Colle de physique — semaine n° 8 — Sujet 2 — solution

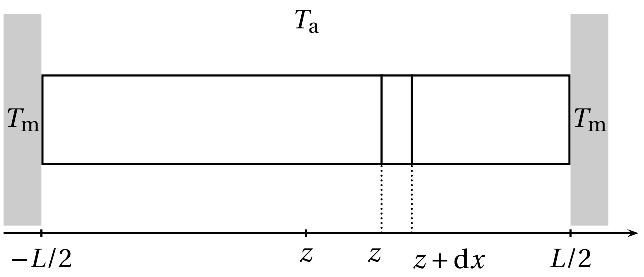
Exercice : température dans une poutre

On considère une poutre de longueur L, de section circulaire de rayon a et de conductivité thermique λ placée entre deux murs de température T_m. On note T_a la température de l'air entourant la poutre et h le coefficient de transfert conducto-convectif.
On considère le régime permanent atteint. Le point O, origine de l'axe Oz pris dans le sens de la longueur de la poutre, est placé au milieu de celle-ci.

1. Déterminer le profil de température $T(z)$ dans la poutre.

2. Quel est le transfert thermique entre la poutre et l'air ?

Solution



1. Système : tranche entre z et $z+\mathrm{d}z$.
Bilan d'énergie en régime stationnaire entre t et $t+\mathrm{d}t$:

$$0 = \delta Q_{\text{reçu}} = +\Phi(z)\,\mathrm{d}t - \Phi(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}t - \delta Q_{\text{c.c.}}.$$

Le transfert conducto-convectif à travers la surface latérale $\mathrm{d}S = 2\pi a\,\mathrm{d}z$ est donné par la loi de Newton :

$$\delta Q_{\text{c.c.}} = h[T(z)-T_a]2\pi a\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$0 = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z - h[T(z)-T_a]2\pi a\,\mathrm{d}z,$$

avec

$$\Phi(z) = j_Q(z)\pi a^2 = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\pi a^2$$

d'où

$$0 = -\lambda\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2}\pi a^2 - h[T(z)-T_a]2\pi a$$

La température vérifie donc l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} - \frac{T(z)-T_a}{\delta^2} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}}.$$

➤ On a posé δ comme longueur caractéristique ; sa dimension se détermine à partir de l'équation différentielle dont les deux termes ont même dimension.

On peut écrire la solution de l'équation différentielle comme somme d'exponentielles ou de fonctions trigonométriques hyperboliques. La situation étant paire ($z=0$ est un point de symétrie), on a intérêt à choisir les fonctions cosh et sinh qui sont respectivement paires et impaires :

$$T(z) = T_a + A\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right) + B\sinh\left(\frac{z}{\delta}\right).$$

De $T(-L/2) = T(L/2)$ on déduit $B = 0$.
Il reste

$$T(L/2) = T_m = T_a + A\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)$$

d'où

$$A = \frac{T_m - T_a}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}$$

On a donc

$$\boxed{T(z) = T_a + \frac{T_m - T_a}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}.$$

2. On peut calculer le transfert thermique total Φ_{tot} entre la poutre et l'air de deux façons.

1re méthode : calcul direct

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tot}} = \int \delta\Phi_{\text{c.c.}} &= \int_{-L/2}^{L/2} h[T(z)-T_a]2\pi a\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{2\pi a h}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}(T_m - T_a)\int_{-L/2}^{L/2}\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{4\pi a h}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}(T_m - T_a)\int_{0}^{L/2}\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

en utilisant la parité de $\cosh(z/\delta)$, soit

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tot}} &= \frac{4\pi a h}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}\delta(T_m - T_a)\left[\sinh\left(\frac{z}{\delta}\right)\right]_0^{L/2} \\ &= 4\pi a h\delta(T_m - T_a)\frac{\sinh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\Phi_{\text{tot}} = 4\pi a h \delta (T_{\text{m}} - T_{\text{a}}) \tanh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}\,.$$

2e méthode : bilan d'énergie

On effectue un bilan d'énergie entre t et $t+\mathrm{d}t$ en prenant comme système la poutre entière :

$$0 = \Phi(-L/2)\,\mathrm{d}t - \Phi(L/2)\,\mathrm{d}t - \Phi_{\text{tot}}\,\mathrm{d}t$$

d'où, comme $\Phi(L/2) = -\Phi(-L/2)$ par parité

$$\Phi_{\text{tot}} = 2\Phi(-L/2)$$

avec

$$\Phi(z) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} \pi a^2 = -\frac{\lambda \pi a^2}{\delta} \frac{T_{\text{m}} - T_{\text{a}}}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)} \sinh\left(\frac{z}{\delta}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tot}} = -\frac{2\lambda\pi a^2}{\delta} \frac{T_{\text{m}} - T_{\text{a}}}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)} \sinh\left(-\frac{L}{2\delta}\right) \\ = \frac{2\lambda\pi a^2}{\delta} \frac{T_{\text{m}} - T_{\text{a}}}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)} \sinh\left(\frac{L}{2\delta}\right)\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\Phi_{\text{tot}} = \frac{2\lambda\pi a^2}{\delta} (T_{\text{m}} - T_{\text{a}}) \tanh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}\,.$$

➤ Les deux expressions sont bien identiques.
On a d'une part

$$4\pi a h \delta = 4\pi a h \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} = 2\sqrt{2}\pi \sqrt{\lambda h a^3}$$

et d'autre part

$$\frac{2\lambda\pi a^2}{\delta} = 2\lambda\pi a^2 \sqrt{\frac{2h}{\lambda a}} = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\lambda h a^3}\,.$$

➤ On peut cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme

$$T(z) = T_{\text{a}} + A\,\mathrm{e}^{-z/\delta} + B\,\mathrm{e}^{z/\delta}\,.$$

On a alors pour $z = -L/2$ et $z = L/2$

$$\begin{cases} T_{\text{m}} - T_{\text{a}} = A\,\mathrm{e}^{-L/(2\delta)} + BA\,\mathrm{e}^{L/(2\delta)} \\ T_{\text{m}} - T_{\text{a}} = A\,\mathrm{e}^{L/(2\delta)} - BA\,\mathrm{e}^{-L/(2\delta)}\,. \end{cases}$$

En faisant la différence de ces deux équations, on obtient

$$0 = (A - B)\left(\mathrm{e}^{-L/(2\delta)} - \mathrm{e}^{L/(2\delta)}\right)$$

d'où $A = B$.
En faisant la somme de ces deux équations, on obtient

$$\begin{aligned}2(T_{\text{m}} - T_{\text{a}}) &= (A+B)\left(\mathrm{e}^{-L/(2\delta)} + \mathrm{e}^{L/(2\delta)}\right) \\ &= 2A\left(\mathrm{e}^{-L/(2\delta)} + \mathrm{e}^{L/(2\delta)}\right)\end{aligned}$$

d'où

$$A = B = \frac{T_{\text{m}} - T_{\text{a}}}{\mathrm{e}^{L/(2\delta)} + \mathrm{e}^{-L/(2\delta)}}$$

et

$$\boxed{T(z) = T_{\text{a}} + \frac{T_{\text{m}} - T_{\text{a}}}{\mathrm{e}^{L/(2\delta)} + \mathrm{e}^{-L/(2\delta)}}\left(\mathrm{e}^{z/\delta} + \mathrm{e}^{-z/\delta}\right)}\,.$$

On retrouve la même expression car

$$\frac{\cosh(z/\delta)}{\cosh(L/(2\delta))} = \frac{\mathrm{e}^{z/\delta + \mathrm{e}^{-z/\delta}}}{\mathrm{e}^{L/(2\delta)} + \mathrm{e}^{-L/(2\delta)}}$$