TP n° 5 Filtrage numérique

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Électronique numérique	
Filtrage numérique.	**Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.**

1 — Principe du filtrage numérique

On dispose d'un signal $e(t)$, et on souhaite obtenir le signal $s(t)$ obtenu à la sortie d'un filtre linéaire.

1. Dans le cas d'un filtre passe-bas du premier ordre, la fonction de transfert peut s'écrire

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}\omega\tau}\,. \tag{1}$$

1.a) En déduire l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$.

1.b) Donner la relation entre la fréquence de coupure f_c et τ ainsi que entre f_c et ω_0..

Le signal $e(t)$ est échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e. On dispose donc d'un ensemble de N valeurs $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ avec $e_n = e(t_n = nT_e)$.
Le filtrage numérique consiste à calculer les valeurs du signal de sortie $\{s_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ (où $s_n = s(nT_e)$) à partir des valeurs du signal d'entrée.
La transformation permettant de passer de $\{e_n\}$ à $\{s_n\}$ doit respecter le **principe de causalité**, selon lequel le signal de sortie s_n évalué à l'instant $t_n = nT_e$ ne peut dépendre que :

— des valeurs présente et antérieures de $e(t)$, soit e_p pour $p \leqslant n$;

— des valeurs antérieures de $s(t)$, soit s_p pour $p < n$.

La relation permettant de calculer le signal de sortie est donc de la forme

$$s_n = f(e_n, e_{n-1}, \dots, s_{n-1}, s_{n-2}, \dots)\,.$$

2. À partir du développement de Taylor de $s_{n+1} = s(t_n + T_e)$, donner l'approximation au premier ordre de la dérivée $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_n)$ en fonction de s_n, s_{n+1} et T_e.
À quelle condition ce développement est-il justifié ?

3. Montrer que le signal de sortie correspondant au filtre dont la fonction de transfert est donnée par (1) se ramène à une relation de récurrence de la forme

$$s_n = Ae_{n-1} + Bs_{n-1} \tag{2}$$

où l'on exprimera les coefficients A et B en fonction de T_e, τ et H_0.

2 — Mise en œuvre expérimentale

2.1 Principe

Le filtrage numérique comprend trois étapes :

— la tension $e(t)$ analogique est d'abord convertie en un signal numérique $\{e_n\}$ par l'échantillonnage effectué par le convertisseur analogique-numérique (CAN) ;

— le calculateur permet de déterminer le signal numérique filtré $\{s_n\}$;

— un convertisseur numérique-analogique permet ensuite de générer la tension analogique $s(t)$ correspondante.

L'interface SYSAM, commandée par LatisPro, permet d'effectuer ces trois étapes.

2.2 Réalisation expérimentale : filtre passe-bas

Le signal est généré par un GBF ; son acquisition se fait en utilisant l'entrée EA0 de l'interface Sysam, et la restitution du signal calculé se fait en utilisant la sortie SA1.
On visualisera en parallèle sur l'oscilloscope l'entrée EA0 et la sortie SA1.

2.2.1 Paramètres d'acquisition et de calcul

Les **paramètres d'acquisition** sont fixés à :

— $T_e = 200\ \mu s$;

— $N = 10\,000$ points.

Les **paramètres du filtre** sont :

1. $H_0 = 1$;

2. $f_c = 100$ Hz.

4. Quelle est la valeur de la fréquence d'échantillonnage ?

2.2.2 Génération du signal filtré

Dans le logiciel LatisPro, l'option Traitement permet d'ouvrir une feuille de calcul (F3).

5. Après l'avoir complété [1], entrer le code suivant :

```
1 Te =
2 fc =
3 omega0 =
4 S[n] =
```

La ligne 6 définit la liste s (en la remplissant de zéros).
La ligne 7 calcule les éléments de cette liste à l'aide de la relation de récurrence.

➤ Quand le code est rentré (ou modifié), il faut l'exécuter (F2).

6. Afin de générer le signal calculé par l'interface Sysam, il faut régler les paramètres d'émission dans LatisPro.

— ouvrir la fenêtre de paramétrage en cliquant sur  ;
— cocher Sortie active et dans la liste Courbes sélectionner S ;
— cocher le mode GBF afin d'émettre le signal calculé en continu [2].

2.3 Effets d'un filtre passe-bas

7. Prendre comme signal d'entrée une sinusoïde de fréquence $f = 100$ Hz, d'amplitude $U_e = 10$ V. Faire l'acquisition et observer à l'oscilloscope le signal filtré calculé. Commenter son aspect.

8. Dans les paramètres d'acquisition de Sysam, régler $T_e = 10\ \mu s$.
Modifier en conséquence la ligne 1 du code calculant le signal filtré [3].
Comment est modifié le signal calculé ?
Mesurer l'amplitude du signal d'entré et l'amplitude du signal filtré numériquement. Comparer à la valeur théorique attendue.

9. Prendre comme signal $e(t)$ un signal rectangulaire de fréquence $f = 100$ Hz. Commenter le signal de sortie observé.

10. Même question avec un signal $e(t)$ triangulaire de fréquence identique.

11. Le signal d'entrée $e(t)$ est une sinusoïde de fréquence $f = 4{,}9$ kHz. Observer et expliquer le signal de sortie pour les paramètres suivants :

11.a) $T_e = 200\ \mu s$.

11.b) $T_e = 20\ \mu s$.

---

1. La valeur 2×10^{-4} se code 2e-4.
2. À partir d'une acquisition de N points, LatisPros calcule N valeurs du signal de sortie ; ce dernier a donc une durée NT_e. Le mode GBF émet en continu le signal calculé.
3. Ne pas oublier de relancer une exécution de la feuille de calcul (F2)

2.4 Effet d'un filtre passe-bande

On considère un filtre passe-bande de fonction de transfert

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

de facteur de qualité Q et de fréquence centrale $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$.

L'équation différentielle reliant la tension de sortie $s(t)$ à la tension d'entrée $e(t)$ est

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s(t) = \frac{\omega_0 H_0}{Q}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

12. En utilisant la méthode de la question 3, montrer que la dérivée seconde peut être approximée par la différence finie

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t_n) = \frac{s[n+2] - 2s[n+1] + s[n]}{T_\mathrm{e}^2}.$$

13. Écrire la relation (3) à l'instant t_{n-2}, et en déduire l'expression de $s[n]$ en fonction de $s[n-1]$, $s[n-2]$, $e[n-1]$ et $e[n-2]$.

14. Écrire la feuille de calcul correspondant à ce filtre sur Latis-Pro.

Pour la suite, on prendra comme paramètres d'acquisition $N = 10\,000$, $T_\mathrm{e} = 20\ \mu\mathrm{s}$.

15. Le signal d'entrée est un signal rectangulaire de fréquence $f = 100$ Hz.

Les caractéristiques du filtre sont $f_0 = 100$ Hz et $Q = 20$. Observer en commenter l'effet du filtre.

16. Le signal d'entrée est un signal rectangulaire de fréquence $f = 300$ Hz.

Les caractéristiques du filtre sont $f_0 = 900$ Hz et $Q = 20$. Observer en commenter l'effet du filtre ; discuter de l'effet du facteur de qualité, en prenant $Q = 1/3$, $Q = 5$, $Q = 100$.

17. On prend comme période d'échantillonnage $T_\mathrm{e} = 20\ \mu\mathrm{s}$.

Le filtre a pour caractéristiques $f_0 = 100$ Hz et $Q = 5$.

Le signal $e(t)$ est sinusoïdal de fréquence f. Discuter du signal de sortie obtenu dans les cas suivants :

17.a) $f = 100$ Hz ;

17.b) $f = 1$ kHz ;

17.c) $f = 10$ kHz ;

17.d) $f = 49{,}9$ kHz ;

18. Le signal d'entrée $e(t)$ est un signal rectangulaire de fréquence f, le filtre est inchangé. Discuter du signal de sortie obtenu dans les cas suivants :

18.a) $f = 100$ Hz ;

18.b) $f = 400$ Hz ;

18.c) $f = 49{,}8$ kHz.