

DS n° 3

Diffusion thermique, transport de charge, thermochimie

Le sujet comporte quatre parties indépendantes.

Merci de suivre les conseils suivants :

- laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires ;
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points ;
- respecter et indiquer la numérotation des questions ;
- souligner ou encadrer les résultats.

Partie I — De la physique dans le tunnel du Fréjus (Mines)

À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation \bar{z} désigne le complexe conjugué de z . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{j} pour un flux surfacique, sauf s'ils sont unitaires, et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{e}_z tel que $\|\hat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs.

Le tunnel routier de Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes contiennes. La point Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

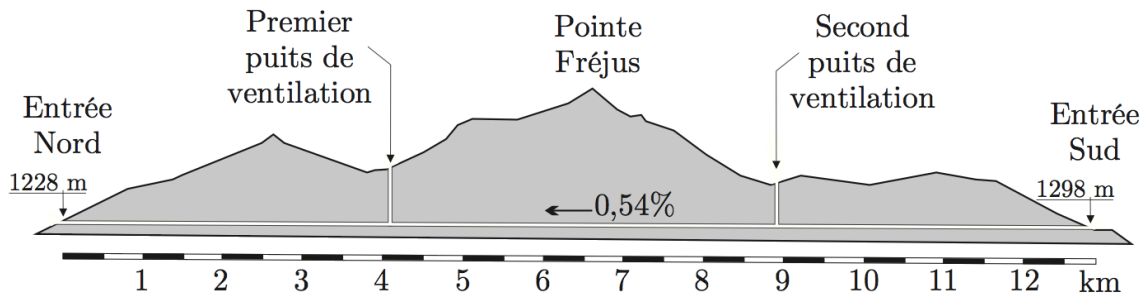


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30 °C. Dans un premier temps, nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

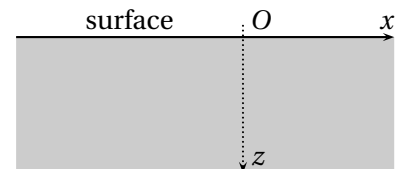


FIGURE 2 – Sol

1 — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure

$$T(z = 0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$$

avec $\theta_0 = 0$ °C (voir figure 2).

- ❑ 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.
- ❑ 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- ❑ 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .
- ❑ 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$, de surface S . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
- ❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

□ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et S , puis en fonction de ρ_s , c_s , S et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

□ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme

$$\underline{T}(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$$

vérifiant la condition aux limites $T(z=0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

□ 8 — Interpréter cette forme de solution. En écrivant que $\underline{T}(z, t)$ vérifie l'équation de la chaleur, donner la relation entre \underline{k}^2 et ω . En déduire¹ l'expression de \underline{k} que l'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$, avec $k' > 0$.

Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z, t) = \text{Re}[\underline{T}(z, t)]$.

Quelle est l'interprétation physique de k'' ? Montrer que l'on peut définir une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de k'' d'une part, puis de ω et D d'autre part, dont on donnera l'interprétation physique.

□ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ SI}$.

□ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol?

2 — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30 °C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration. Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}_0 e^{-z/H}$, avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{J}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau, ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$, avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

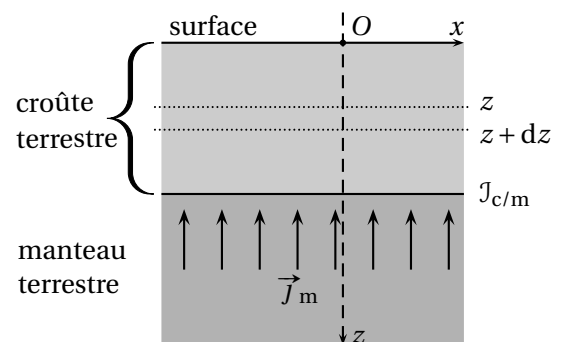


FIGURE 3 – Modèle géostrophique

□ 11 — En effectuant, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface S , comprise entre z et $z + dz$, établir une relation entre $j_Q(z, t)$ et $\mathcal{P}(z)$.

□ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de H , L_c , \mathcal{P}_0 , j_m , κ et $\theta_0 = 0 \text{ °C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

□ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

□ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

3 — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation

$$T(x, z=0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

1. On rappelle que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$...

Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus, on prendra $\lambda = 10,0$ km.

□ 15 — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \rightarrow +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

Indication : la méthode de séparation des variables consiste à chercher une solution du problème sous la forme $T(x, z) = f(x)g(z) + T_s$.

□ 16 — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

Partie II — « S'il vous plaît... dessine-moi un mouton ! » (CCINP MP)



Cette partie s'intéresse à un mammifère particulier, le mouton, un des tous premiers domestiqués par l'homme, entre le 11^e et le 9^e siècle avant J.-C. en Mésopotamie. C'est un animal clé dans l'histoire de l'agriculture.

On appelle bélier le mâle adulte, brebis la femelle adulte, agneau le jeune mâle et agnelle la jeune femelle.

Comme tous les ruminants, leur système digestif complexe leur permet de transformer la cellulose de leur alimentation en acides gras volatils et en glucides simples. À la belle saison, ils se nourrissent dans les pâturages d'herbe broutée au ras du sol et on leur donne du foin en hiver.

Jusqu'à nos jours, le mouton est utilisé pour ses produits laitiers, sa viande, sa laine et son cuir, de façon artisanale ou semi-industrielle. Sa viande et son lait ont été les premières sources de protéines consommées par l'homme dans le passage de la chasse-cueillette à l'agriculture.

Données

— L'opérateur gradient d'une fonction $G(M, t)$ en situation unidimensionnelle vaut $\vec{\text{grad}} G(z, t) = \frac{\partial G(z, t)}{\partial z} \vec{e}_z$, et en coordonnées sphériques $\vec{\text{grad}} G(r, t) = \frac{\partial G(r, t)}{\partial r} \vec{e}_r$.

— En coordonnées cartésiennes, l'opérateur divergence en situation unidimensionnelle vaut $\vec{\text{div}} \vec{A}(z) = \frac{dA(z)}{dz}$.

Document — vigifirme.org, pour le bien-être de l'animal et de l'éleveur, consulté en 2018

Exposition à de basses températures

Les moutons sont naturellement adaptés pour supporter de très basses températures mais leur résistance au froid dépend de plusieurs facteurs : la race, l'âge, l'état du pelage...

Un mouton qui a une épaisse toison et qui est protégé de l'humidité pourra supporter des températures qui descendent en dessous de -15 °C, un mouton tondu doit être protégé du froid. [...] Lorsque le temps est humide, que les températures sont basses et qu'il y a du vent, la situation est critique pour les moutons. Le plus important est qu'ils ne soient pas mouillés jusqu'à la peau. La laine de certaines races, lorsqu'elle épaisse, peut repousser l'humidité plusieurs jours. C'est le cas des races de montagnes mais pour d'autres, à la laine très fine, le pelage est moins protecteur.

Les moutons qui ont froid se serrent les uns contre les autres.

Les agneaux nouveau-nés sont très sensibles aux basses températures, au vent et à l'humidité. Leur fine couche de laine et de graisse ne les protège que très peu. Les brebis prêtes à mettre bas doivent être isolées en bergerie et y rester au moins deux semaines après la naissance. Le taux de mortalité des agneaux qui viennent de naître atteint plus de 25 % dans certains élevages. Ils succombent le plus souvent dans les heures qui suivent leur naissance par hypothermie plutôt que par maladie.

Exposition à de hautes températures

Les moutons supportent mieux le froid que les températures élevées. Ils peuvent mourir d'un coup de chaleur.

Ce risque est beaucoup plus élevé chez les moutons qui ne sont pas tondus, car la laine empêche la sueur de s'évaporer. C'est une des raisons pour laquelle il faut tondre les moutons au printemps.

| Cas de la brebis non tondue | Confort sans adaptation ou adaptation facile | Adaptation difficile | Adaptation très difficile | Inadaptation pouvant entraîner la mort |
|-----------------------------|--|---|--|--|
| Température extérieure | de -8 °C à 25 °C | de -15 °C à -8 °C et de 25 °C à 35 °C | de -30 °C à -15 °C et de 35 °C à 40 °C | en dessous de -30 °C et au-dessus de 40 °C |

La température d'un mouton en bonne santé se situe entre $38,5\text{ °C}$ et $39,5\text{ °C}$.

Sa longueur moyenne va de 1 m à $1,50\text{ m}$.

La tonte a lieu 1 à 2 fois par an, produisant 2 à 8 kg de laine par an.

Nous allons essayer de construire un modèle thermodynamique pour expliquer comment la brebis maintient sa température de consigne $\theta_{\text{eq}} = 39\text{ °C}$ et mieux comprendre les éléments du document précédent.

1 Propriétés de la toison de la laine

La laine, matière première renouvelable, est une fibre aux propriétés uniques : flexible, légère, élastique, solide protégeant du chaud comme du froid, difficilement inflammable (s'enflamme à 600 °C), isolant phonique, absorbeur d'humidité, facile à teindre et 100 % biodégradable. La fibre de laine est à croissance continue avec de grandes écailles qui en font le tour. Les écailles se recouvrent peu et sont très saillantes. La section est circulaire. Sa substance est de la kératine, matière complexe association d'une vingtaine d'acides aminés. La laine a des affinités différentes avec l'eau qui font que la fibre s'enroule en frisures. Ces dernières enferment une grande quantité d'air, ce qui limite la conduction thermique. De plus, la kératine est hydrophile pour la vapeur d'eau mais hydrophobe pour l'eau liquide. L'adsorption d'eau (désorption d'eau) s'accompagne d'une production (dégagement) de chaleur par la fibre. Les fils de laine ont un diamètre qui varie de $20\text{ }\mu\text{m}$ pour les moutons Mérinos à $40\text{ }\mu\text{m}$ pour les races écossaises.

Une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine} . On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité $\lambda_{\text{laine}} = 0,040\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Q1. La loi de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit le lien entre la densité volumique de transfert thermique et le gradient de température : $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$.

Quelle est la dimension de la conductivité λ ?

On considère un parallélépipède, de longueur L , de hauteur H et d'épaisseur e petite ($e \ll \min(L, H)$), constitué d'un matériau homogène de conductivité λ , de masse volumique μ et de capacité thermique massique c . Le problème est supposé unidimensionnel, la température ne dépendant que de la variation z et du temps t .

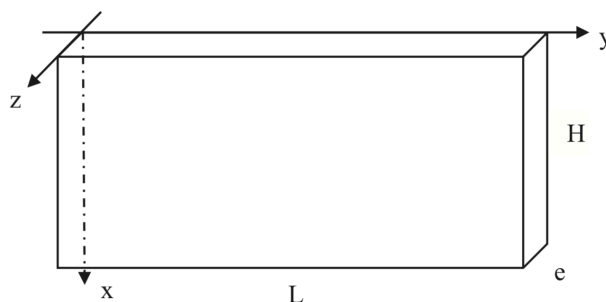


FIGURE 4 – Géométrie du conducteur thermique

Q2. Sur quelle direction est le vecteur densité \vec{j}_Q de courant thermique ? De quelles variables dépend-il ?

Les températures, sauf avis contraire, sont en $^{\circ}\text{C}$.

Q3. Faire un bilan énergétique sur la tranche de matériau comprise entre z et $z + dz$ et en déduire l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit la température $T(z, t)$.

Q4. Que devient-elle en régime stationnaire ? Le vecteur \vec{j}_Q dépend-il alors de z ?

Q5. On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{\text{entrée}}$ en $z = 0$ et T_{sortie} en $z = e$. Que vaut la puissance thermique φ qui traverse le matériau en fonction de e , λ , H , L , $T_{\text{entrée}}$ et T_{sortie} ?

Q6. Définir puis exprimer la résistance thermique du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?

On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée (figure 5). L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur e et de surface S séparées par une plaque chaude. Un même flux thermique φ , engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures T_c et T_f des plaques chaude et froides sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.

Q7. Exprimer l'expression de la conductivité λ_{laine} de l'échantillon en fonction de φ , e , S , T_c et T_f .

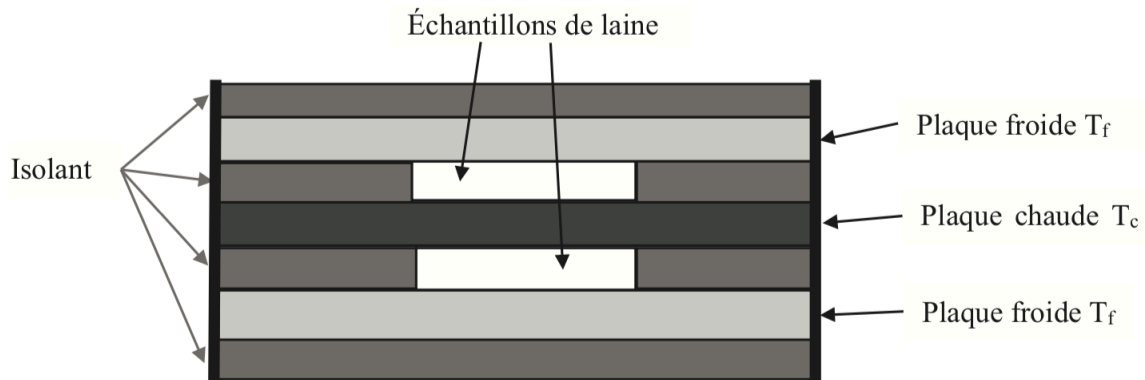


FIGURE 5 – Principe de la plaque chaude gardée

2 Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plain, de température uniforme $\theta_{\text{éq}} = 39^\circ\text{C}$, de longueur $L = 100$ cm et de section carrée de côté $H = 30$ cm. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_m = 10$ cm avant la tonte à $e = e_m = 0,5$ cm après la tonte. La situation est représentée en figure 6 et en figure 7.

Q8. Exprimer la résistance thermique R_{diff} de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords, en fonction de L , H , e et λ_{laine} . Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

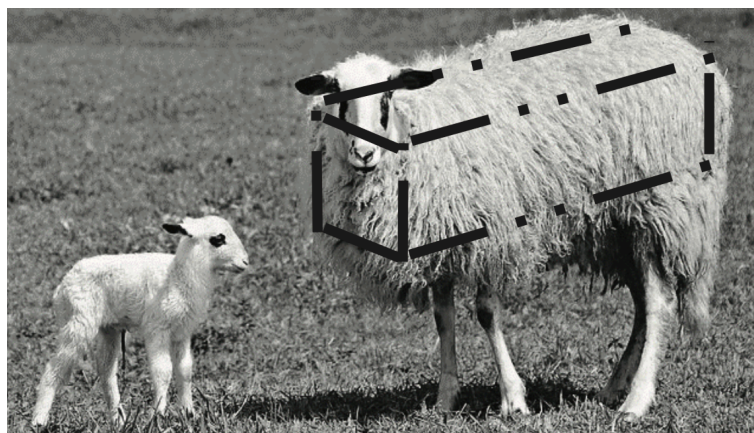


FIGURE 6 – Modélisation de la brebis

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

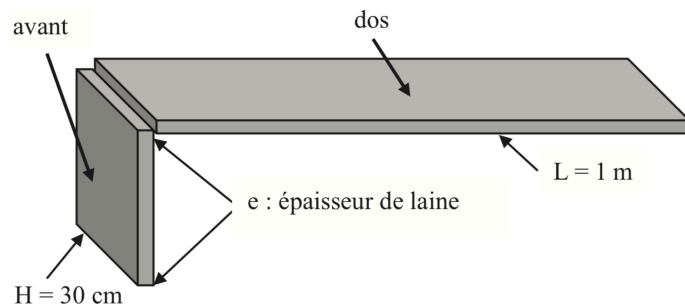


FIGURE 7 – Modélisation de la toison (seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées)

Q9. La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égal à

$$\vec{J}_Q = -h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) \vec{n},$$

où T_{ext} est la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température T_{air} et \vec{n} est le vecteur unitaire normale orienté de la brebis vers l'extérieur.

On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à $h = 4,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

En déduire en fonction de h , L et H la résistance thermique de conducto-convection R_{CC} à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire R_r . Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance P_r due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme

$$P_r = KA(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}),$$

où A est l'aire de la surface extérieure de la brebis, et T_{ext} est la température de cette surface en contact avec l'air de température T_{air} . La constante K a pour valeur $K = 5,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q10. Exprimer la résistance thermique de rayonnement R_r en fonction de K , L et H .

Q11. Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis $T_{\text{int}} = \theta_{\text{éq}} = 39 \text{ °C}$ et la température de l'air T_{air} . Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5 \text{ °C}$. En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation.

La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires **en toute situation** :

$$\dot{m} = 5,8 \times 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue :

$$\dot{m}' = 2\dot{m}$$

et que la température extérieure est supérieure à $5,1 \text{ °C}$.

L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau vaut $\Delta H_{\text{vap}}^{\circ} = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et est supposée indépendante de la température.

Q12. En déduire la puissance $p_{\text{m}0}$ apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de \dot{m} , $\Delta H_{\text{vap}}^{\circ}$, R_1 , T_{int} et T_{air} , puis on fera l'évaluation numérique pour $T_{\text{air}} = T_0 = 5 \text{ °C}$.

Q13. Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5 \text{ °C}$.

3 Déséquilibre thermique d'une brebis (situation de stress et de danger)

La thermorégulation est due à des productions internes de chaleur (thermogenèse liée au métabolisme et à l'activité physique) et à des déperditions de chaleur au niveau de la respiration et de la peau (thermolyse).

Dans une situation où l'air environnemental est en dehors de la zone de confort, la brebis va se réchauffer ou se refroidir et éventuellement transpirer. On négligera la capacité thermique de la toison devant celle du corps de la brebis. On assimile la brebis à un volume d'eau de masse volumique $\mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de capacité thermique massique $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. On admet que les variations de température sont suffisamment lentes pour utiliser les notions de résistances. On note p_m la puissance apportée par le métabolisme.

Q14. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la **brebis non tondue** dans une situation (1) où la température T_{air} de l'environnement est différentes de $T_0 = 5^\circ\text{C}$, montrer que l'équation différentielle relative à la température $T(t)$ de la brebis s'écrit

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_1} (T(t) - T_{\text{air}}) = \frac{(T_1 - T_{\text{air}})}{\tau_1}.$$

On exprimera τ_1 en fonction de μ, c, L, H, R_1 et $(T_1 - T_{\text{air}})$ en fonction de $\theta_{\text{éq}}, T_0, R_1$ et $(p_m - p_{m0})$.

Q15. Exprimer la température $T(t)$ en fonction de t, T_1, τ_1 et $\theta_{\text{éq}}$ en supposant que la température initiale de la brebis est $T(t=0) = \theta_{\text{éq}}$.

Q16. Calculer τ_1 . Calculer T_1 en $^\circ\text{C}$ pour $p_m = p_{m0}$ avec une température d'environnement égale à $T_{\text{air}} = 17^\circ\text{C}$.

Q17. D'après les données du document, la **brebis non tondue** reste dans sa zone d'adaptation pour une température extérieure variant de -8°C à 15°C . En déduire entre quelles limites peut varier la puissance apportée par le métabolisme de l'animal dans cette situation (1) sans qu'il y ait danger pour lui. On suppose donc que la brebis reste à sa température d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = 39^\circ\text{C}$.

Q18. En appliquant le premier principe à la **brebis tondue** dans une situation (2) où la température T_{air} de l'environnement est supérieure à $T_0 = 278\text{ K} = 5^\circ\text{C}$, montrer que l'équation différentielle relative à la température $T(t)$ de la brebis peut se mettre sous la forme

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_2} (T(t) - T_{\text{air}}) = \frac{(T_2 - T_{\text{air}})}{\tau_2},$$

dans laquelle les notations T_2 et τ_2 sont des constantes à déterminer.

Exprimer τ_2/τ_1 . Commenter.

En supposant que la possibilité de variation de la puissance métabolique soit celle obtenue à la question 17, jusqu'à quelle température extérieure la brebis tondue peut-elle s'adapter à la chaleur?

Q19. Faire un schéma de montage électrique équivalent aux situations (1) et (2) en indiquant les valeurs des éléments du montage en fonction de T_1, T_2, τ_1 et τ_2, R_1 et R_2 .

Tracer l'allure de $T(t)$ dans une situation de type (1) (brebis non tondue) pour une température initiale $T(t=0) = \theta_{\text{éq}} = 39^\circ\text{C}$ avec $p_m = p_{m0}$ et une température de l'air égale à 17°C .

Tracer l'allure de $T(t)$ dans une situation de type (2) (brebis tondue) à partir d'une température initiale $T(t=0) = \theta_{\text{éq}} = 39^\circ\text{C}$ et une température de l'air égale à 25°C sachant que $T_2 - T_{\text{air}} = 2,6^\circ\text{C}$.

4 Réponse d'un groupe de brebis

Les brebis se serrent les unes contre les autres en situation de stress thermique dû au froid extérieur. Supposons que le berger ait un troupeau de 6 brebis non tondues. Plusieurs regroupements sont possibles, comme indiqué en figure 8.

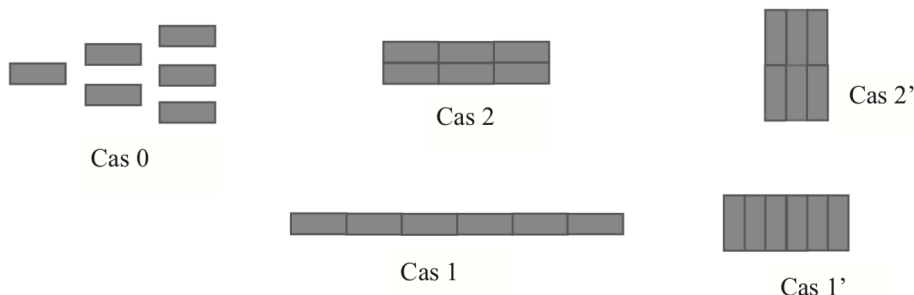


FIGURE 8 – Regroupements possibles de 6 brebis

Q20. Évaluer la diminution de surface en contact avec l'air par rapport aux brebis isolées dans les cas 1, 1', 2 et 2' en fonction de H et $X = L/H = 3,3$ (longueur L et section carrées de côté H telles que définies dans la figure 7). Quel sera le cas de plus faible conductance thermique? Dans quelle configuration est brebis ont-elles intérêt à se regrouper? Quelle sera la diminution relative moyenne de métabolisme nécessite au maintien de la température interne par le regroupement? Certaines ont-elles intérêt à changer de place de temps en temps?

Partie III — Électrolytes

Un électrolyte est une substance conductrice du courant électrique, car elle contient des ions mobiles. Un électrolyte peut être liquide ou solide. Les électrolytes liquides sont des solutions aqueuses dans lesquelles les ions proviennent d'un sel soluble, qui n'est constitué que d'ions. Les électrolytes solides sont des cristaux dans lesquels certains ions sont mobiles, ou des polymères comme ceux utilisés dans les membranes échangeurs d'ions.

On considère un électrolyte aqueux dissocié sous forme d'ions A^- et C^+ , de charges respectives $-e$ et $+e$, et de concentrations respectives c^- et c^+ .

Deux compartiments (I) et (II) contiennent cet électrolyte à des concentrations ioniques c_I et c_{II} (en ions par m^3) avec $c_{II} < c_I$.

On suppose ces deux concentrations suffisamment grandes pour être supposées constantes.

Les compartiments sont séparés par une membrane d'épaisseur L , assimilable à un milieu liquide au sein duquel les ions peuvent migrer parallèlement à l'axe horizontal Ox de vecteur directeur \vec{u}_x .

Les deux faces de la membrane sont situées en $x = 0$ et $x = L$.

Dans la membrane existe un champ électrique horizontal $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$, dirigé dans le sens des x croissants (on a donc $E(x) > 0$).

On note $c^+(x)$ et $c^-(x)$ les concentrations respectives des cations et des anions dans la membrane. On considère le phénomène unidimensionnel selon Ox .

1. L'électrolyte étant neutre dans la membrane, montrer que $c^-(x) = c^+(x)$. Dans la suite, on notera $c(x)$ cette concentration commune.

Sous l'effet du champ électrique, les ions sont animés d'un mouvement de migration dû à la force électrique. On montre que la vitesse \vec{v}^+ de migration des cations, comme la vitesse \vec{v}^- de migration des anions, est proportionnelle au champ électrique.

On définit la mobilité μ^+ d'un cation par $\vec{v}^+ = \mu^+ \vec{E}$, et la mobilité μ^- d'un anion par $\vec{v}^- = -\mu^- \vec{E}$.

2. Justifier qualitativement que $\mu^+ > 0$ et $\mu^- > 0$.

3. On note \vec{j}_m^+ le vecteur densité de courant électrique dû au mouvement de migration des cations.

Exprimer \vec{j}_m^+ en fonction de \vec{v}^+ et d'autres données, puis en fonction de E , $c(x)$, μ^+ et e .

Exprimer de même le vecteur densité de courant électrique \vec{j}_m^- dû au mouvement de migration des anions en fonction de \vec{v}^- et d'autres données, puis en fonction de E , $c(x)$, μ^- et e .

4. Du fait de la non uniformité de la concentration en ions dans la membrane, il apparaît aussi un courant de diffusion, régi par la loi de Fick.

En notant D^+ le coefficient de diffusion des cations dans la membrane, exprimer le vecteur densité de **courant électrique** \vec{j}_d^+ dû à la diffusion des cations dans la membrane en fonction de D^+ , e et $c(x)$.

Exprimer de même le vecteur densité de courant électrique \vec{j}_d^- dû à la diffusion des anions dans la membrane en fonction de D^- , e et $c(x)$.

5. Exprimer le vecteur densité de courant électrique \vec{j}^+ total dû à la migration et à la diffusion des cations dans la membrane.

Exprimer de même le vecteur densité de courant électrique \vec{j}^- total dû à la migration et à la diffusion des anions dans la membrane.

En déduire l'expression du vecteur densité de courant électrique total dans la membrane en fonction de e , μ^+ , μ^- , $c(x)$, E et λ , où λ est une constante définie en posant $D^+ = \lambda\mu^+$ et $D^- = \lambda\mu^-$.

Un régime permanent s'établit pour lequel $\vec{j} = \vec{0}$.

6. Exprimer alors le champ électrique sous la forme

$$\vec{E} = \lambda K \frac{d(\ln c)}{dx} \vec{u}_x$$

où K est une constante que l'on exprimera en fonction des mobilités μ^+ et μ^- .

7. On rappelle la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.

En déduire l'expression de la tension $U = V_I - V_{II}$ entre les faces de la membrane de potentiels V_I et V_{II} en fonction de λ , K , c_I et c_{II} .

8. L'électrolyte considéré est une solution de chlorure de sodium $Na^+ + Cl^-$.

Calculer U si $\lambda = 26 \text{ mV}$, $\frac{c_I}{c_{II}} = 10$, $\mu^+ = 5,2 \times 10^{-8} \text{ SI}$ et $\mu^- = 8 \times 10^{-8} \text{ SI}$.

9. Calculer la tension U_c pour une membrane semi-perméable, qui arrête complètement les cations.

Calculer la tension U_a pour une membrane semi-perméable, qui arrête complètement les anions.

Partie IV — Les perchlorates (Centrale)

En 2008, la mission Mars phoenix de la Nasa découvre dans les sols martiens la présence de sels de perchlorate ($\text{Mg}(\text{ClO}_4)_2$, $\text{Ca}(\text{ClO}_4)_2$, KClO_4, \dots), susceptibles de se décomposer sous l'effet de températures élevées ou d'une exposition aux rayons ultra-violetes solaires pour former des espèces chlorées capables de dégrader les acides aminés (constituants élémentaires des protéines) rendant l'habitabilité de Mars plus difficile que prévu. En 2015, la Nasa découvre également que ces sels de perchlorate mélangés à l'eau forment des saumures qui demeurent liquides lors des étés martiens et ravinent les terrains.

On étudie ici la réaction modélisée par l'équation suivante :



Q 1. Énoncer la loi de Hess.

Q 2. Calculer $\Delta_r H^\circ$, l'enthalpie standard de la réaction (1) à la température $T_1 = 298 \text{ K}$. La réaction est-elle endothermique? exothermique?

Q 3. Énoncer la relation de Van't Hoff.

Q 4. La constante d'équilibre de la réaction (1) à la température $T_1 = 298 \text{ K}$ vaut $K^\circ(T_1) = 6,43 \times 10^{-2}$. En faisant l'hypothèse que $\Delta_r H^\circ$ est indépendant de la température (approximation de Ellingham), exprimer $K^\circ(T)$ en fonction des températures T et T_1 , de R , $K^\circ(T_1)$ et de $\Delta_r H^\circ$.

Q 5. Calculer la constante d'équilibre $K^\circ(T_0)$ à la température $T_0 = 210 \text{ K}$.

Pour la suite, nous prendrons comme valeur $K^\circ(T_0) = 1,7 \times 10^{-4}$.

Q 6. Sur Terre, la pression atmosphérique au sol est de l'ordre de la pression standard P° tandis que sur Mars, elle vaut environ $8 \times 10^2 \text{ Pa}$. La valeur de la constante d'équilibre à $T_0 = 210 \text{ K}$ (température moyenne de surface sur Mars) est-elle influencée par les conditions de pression qui règnent sur Mars? Justifier la réponse.

Q 7. Exprimer le quotient de réaction Q_r de la réaction (1) en fonction des activités des constituants, puis en fonction de la pression partielle en dioxygène P_{O_2} et de P° .

Q 8. Calculer la pression d'équilibre en dioxygène $P_{\text{O}_2, \text{éq}}$ associée à la réaction (1) à la température T_0 .

Q 9. En réalité, il existe sur Mars un ensemble de mécanismes fixant la pression partielle en dioxygène gazeux : à $T_0 = 210 \text{ K}$, cette dernière vaut $P'_{\text{O}_2} = 0,80 \text{ Pa}$. À $T_0 = 210 \text{ K}$ et pour une pression en dioxygène égale à $0,80 \text{ Pa}$, dans quel sens la réaction (1) est-elle thermodynamiquement possible? Justifier la réponse avec soin.

Données

Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Enthalpies standard de formation à $T_1 = 298 \text{ K}$

Perchlorate de potassium solide $\Delta_f H^\circ(\text{KClO}_4(\text{s})) = -432,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Chlorate de potassium solide $\Delta_f H^\circ(\text{KClO}_3(\text{s})) = -397,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$