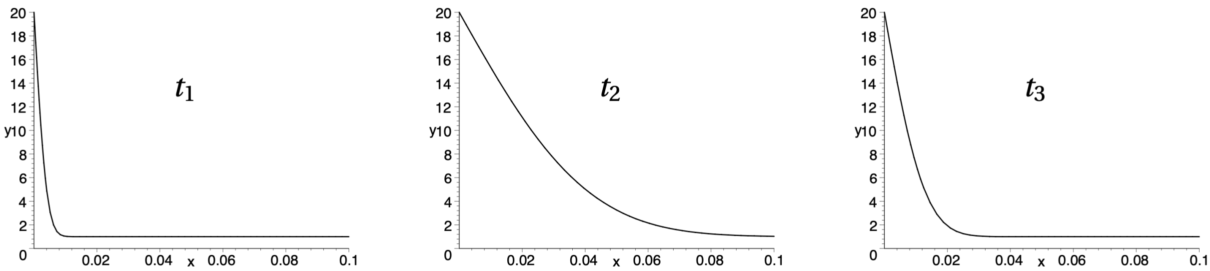
Quelle hypothèse n'est plus valable après un temps plus long ?

9. On considère un mur de brique de 10 cm d'épaisseur.

Pour la brique à température ambiante, les données sont $\lambda = 0{,}69\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; $\rho = 1600\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $c = 840\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Le mur est initialement à la température $T_0 = 1$ °C, et on applique en $t = 0$ à la face $x = 0$ la température $T_e = 20$ °C.

On représente $T(x,t)$ en fonction de x à différents instants.



9.a) Classer les dates t_1, t_2 et t_3 par ordre croissant (justifier la réponse).

9.b) La durée la plus grande parmi les graphes précédents est de 1000 s. La condition établie à la question 8 sur t est-elle vérifiée ? Le modèle du milieu semi-infini est-il valide ?

2 Mise en contact thermique de deux corps

On considère deux corps semi-infinis, notés 1 et 2, initialement aux températures respectives T_{01} et T_{02}, mis brusquement en contact thermiques à l'instant $t = 0$.

On ne s'intéresse à l'évolution du système qu'aussitôt après la mise en contact ; on est alors en droit de considérer les milieux comme semi-infinis, comme on l'a montré dans la première partie.

Chaque corps est caractérisé par sa conductivité thermique λ_i, sa masse volumique ρ_i, sa chaleur massique c_i, sa diffusivité thermique a_i et son effusivité $b_i = \sqrt{\lambda_i \rho_i c_i}$.

Le milieu 1 correspond à $x < 0$ et le milieu 2 à $x > 0$, la surface de contact étant le plan $x = 0$.

1. Par analogie avec la première partie, écrire sans les établir les deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $T_1(x,t)$ et $T_2(x,t)$.

2. 2.a) Que peut-on dire de $T_1(0,t)$ et de $T_2(0,t)$?

2.b) Que peut-on dire du flux thermique en $x = 0$? Justifiez votre réponse brièvement.

En déduire une relation entre $\dfrac{\partial T_1}{\partial x}(0,t)$ et $\dfrac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)$.

2.c) D'après les conditions initiales, déterminer $T_1(-\infty,t)$, $T_1(x,0)$ pour $x < 0$, $T_2(+\infty,t)$ et $T_2(x,0)$ pour $x > 0$.

3. Comme lors de l'étude précédente, on pose

$$u_1 = \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}},$$

et[2]

$$T_1^*(u) = \frac{T_1 - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad \text{et} \quad T_2^*(u) = \frac{T_2 - T_{02}}{T_{01} - T_{02}}\,.$$

3.a) Montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_1^*}{\mathrm{d}u_1^2} + 2u_1 \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 T_2^*}{\mathrm{d}u_2^2} + 2u_2 \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2} = 0\,.$$

3.b) Comment s'écrivent les conditions initiales et aux limites ?

3.c) Montrer que l'on a

$$b_1 \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}(0) + b_2 \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}(0) = 0\,.$$

3.d) Montrer que l'on a

$$T_1^*(0) + T_2^*(0) = 1\,.$$

3.e) L'intégration des équations établies à la question 3.a conduit à

$$\frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1} = A_1\,\mathrm{e}^{-u_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2} = A_2\,\mathrm{e}^{-u_2^2}\,,$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes.

En déduire une relation entre b_1, b_2, A_1 et A_2.

3.f) On définit la fonction erreur complémentaire :

$$\mathrm{erfc}(u) = 1 - \mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v\,.$$

Exprimer $T_1^*(u_1)$ et $T_2^*(u_2)$ respectivement en fonction de $\mathrm{erfc}(u_1)$ et $\mathrm{erfc}(u_2)$.

3.g) Montrer que $A_1 - A_2 = 2/\sqrt{\pi}$.

3.h) Montrer finalement que

$$\frac{T_1(x,t) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{b_2}{b_1 + b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)$$

et

$$\frac{T_2(x,t) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)\,.$$

3.i) En déduire la température du point de contact en $x = 0$ en fonction des températures initiales des deux corps T_{01} et T_{02}, et des effusivités b_1 et b_2.

3.j) Que peut-on dire de la température du point de contact si $b_1 \gg b_2$?

L'effusivité de la peau est $b_\mathrm{p} \approx 1600$ SI, celle du bois $b_\mathrm{b} \approx 11$ SI et celle de l'acier $b_\mathrm{a} \approx 13\,000$ SI. Expliquer la différence de sensation si on touche ($T_\mathrm{peau} = 37$ °C) un morceau de bois ou un morceau d'acier à la même température de 60 °C, peu après le contact.

Que se passe-t-il si l'on garde le contact plus longtemps ?

Ce problème a été écrit à partir de l'ouvrage *Transferts thermique, introduction aux sciences des transferts*, de Jean Taine et Jean-Pierre Petit (éditions Dunod).

2. Ces variables sont choisies de façon à garder la symétrie du problème.

Solution

3 Réponse d'un milieu semi-infini à un choc thermique

1. On considère la tranche comprise entre les sections x et $x+\mathrm{d}x$. Le bilan d'énergie pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t S\,\mathrm{d}x = -\Phi(x,t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{a=\frac{\lambda}{\rho c}}.$$

2. 2.a) De l'équation de la diffusion thermique on déduit immédiatement l'équation aux dimensions :

$$T^{-1} = [a]L^{-2}.$$

On a donc $[a] = L^2T^{-1}$. On en déduit $\boxed{[u]=1}$: **la grandeur u est sans dimension.**

2.b) On a $\boxed{[T^*]=1}$; cette grandeur est sans dimension.

- Le couple $(x, t = 0)$ correspond à $u\to\infty$; la condition initiale $T(x,0) = T_0$ s'écrit alors $T^*(\infty) = 1$.
- Le couple $(x = 0, t)$ correspond à $u = 0$. La condition à la frontière $T(0,t) = T_\mathrm{e}$ s'écrit donc $T^*(0) = 0$.
- Le couple $(x\to\infty, 0)$ correspond à $u\to\infty$; la condition $T(\infty,0) = T_0$ s'écrit alors $T^*(\infty) = 1$.

Les trois conditions proposées se ramènent alors à deux conditions sur $T^*(u)$:

$$\boxed{T^*(0)=0} \quad \text{et} \quad \boxed{T^*(\infty)=1}.$$

3. On a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\frac{x}{2\sqrt{a}}\left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right) = -\frac{u}{2t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}.$$

D'après la définition de T^*, on a

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u} = (T_0-T_\mathrm{e})\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u},$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(T_0-T_\mathrm{e})\frac{u}{2t}\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u}.$$

On a

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{at}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u},$$

et de même

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4at}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}u^2} = \frac{T_0-T_\mathrm{e}}{4at}\frac{\mathrm{d}^2T^*}{\mathrm{d}u^2}.$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors après simplification

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2T^*}{\mathrm{d}u^2}+2u\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u}=0}.$$

4. Posons $f(u) = \dfrac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u}$. L'équation différentielle précédente s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}+2uf=0,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -2u\,\mathrm{d}u.$$

Cette équation différentielle s'intègre en

$$f(u) = A\mathrm{e}^{-u^2},$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T^*(u)}{\mathrm{d}u} = A\mathrm{e}^{-u^2}}.$$

5. On a donc $\mathrm{d}T^* = A\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. Compte tenu des conditions aux limites, on a

$$\int_0^1 \mathrm{d}T^* = A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

soit

$$1 = A\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a donc $A = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, et

$$\mathrm{d}T^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

d'où

$$\int_0^{T^*(u)}\mathrm{d}T^* = T^*(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \mathrm{e}^{-u'^2}\,\mathrm{d}u',$$

D'après la définition de la fonction erreur, on a donc

$$\boxed{T^*(u) = \mathrm{erf}(u)}.$$

6. On a donc

$$\frac{T(x,t)-T_e}{T_0-T_e}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}e^{-u^2}\,du,$$

d'où

$$\boxed{T(x,t)=T_e+(T_0-T_e)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}e^{-u^2}\,du}.$$

7. Le vecteur densité de courant thermique est donné par la loi de Fourier

$$j_{th}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Comme

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T_0-T_e}{2\sqrt{at}}\frac{dT^*}{du},$$

et

$$\frac{dT^*}{du}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2},$$

on a

$$j_{th}=-(T_0-T_e)\frac{\lambda}{2\sqrt{at}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}$$
$$=-(T_0-T_e)\sqrt{\frac{\lambda\rho c}{\pi t}}e^{-u^2}$$

en utilisant la définition de a.

Le vecteur densité de courant thermique s'écrit donc

$$\boxed{j_{th}(x,t)=-(T_0-T_e)\frac{b}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)},$$

avec $\boxed{b=\sqrt{\lambda\rho c}}$, effusivité du matériau.

8. Le flux thermique décroît exponentiellement avec une longueur caractéristique à l'instant t : $\boxed{\ell=\sqrt{at}}$.

Si le milieu est de profondeur L, le modèle précédent sera valable tant que $\ell \ll L$, soit $\boxed{t\ll L^2/a}$.

Après un temps plus long, on ne peut plus écrire la condition aux limites $T(\infty,t)=T_0$.

9. 9.a) L'élévation de température se propage dans le milieu au cours du temps. On a donc $\boxed{t_1<t_3<t_2}$.

9.b) Avec les données numériques, on calcule $L^2/a\approx 20000$ s.

Avec $t_2=1000$ s, on peut dire que $t_2\ll L^2/a$.

La condition établie à la question 8 sur t est bien vérifiée, et le modèle du milieu semi-infini est valide.

4 Mise en contact thermique de deux corps

1. Les températures vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial t}&=a_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\quad \text{pour } x<0\\ \frac{\partial T_2}{\partial t}&=a_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}\quad \text{pour } x>0,\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{a_1=\frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1}}\quad \text{et}\quad \boxed{a_2=\frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}}.$$

2. 2.a) La température étant continue, on a au point de contact $x=0$: $\boxed{T_1(0,t)=T_2(0,t)}$.

2.b) Il ne peut y avoir accumulation d'énergie dans une tranche infiniment mince centrée en $x=0$. On a donc **continuité du flux thermique en $\mathbf{x=0}$**.

Compte tenu de la loi de Fourier, la relation $j\text{th}(x=0^-,t)=j_{th}(0^+,t)$ s'écrit

$$\boxed{\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t)=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)}.$$

2.c) Les conditions initiales s'écrivent :

$$\boxed{T_1(x,0)=T_{01}}\quad \text{et}\quad \boxed{T_2(x,0)=T_{02}}.$$

Dans le cas de milieux semi-infinis, on a

$$\boxed{T_1(-\infty,t)=T_{01}}\quad \text{et}\quad \boxed{T_2(\infty,t)=T_{02}}.$$

3. 3.a) Les calculs sont similaires à ceux de la question 1.3 ; on a

$$\boxed{\frac{d^2T_1^*}{du_1^2}+2u_1\frac{dT_1^*}{du_1}=0\quad \text{pour } u_1<0}$$

et

$$\boxed{\frac{d^2T_2^*}{du_2^2}+2u_2\frac{dT_2^*}{du_2}=0\quad \text{pour } u_2>0.}$$

3.b) Comme les cas $x\to-\infty$ et $t\to 0$ reviennent à $u_1\to-\infty$, les conditions initiale et aux limites dans le milieu 1 se résument à $\boxed{T_1^*(-\infty)=0}$.

De même dans le milieu 2, on a $\boxed{T_2^*(+\infty)=0}$.

3.c) On a

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{a_1 t}}\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}u_1} = \frac{T_{02}-T_{01}}{2\sqrt{a_1 t}}\frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}$$

et

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{a_2 t}}\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}u_2} = \frac{T_{01}-T_{02}}{2\sqrt{a_2 t}}\frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}.$$

La condition de continuité (en x_0, soit $u_{1,2}=0$) du flux thermique établie en 2.2.b s'écrit donc

$$-\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}(0) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}(0).$$

On a $\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{\lambda_1\sqrt{\rho_1 c_1}}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\lambda_1\rho_1 c_1} = b_1$ (de même dans le milieu 2), d'où

$$\boxed{b_1\frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}(0) + b_2\frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}(0) = 0}.$$

3.d) Soit $T_0 = T_1(0,t) = T_2(0,t)$ la température commune au point de contact (condition de continuité). On a alors

$$T_1^*(0) = \frac{T_0 - T_{01}}{T_{02}-T_{01}} \quad \text{et} \quad T_2^*(0) = \frac{T_0 - T_{02}}{T_{01}-T_{02}}.$$

On en déduit $\boxed{T_1^*(0) + T_2^*(0) = 1}$.

3.e) La relation de continuité du flux établie en 3.c s'écrit

$$\boxed{b_1 A_1 + b_2 A_2 = 0}.$$

3.f) On a

$$\int_{T_2^*(u_2)}^{0} \mathrm{d}T_2^* = A_2\int_{u_2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u_2^2}\,\mathrm{d}u_2$$

soit

$$T_2^*(u_2) = -A_2\int_{u_2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u_2'^2}\,\mathrm{d}u_2'$$

d'où

$$\boxed{T_2^*(u_2) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}A_2\,\mathrm{erfc}(u_2)}.$$

De même

$$\int_0^{T_1^*(u_1)} \mathrm{d}T_1^* = A_1\int_{-\infty}^{u_1} \mathrm{e}^{-u_1'^2}\,\mathrm{d}u_1'$$
$$= -A_1\int_{+\infty}^{-u_1} \mathrm{e}^{-u_1'^2}\,\mathrm{d}u_1' = A_1\int_{-u_1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u_1'^2}\,\mathrm{d}u_1'$$

soit

$$\boxed{T_1^*(u_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}A_1\,\mathrm{erfc}(-u_1)}.$$

3.g) Comme $\mathrm{erfc}(0)=1$, la relation du 2.3.e s'écrit

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{2}A_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}A_1 = 1,$$

soit

$$\boxed{A_1 - A_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}}.$$

3.h) On a donc le système

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \\ b_1 A_1 + b_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$A_1 = \frac{2b_2}{(b_1+b_2)\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{2b_1}{(b_1+b_2)\sqrt{\pi}}.$$

On en déduit

$$T_1^*(u_1) = \frac{b_2}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}(-u_1)$$

et

$$T_2^*(u_2) = \frac{b_1}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}(u_2),$$

soit

$$\boxed{\frac{T_1(x,t)-T_{01}}{T_{02}-T_{01}} = \frac{b_2}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)} \quad \text{pour } x \leqslant 0$$

et

$$\boxed{\frac{T_2(x,t)-T_{01}}{T_{01}-T_{02}} = \frac{b_1}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)} \quad \text{pour } x \geqslant 0$$

3.i) Comme $\mathrm{erfc}(0)=1$, on a

$$\frac{T_1(0,t)-T_{01}}{T_{02}-T_{01}} = \frac{b_2}{b_1+b_2} \quad \text{et} \quad \frac{T_2(x,t)-T_{01}}{T_{01}-T_{02}} = \frac{b_1}{b_1+b_2}.$$

La température de contact vaut

$$T_\mathrm{c}(t) = T_1(0,t) = T_2(0,t),$$

soit

$$\boxed{T_\mathrm{c}(t) = \frac{b_1 T_{01} + b_2 T_{02}}{b_1+b_2}}.$$

La température de contact, qui s'établit immédiatement après celui-ci, prend une valeur intermédiaire (moyenne pondérée par les effusivités des milieux) entre celles des températures T_{10} et T_{02} des deux corps en contact.

3.j) Si $b_1 \gg b_2$, on a $T_\mathrm{c} \approx T_{01}$: le corps de plus grande effusivité tend à imposer sa température à l'autre.

corps 1	corps 2	température de contact
peau à 37 °C	bois à 60 °C	37,2 °C
peau à 37 °C	acier à 60 °C	57,5 °C

La sensation n'est pas du tout la même !

D'après le modèle utilisé, la température de contact se maintient indéfiniment dans le temps. En fait, ce modèle reste valable tant que l'on peut considérer le milieu comme semi-infini, c'est-à-dire « aux temps courts » tels que $a_1 t/L_1^2 \ll 1$ et $a_2 t/L_2^2 \ll 1$. Si le contact entre la peau et un morceau bois dure longtemps, on finit par se brûler !