Cinématique des fluides

1 — Débit volumique

1. On considère un écoulement laminaire dont le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(M) = v_0 \frac{z}{a} \vec{e}_x \quad \text{pour } 0 \leqslant z \leqslant a.$$

1.a) Déterminer le débit volumique à travers un section normale à Ox, de largeur b selon Oy.

En déduire la vitesse moyenne V_{moy}, vitesse uniforme donnant le même débit volumique.

1.b) L'écoulement est-il incompressible ?

2. On considère un écoulement laminaire dont le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \vec{e}_z \quad \text{pour } 0 \leqslant r \leqslant a.$$

Ce champ des vitesses décrit l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon a.

2.a) Déterminer le débit volumique à travers une section normale à Oz.

En déduire la vitesse moyenne V_{moy}, vitesse uniforme donnant le même débit volumique.

2.b) L'écoulement est-il incompressible ?

2 — Écoulement radial

Un brumisateur émet, en régime stationnaire, des particules de fluide de façon sphérique et isotrope à partir d'un point O, avec un débit de masse D_{m}. Le champ des vitesses en coordonnées sphériques est donné par

$$\vec{v} = V_0 \vec{e}_r \,.$$

Déterminer la masse volumique $\mu(r)$.

3 — Écoulement d'un gaz

1. Quelle est la vitesse d'écoulement d'un gaz dans un tuyau cylindrique si 510 g de ce gaz s'écoulent par demi-heure à travers une section du tuyau ? Le diamètre du tuyau est de 2 cm et la masse volumique du gaz est 7,5 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

2. Le tuyau subit un élargissement : la nouvelle section a un diamètre de 5 cm. Quelle est la vitesse du gaz dans la section élargie ? On supposera l'écoulement incompressible.

4 — Écoulement incompressible

1. Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.

2. Que peut-on dire de $\dfrac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t}$ pour un écoulement incompressible ? On justifiera soigneusement la réponse.

3. On donne la relation d'analyse vectorielle, pour un champ scalaire $g(M,t)$ et un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$:

$$\operatorname{div}(g\vec{A}) = g \operatorname{div}\vec{A} + (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g)\cdot\vec{A}$$

Montrer alors que pour un écoulement incompressible, on a $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

5 — Canalisation à section lentement variable

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide compressible dans un tuyau de section lentement variable $S(x)$. Les différents champs ne dépendent que de la coordonnées d'espace x : on note $\mu(x)$ la masse volumique. Le champ des vitesse sera considéré[1] comme colinéaire à Ox : il est de la forme $\vec{v} = v(x)\vec{e}_x$.

1. En faisant un bilan de masse pour le volume délimité par les sections comprises entre x et $x + \mathrm{d}x$, montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}[\mu(x)v(x)]}{\mathrm{d}x} + \frac{\mu(x)v(x)}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

2. Montrer que l'on retrouve la conservation du débit massique à travers toute section du tuyau.

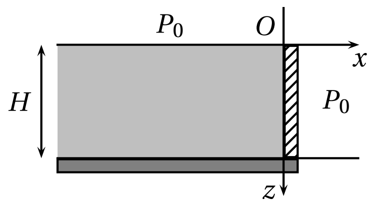
À quelle caractéristique de l'écoulement ce résultat est-il lié ?

1. Bien que ceci soit en toute rigueur contradictoire avec le fait que la section $S(x)$ soit variable.

Statique des fluides

6 — Actions sur une paroi

On considère la paroi d'un barrage, de hauteur H et de largeur L (selon Oy). On note P_0 la pression atmosphérique ambiante.



1. Quelle est la résultante des actions de pression s'exerçant sur la paroi ? On tiendra compte du fluide et de l'atmosphère.

2. Déterminer le moment $\mathcal{M}_{Oy}$ en O autour de l'axe Oy de ces actions de pression.

On définit le centre de poussée C : c'est le point tel que si la résultante des actions de pression est appliqué en ce point, son moment est égal au moment résultant $\mathcal{M}_{Oy}$ des actions de pression. Déterminer sa cote z_C.

7 — Cube flottant

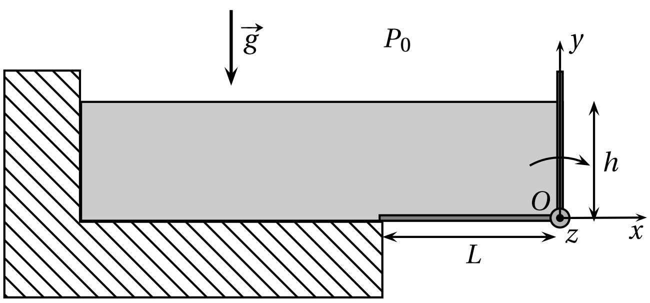
Un cube de masse m, de coté a, flotte sur un liquide de masse volumique ρ.

1. Quelle est la hauteur de cube immergée ?

2. À partir de sa position de repos, on l'enfonce de b (tout en maintenant une partie du cube émergée), et on lâche. Montrer que le cube effectue des oscillations verticales dont on déterminera la période.

8 — Vidange automatique

Un bac de largeur b selon Oz est rempli d'une hauteur h d'eau de masse volumique ρ. Il est fermé d'un côté par deux panneaux perpendiculaires entre eux, pouvant tourner autour de l'axe Oz. L'une de leurs face est en contact avec l'eau, l'autre avec l'atmosphère à la pression P_0.



1. Déterminer la pression dans l'eau.

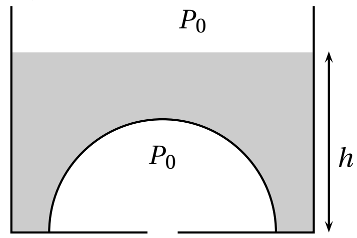
2. La pression de l'eau est-elle uniforme sur le panneau horizontal au fond du bac ? Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur ce panneau, ainsi que leur moment résultant autour de Oz. On prendra en compte l'action de l'eau et de l'atmosphère.

3. Même question pour le panneau vertical.

4. Montrer que si la hauteur h dépasse une certaine valeur h_0 à exprimer, les panneaux pivotent, vidant le bac.

9 — Forces de pression

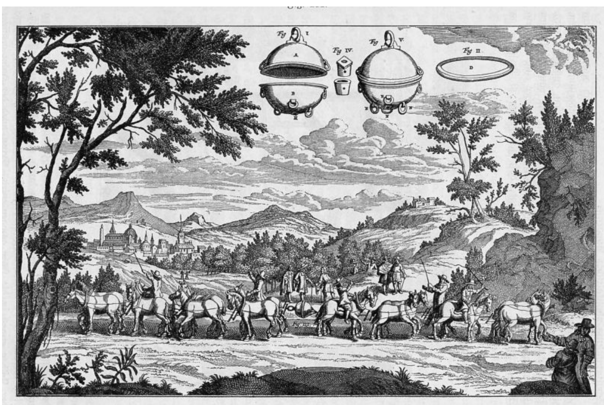
Une demi-sphère de rayon R repose sur le fond d'un récipient rempli sur une hauteur $h > R$ d'un liquide de masse volumique μ.



Le fond du récipient est percé d'une petite ouverture de façon qu'à l'intérieur de la demi-sphère, la pression soit égale à la pression atmosphérique.
Calculer la force minimale à exercer pour soulever la demi-sphère.

10 — Hémisphères de Magdebourg

Otto von Guericke, bourgmestre de Magdebourg, avait joint deux hémisphères métalliques de 28 cm de rayon et réalisé le vide à l'intérieur à l'aide d'une pompe à vide de son invention.
Lors de la première expérience qu'il mena le 6 mai 1654 devant l'empereur Ferdinand II à Ratisbonne, deux attelages de 15 chevaux ne purent séparer les deux hémisphères tant que le vide fut maintenu.

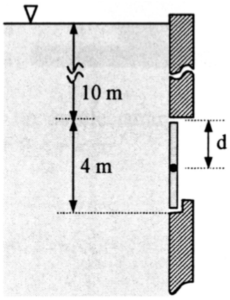


Die Magdeburger Halbkugeln auf dem Reichstag zu Regensburg, 1654.

Quelle force aurait-il fallu exercer de chaque côté pour séparer les hémisphères ?

11 — Vanne d'un réservoir

Une porte rectangulaire de 2 m de large est placée dans la paroi verticale d'un réservoir contenant de l'eau. On souhaite que cette porte s'ouvre automatiquement quand le niveau d'eau par rapport au bord supérieur de la porte dépasse 10 m.



À quelle distance d doit être située l'axe de rotation pour qu'il y ait ouverture automatique au-delà d'un niveau d'eau de 10 m ?

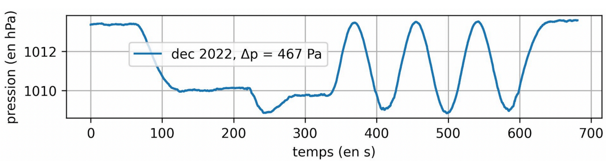
12 — Juste un doigt !

Un récipient contient une masse $m = 150$ g d'eau, comme indiqué sur la balance électronique.

Qu'indique la balance quand on immerge l'extrémité (une phalange) de l'index sans appuyer sur la balance ?

13 — Quand la routourne tourne !

Lors des fêtes de Noël, une grande roue est installée dans la ville de Reims. Un physicien est monté dans une cabine de cette roue, muni d'un capteur de pression.
On donne le relevé obtenu :



La différence de pression mesurée lors des oscillations est $\Delta p = 467$ Pa.

1. Pourquoi observe-t-on une variation de la pression quand la roue tourne ? Combien fait-elle de tours sur l'enregistrement ?

2. La masse molaire de l'air, considéré comme un gaz parfait, est $M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. La température est de 10 °C.
Estimer le diamètre de la grande roue.

3. Dans la phase où la roue tourne à vitesse angulaire constante, estimer la vitesse v de la cabine que l'on supposera placée sur le périmètre de la roue, ainsi que son accélération.

14 — Modèle de l'atmosphère

L'air atmosphérique est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Le champ de pesanteur et uniforme, de valeur $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
La verticale ascendante est repérée par $\vec{e}_z$. Au niveau du sol, en $z = 0$, on donne $P_0 = P(0) = 10^5$ Pa et $T(0) = T_0 = 310$ K.

1. Dans le cas de l'atmosphère isotherme, montrer que la pression varie avec l'altitude selon la loi

$$P(z) = P_0\, \mathrm{e}^{-\frac{z}{H_1}},$$

où l'on donnera l'expression puis la valeur numérique de H_1.

2. On modélise l'atmosphère par une variation affine de la température avec l'altitude selon

$$T(z) = T_0 + \lambda z$$

où $\lambda = -5 \times 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot m^{-1}}$ est appelée gradient thermique de l'atmosphère.
Déterminer la loi $P(z)$.

3. Si $z \ll H_1$, que peut-on dire (numériquement) de $\dfrac{|\lambda|\, z}{T_0}$?
Linéariser alors les expressions de $P(z)$ obtenues avec les deux modèles précédents. Que constate-t-on ?

15 — Océan isotherme

La masse volumique de l'eau dans un océan varie avec la pression selon la loi

$$\rho = \rho_0 [1 + a(P - P_0)] .$$

1. La profondeur étant notée $z > 0$, déterminer la loi $P(z)$.

2. Que devient cette loi pour les profondeurs « faibles » ? Préciser.

3. On donne $a = 10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$, et pour $z = 0$, $P = P_0 = 10^5$ Pa et $\rho = \rho_0 = 10^3\ \mathrm{kg \cdot \cdot m^{-3}}$.
Calculer P pour $z = 1$ km. Comparer (erreur relative) avec la pression obtenue en considérant l'eau comme incompressible.