

Partie I — De la physique dans le tunnel du Fréjus (Mines)

1 — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

□ 1 — La moyenne temporelle de la température extérieure est $\langle T(z=0, t) \rangle = \theta_0$.

Comme $-1 \leq \cos(\omega t) \leq 1$, on a

$$T_{\min} = \theta_0 - T_0 \quad \text{et} \quad T_{\max} = \theta_0 + T_0.$$

Ordre de grandeur réaliste pourrait être $T_0 = 15 \text{ °C}$.

□ 2 — Par définition du vecteur densité de flux thermique

$$\delta Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt,$$

où $d\vec{S} = \vec{n} dS$, \vec{n} étant le vecteur unitaire normal à dS , dirigé dans le sens de l'orientation de la surface.

Dimensionnellement :

$$[j_Q] = \frac{\text{énergie}}{\text{surface} \times \text{temps}} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T}$$

soit $[j_Q] = MT^{-3}$.

□ 3 — La loi de Fourier s'écrit $\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad} T$.

Elle est valable dans un milieu isotrope, pour des variations de température ni trop faibles, si trop grandes, ni trop rapides.

Dimensionnellement, la loi de Fourier s'écrit

$$MT^{-3} = [\kappa] \Theta L^{-1}$$

d'où $[\kappa] = MLT^{-3}\Theta^{-1}$.

□ 4 — L'énergie thermique reçue entre t et $t + dt$ par la tranche comprise entre z et $z + dz$ s'écrit

$$\delta Q = j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + dz, t) S dt,$$

soit

$$\delta Q = -\frac{\partial j_Q(z, t)}{\partial z} S dz dt.$$

□ 5 — Une tranche « mésoscopique » est :

- suffisamment grande pour comprendre un grand nombre d'atomes de façon à pouvoir définir la température;
- suffisamment petite pour que l'on puisse considérer la température comme uniforme en son sein.

□ 6 — Le bilan d'énergie entre t et $t + dt$ s'écrit en l'absence de source

$$dU = \delta Q,$$

soit compte tenu de l'expression de δQ établie précédemment

$$dU = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt. \quad (1)$$

La tranche, de volume $d\tau = S dz$, a une capacité thermique $c_s \rho_s d\tau$. Lorsque sa température varie de

$$dT = T(z, t + dt) - T(z, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt,$$

son énergie interne varie de

$$dU = c_s \rho_s d\tau dT$$

soit

$$dU = \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} S dz dt. \quad (2)$$

□ 7 — D'après les équations (1), (2) et la loi de Fourier, on a

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} S dz dt = -\frac{dj_Q}{dz} S dz dt = \kappa \frac{d^2 T(z, t)}{dz^2} S dz dt$$

d'où

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\kappa}{\rho_s c_s}.$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de la chaleur, on a $[D] = L^2 T^{-1}$.

□ 8 — La forme de la solution proposée est **harmonique**, à la pulsation forcée de la température à la surface du sol, et ondulatoire avec un terme **progressif** $\omega t - kz$. Elle vérifie la condition limite imposée en $z = 0$. Écrivons que $T(z, t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$i\omega T_0 e^{i(\omega t - kz)} = -k^2 D e^{i(\omega t - kz)},$$

d'où

$$\underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D}.$$

Comme $-i = e^{-\pi/2}$, on peut écrire

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega}{D} e^{-i\pi/2}$$

d'où

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-i\pi/4}.$$

Comme $e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, on a

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

On cherche à écrire $\underline{k} = k' + ik''$, avec $k' > 0$; il faut donc choisir le signe « + », et on peut écrire

$$\underline{k} = k' + ik'' \quad \text{avec} \quad k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \quad \text{et} \quad k'' = -\sqrt{\frac{\omega}{2D}}.$$

La solution s'écrit sous forme complexe

$$\begin{aligned} \underline{T}(z, t) &= \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k'z - ik''z)} \\ &= \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k'z)} e^{-i^2 k''z} = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k'z)} e^{k''z}. \end{aligned}$$

La solution réelle donnée par $T(z, t) = \text{Re}[\underline{T}(z, t)]$ s'écrit

$$T(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{k''z} \cos(\omega t - k'z),$$

soit en remplaçant k' et k'' par leurs expressions,

$$T(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right).$$

Le terme $k'' < 0$ traduit l'**amortissement** de l'onde de température : son amplitude diminue exponentiellement avec la profondeur z .

On peut écrire

$$e^{k''z} = e^{-\frac{z}{\delta}} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}.$$

La longueur caractéristique de la diminution de l'amplitude de l'onde de température est δ .

□ 9 — La profondeur z_e est telle que $e^{-z_e/\delta} = 0,1$. On a donc

$$z_e = -\delta \ln(0,01) = \delta \ln(100),$$

soit

$$z_e = \ln(100) \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \ln(100) \sqrt{\frac{2\kappa T}{\rho_s c_s 2\pi}} = \ln(100) \sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_s c_s \pi}}$$

avec $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$ an.

On calcule

$$z_e = \ln(100) \sqrt{\frac{3,00 \times 365 \times 24 \times 3600}{2,65 \times 10^3 \times 8,500 \times 10^3 \times \pi}}$$

d'où $z_e = 5,32$ m.

Le tunnel du Fréjus étant à une profondeur très supérieure à z_e , on peut en déduire que **la température reste constante tout au long de l'année dans le tunnel**.

□ 10 — Pour $T' = 24$ h, la nouvelle profondeur caractéristique est $\delta' = \sqrt{\frac{\kappa T'}{\rho_s c_s \pi}}$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{z_e}{\delta'} &= \ln(100) \sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_s c_s \pi}} \sqrt{\frac{\rho_s c_s \pi}{\kappa T'}} = \sqrt{\frac{T}{T'}} \ln(100) \\ &= \sqrt{365} \ln(100), \end{aligned}$$

d'où $e^{-z_e/\delta'} = e^{-\ln(100)\sqrt{365}} \approx 6 \times 10^{-39} \ll 1$.

Les variations quotidiennes de la température ne sont pas perceptibles à la profondeur z_e (à laquelle on ne perçoit que 1 % des variations annuelles). Le sol se comporte comme un **filtre passe-bas**.

2 — Température d'origine géophysique

□ 11 — En régime stationnaire, le bilan d'énergie pour la tranche de croûte terrestre de surface S , comprise entre z et $z + dz$ s'écrit, entre t et $t + dt$,

$$dU = 0 = \delta Q_{\text{reçu}} + \delta Q_{\text{créé}}.$$

On a d'une part comme précédemment

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{reçu}} &= j_Q(z, t) S dt - j_A(z + dz, t) S dt \\ &= -\frac{dj_Q(z, t)}{dz} S dz dt. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\delta Q_{\text{créé}} = \mathcal{P}(z) S dz dt.$$

Le bilan d'énergie conduit donc à

$$\frac{dj_Q(z, t)}{dz} = \mathcal{P}(z).$$

□ 12 — L'équation précédente s'écrit

$$dj_Q = \mathcal{P}_0 e^{-z/H} dz.$$

La condition aux limites étant $j_Q(L_c) = -j_m$, on peut écrire

$$\int_{-j_m}^{j_Q(z)} dj_Q = \mathcal{P}_0 \int_{L_c}^z e^{-z'/H} dz'$$

soit

$$j_Q(z) + j_m = \mathcal{P}_0 \left[-H e^{-z'/H} \right]_{L_c}^z = -\mathcal{P}_0 H \left[e^{z/H} - e^{-L_c/H} \right].$$

On en déduit

$$j_Q(z) = -j_m + \mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H} - \mathcal{P}_0 H e^{-z/H}.$$

En utilisant la loi de Fourier $j_Q = -\kappa \frac{dT}{dz}$, on a

$$dT = \left(\frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) dz + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-z/H} dz.$$

Avec la condition aux limites $T(z = 0) = \theta_0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{T(z)} dT &= \left(\frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) \int_0^z dz' \\ &\quad + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} \int_0^z e^{-z'/H} dz', \end{aligned}$$

soit

$$T(z) - \theta_0 = \left(\frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) z + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} \left[e^{-z'/H} \right]_0^z.$$

La température s'écrit donc

$$T(z) = \theta_0 + \left(\frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}].$$

□ 13 — En utilisant l'expression de $j_Q(z)$ obtenue précédemment, le flux $j_S = j_Q(z=0)$ s'écrit

$$j_S = -j_m + \mathcal{P}_0 H [e^{-L_c/H} - 1].$$

□ 14 — Comparons j_m et $\mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H}$.

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H} &= 2,50 \times 10^{-6} \times 10,0 \times 10^3 \times e^{-\frac{45}{10}} \\ &= 2,78 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}. \end{aligned}$$

Avec $j_m = 35,0 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, on remarque que

$$\frac{\mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H}}{j_m} \approx 8 \times 10^{-3} \ll 1.$$

On peut donc négliger $\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H}$ devant j_m et écrire la température sous la forme

$$T(z) = \theta_0 + \frac{j_m}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}].$$

À la profondeur $z = 1,70 \text{ km}$, on calcule alors

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{35,0 \times 10^{-3}}{3,00} \times 1,70 \times 10^3 \\ &\quad + \frac{2,50 \times 10^{-6} \times (10,0 \times 10^3)^2}{3,00} \left[1 - e^{-\frac{1,70}{10,0}} \right] \end{aligned}$$

soit $T(z) = 32,9 \text{ }^\circ\text{C}$.

Compte tenu de l'approximation effectuée, on peut écrire $j_S = -j_m + \mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H}$. On calcule

$$j_S = -35,0 \times 10^{-3} - 2,50 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^3$$

soit $j_S = -6,00 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

3 — Prise en compte du relief

□ 15 — En l'absence de sources internes, l'équation de la chaleur en régime stationnaire s'écrit $\Delta T = 0$, soit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

En cherchant la solution sous la forme $T(x, z) = f(x)g(z) + T_s$, l'équation (3) s'écrit

$$f''(x)g(z) + f(x)g''(z) = 0$$

soit

$$\frac{g''(z)}{g(z)} = -\frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Le premier terme étant indépendant de x et le second indépendant de z , ces deux termes sont égaux à une

constante K . On obtient alors les deux équations différentielles

$$g''(z) - K g(z) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x) + K f(x) = 0.$$

On veut que $T(x, z=0)$ soit une fonction sinusoïdale de x ; la fonction sera sinusoïdale si $K > 0$. En notant $K = k^2$, on a

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

dont la solution générale est

$$f(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx).$$

L'équation

$$g''(z) - k^2 g(z) = 0$$

admet pour solution générale

$$g(z) = a e^{-kz} + b e^{kz}.$$

La température devant rester finie pour $z \rightarrow +\infty$, on doit avoir $b = 0$, d'où

$$T(x, z) = T_s + [\alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)] b e^{-kz}.$$

En identifiant en $z = 0$:

$$T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = T_s + \alpha b \cos(kx) + \beta b \sin(kx).$$

On en déduit $\beta = 0$, $\alpha b = T_1$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, d'où

$$T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

□ 16 — On a vu qu'en l'absence de sources thermiques, pour une surface plane $z = 0$, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\Delta T = 0. \quad (4)$$

Cette équation homogène admet pour solution compatible avec les conditions aux limites

$$T_h(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

En présence de sources thermiques dégageant une puissance volume $\mathcal{P}(z)$, le bilan d'énergie en régime stationnaire s'écrit

$$-\text{div } \vec{J}_Q + \mathcal{P}(z) = 0$$

soit, comme $\vec{J}_Q = -\kappa \vec{\text{grad}} T$,

$$\kappa \Delta T + \mathcal{P}(z) = 0.$$

La température vérifie donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} e^{-z/H}. \quad (5)$$

On a vu à la question 14, avec les approximations proposées, que la solution

$$T(x, z) = \theta_0 + \frac{j_m}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}]$$

vérifie la condition $T(x, 0) = \theta_0$. On peut donc considérer la solution

$$T_p(x, z) = \frac{j_m}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}],$$

solution de l'équation (5) et vérifiant la condition aux limites $T_p(x, z) = 0$.

Considérons maintenant la solution

$$T(x, z) = T_h(x, z) + T_p(x, z).$$

L'équation de la chaleur étant linéaire, on déduit des équations (4) et (5)

$$\Delta T = \Delta T_h + \Delta T_p = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} e^{-z/H}.$$

De plus cette solution vérifie la condition aux limites

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_h(x, 0) + T_p(x, 0) \\ &= T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

La solution cherchée est donc de la forme

$$T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right) + \frac{j_m}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}]$$

Partie II — « S'il vous plait... dessine-moi un mouton! » (CCINP MP)

1 Propriétés de la toison de la laine

□ 1 — Le flux thermique est donné par $\Phi = \vec{j}_Q \cdot \vec{S}$; cette grandeur est une puissance. Sachant que la puissance d'une force est $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Le principe de la dynamique donne la dimension d'une force $[F] = MLT^{-2}$, d'où

$$[\Phi] = MLT^{-2} LT^{-1} = ML^2 T^{-3}.$$

On a donc

$$j_Q = ML^2 T^{-3} L^{-2} = MT^{-3}.$$

D'après la loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, on a

$$[j_Q] = [\lambda] \frac{\Theta}{L} = MT^{-3},$$

d'où

$$[\lambda] = MLT^{-3} \Theta^{-1}.$$

□ 2 — Par hypothèse on a $T(M, t) = T(z, t)$, d'où

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \vec{e}_z.$$

Le vecteur \vec{j}_Q est dirigé selon l'axe Oz est dépend de z et t.

□ 3 — Il s'agit d'une question de cours. On considère un tranche de section S , comprise entre z et $z + dz$ et on fait un bilan d'énergie pendant une durée dt . En l'absence de source interne, on a

$$d(\delta U) = \delta Q_{\text{reçu}}$$

avec

$$d(\delta U) = \mu c S dz dT = \mu c S \frac{\partial T}{\partial t} dz dt$$

et

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{reçu}} &= \Phi(z, t) dt - \Phi(z + dz, t) dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz dt \\ &= -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} S dz dt. \end{aligned}$$

Après simplification, le bilan conduit à

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

□ 4 — En régime stationnaire, l'équation précédente devient

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = 0.$$

On a alors $\frac{dT}{dz} = A$ constante, et

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{e}_z = -\lambda A \vec{e}_z.$$

Le vecteur \vec{j}_Q ne dépend pas de z en régime stationnaire.

□ 5 — On a vu que

$$\frac{dT}{dz} = \text{cte} = \frac{T(e) - T(0)}{e} = \frac{T_{\text{sortie}} - T_{\text{entrée}}}{e}$$

d'où

$$T(z) = \frac{T_{\text{sortie}} - T_{\text{entrée}}}{e} z + T_{\text{entrée}}.$$

On a alors

$$\vec{j}_Q = \lambda \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{e} \vec{e}_z.$$

Le flux à travers la section $S = HL$ vaut alors

$$\varphi = \lambda HL \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{e}.$$

□ 6 — La résistance thermique du matériau est définie par

$$R_{th} = \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{\varphi}.$$

On en déduit d'après la question précédente

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda HL}.$$

Deux résistances thermiques sont en série si les matériaux correspondants sont traversés par le même flux thermique.

Deux résistances thermiques sont en parallèle si les matériaux correspondants ont la même différence de température entre leurs faces d'entrée et de sortie.

□ 7 — Le flux thermique traversant l'échantillon de la plaque chaude vers la plaque froide est donné d'après les résultats précédents par

$$\varphi = \lambda_{laine} S \frac{T_c - T_f}{e},$$

d'où

$$\lambda_{laine} = \frac{e\varphi}{S(T_c - T_f)}.$$

2 Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

□ 8 — La carapace de laine est constituée de :

- 4 plaques de surface HL , chacune de résistance thermique $R_{th,1}$;
- 2 plaques de surface H^2 , chacune de résistance thermique $R_{th,2}$.

Toutes les plaques ayant l'épaisseur e , on

$$R_{th,1} = \frac{e}{\lambda_{laine} HL} \quad \text{et} \quad R_{th,2} = \frac{e}{\lambda_{laine} H^2}.$$

Toutes ces plaques étant associées en parallèle, la résistance thermique R_{diff} de la carapace est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{diff}} &= \frac{4}{R_{th,1}} + \frac{2}{R_{th,2}} = \frac{4\lambda_{laine} HL}{e} + \frac{2\lambda_{laine} H^2}{e} \\ &= \frac{2\lambda_{laine} H(H + 2L)}{e} \end{aligned}$$

d'où

$$R_{diff} = \frac{e}{2\lambda_{laine} H(H + 2L)}.$$

Pour la brebis non tondue, on calcule en ordre de grandeur $R_{diff} = 2 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Pour la brebis tondue : $R_{diff} = 9 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

1. On garde m car la température n'est pas supérieure à $5,1 \text{ }^\circ\text{C}$.

□ 9 — En notant S la surface extérieure totale de la carapace de laine, le flux conducto-convectif vers l'extérieur vaut

$$\varphi_{cc} = hS(T_{ext} - T_{air}).$$

La résistance thermique vaut par définition

$$R_{cc} = \frac{T_{ext} - T_{air}}{\varphi_{cc}} = \frac{1}{hS}.$$

La surface de la carapace valant

$$S = 4HL + 2H^2 = 2H(H + 2L)$$

on en déduit

$$R_{cc} = \frac{1}{2hH(H + 2L)}.$$

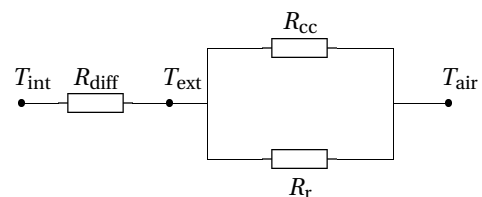
En ordre de grandeur $R_{cc} = 0,2 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

□ 10 — La résistance thermique de rayonnement se calcule de la même façon que R_{cc} : il suffit de remplacer la constante h par la constante K :

$$R_r = \frac{1}{2KH(H + 2L)}.$$

L'estimation non demandée donne $R_m = 0,1 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

□ 11 — Le flux ϕ traverse la laine modélisée par la résistance R_{diff} aux bornes de laquelle on a les températures T_{int} et T_{ext} . Ce flux se partage ensuite entre un flux rayonné et un flux conducto-convectif, ces deux termes étant modélisés par les résistances R_{cc} et R_r aux bornes desquelles on a les mêmes températures T_{ext} et T_{air} . Les résistances R_{cc} et R_r sont donc disposées en parallèle. On en déduit le schéma électrique équivalent :



La résistance équivalente est donc donnée par

$$R = R_{diff} + \frac{R_{cc}R_r}{R_{cc} + R_r}.$$

Pour la brebis non tondue : $R_1 = 1,9 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Pour la brebis tondue : $R_2 = 0,17 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

□ 12 — La puissance apportée par le métabolisme doit compenser :

- le flux thermique à travers la résistance thermique totale, soit $\frac{T_{in} - T_{air}}{R_1}$;

— l'énergie libérée par l'évaporation de l'eau. Pendant dt , une masse $dm = \dot{m} dt$ s'évapore, libérant l'énergie $\delta Q = dm \Delta H_{\text{vap}}^{\circ} = \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ} dt$. La puissance correspondant est donc $\dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}$.

On en déduit

$$p_{m0} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{air}}}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}.$$

On calcule $p_{m0} = 18 \text{ W}$.

□ 13 — Quand la brebis est tondue, il faut considérer la résistance thermique R_2 au lieu de R_1 , d'où¹

$$p_{m0} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{air}}}{R_2} + \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}.$$

On calcule $p_{m0} = 200 \text{ W}$.

3 Déséquilibre thermique d'une brebis (situation de stress et de danger)

□ 14 — Considérons comme système la brebis non tondue, et effectuons un bilan d'énergie entre t et $t + dt$. Le volume de la brebis est $H^2 L$, et sa température varie de dT , donc

$$dU = \delta Q_{\text{métabolisme}} + \delta Q_{\text{flux}} + \delta Q_{\text{évap}}$$

On a d'une part

$$dU = \mu c H^2 L dT.$$

La température de la brebis étant $T(t)$, les pertes thermiques sont données

$$\delta Q_{\text{flux}} = -\frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1}.$$

On a de plus

$$\delta Q_{\text{métabolisme}} = p_m dt \quad \text{et} \quad \delta Q_{\text{évap}} = -\dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}.$$

Le bilan s'écrit alors

$$\mu c H^2 L dT = p_m dt - \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} dt - \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ} dt$$

soit

$$\mu c H^2 L \frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} = p_m - \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}.$$

On a montré à la question 12 que dans la situation de confort où $T_{\text{int}} = \theta_{\text{éq}}$ et $T_{\text{air}} = T_0$, le métabolisme vérifie

$$p_{m0} = \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}.$$

On peut alors substituer $\dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}$, et le bilan s'écrit

$$\mu c H^2 L \frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} = p_m - p_{m0} + \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1},$$

soit

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_1} = \frac{(p_m - p_{m0}) R_1 + \theta_{\text{éq}} - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_1}.$$

On obtient l'expression proposée avec

$$\tau_1 = \mu c H^2 L R_1$$

et

$$(T_1 - T_{\text{air}}) = (p_m - p_{m0}) R_1 + \theta_{\text{éq}} - T_0.$$

□ 15 — Posons $\theta(t) = T(t) - T_{\text{air}}$. L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta(t)}{\tau_1} = \frac{T_1 - T_{\text{air}}}{\tau_1}.$$

La solution générale s'écrit

$$\theta(t) = A e^{-t/\tau_1} + (T_1 - T_{\text{air}}),$$

soit

$$T(t) = A e^{-t/\tau_1} + T_1.$$

On a $T(0) = \theta_{\text{éq}} = A + T_1$, d'où

$$T(t) = T_1 + (\theta_{\text{éq}} - T_1) e^{-t/\tau_1}.$$

□ 16 — On calcule $\tau_1 = 7,2 \times 10^5 \text{ s} \approx 8 \text{ jours}$.

Quand $p_m = p_{m0}$, on obtient

$$T_1 = T_{\text{air}} + \theta_{\text{éq}} - T_0 = 17 + 39 - 5$$

soit $T_1 = 51 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

□ 17 — À la question 12, on a établi l'expression du métabolisme quand la température de l'air vaut $T_{\text{air}} = T_0$:

$$p_{m0} = \frac{T_{\text{int}} - T_0}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}.$$

Quand la température extérieure est différente, le métabolisme en régime permanent est donné par

$$p_m = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^{\circ}.$$

On en déduit

$$p_m = p_{m0} + \frac{T_0 - T_{\text{air}}}{R_1}.$$

► Si $T_{\text{air}} < T_0$ on a bien $p_m > p_{m0}$: le métabolisme doit augmenter quand la température de l'air diminue.

Avec $T_{\text{min}} \leq T_{\text{air}} \leq T_{\text{max}}$, on en déduit l'encadrement

$$p_{m0} + \frac{T_0 - T_{\text{max}}}{R_1} \leq p_m \leq p_{m0} + \frac{T_0 - T_{\text{min}}}{R_1}.$$

On calcule

$$13 \text{ W} \leq p_m \leq 25 \text{ W}.$$

□ 18 — Il faut considérer la résistance thermique R_2 pour la brebis tondue. De plus, comme $T_{\text{air}} > 5^\circ\text{C}$, il faut ajouter la puissance $\dot{m}'\Delta H_{\text{vap}}^\circ = 2\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^\circ$ à la puissance évacuée par transpiration. Le bilan de puissance établi à la question 14.a s'écrit alors

$$\mu c H^2 L dT = p_m dt - \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_2} dt - 3\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^\circ dt,$$

d'où

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_2} = \frac{p_m - 3\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^\circ}{\mu c H^2 L}.$$

On a toujours la relation

$$p_{m0} = \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1} + \dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^\circ.$$

En substituant $\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^\circ$, le bilan s'écrit

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_2} = \frac{R_2(p_m - 3p_{m0}) + 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)R_2/R_1}{\mu c H^2 L R_2}.$$

On obtient l'expression proposée avec

$$\tau_2 = \mu c H^2 L R_2$$

et

$$(T_2 - T_{\text{air}}) = R_2(p_m - 3p_{m0}) + 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}.$$

On en déduit

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

On calcule $\frac{\tau_2}{\tau_1} = 9 \times 10^{-2}$.

On a $\tau_2 \ll \tau_1$: la brebis tondue atteint la température extérieure beaucoup plus rapidement que la brebis non tondue. Si l'extérieur est trop froid ou trop chaud, elle risque donc un coup de froid ou un coup de chaud.

La température atteinte est

$$T_2 = T_{\text{air}} + R_2(3p_m - p_{m0}) + 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}.$$

La brebis étant dans de bonnes conditions si $T_2 = \theta_{\text{éq}}$, la température de l'air vérifie alors

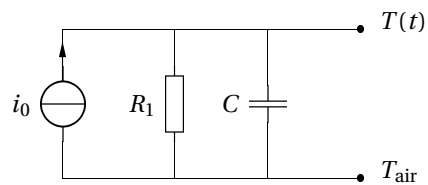
$$T_{\text{air}} = \theta_{\text{éq}} - R_2(p_m - 3p_{m0}) - 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}.$$

Pour $p_m = 13\text{ W}$, on calcule $T_{\text{air}} = 36,8^\circ\text{C}$.

□ 19 — La situation (1) est régie par l'équation différentielle

$$\mu c H^2 L \frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} = \frac{T_1 - T_{\text{air}}}{R_1}.$$

Le terme $\mu c H^2 L \frac{dT}{dt}$ est formellement identique à l'intensité parcourant un condensateur : $i = C \frac{du}{dt}$. Chaque terme de l'équation différentielle peut être équivalent à un courant, cette équation traduisant la loi des nœuds pour le schéma électrique suivant :



On obtient

$$i_0 = \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} + C \frac{dT(t)}{dt}.$$

Les grandeurs caractéristiques du montage sont donc

$$i_0 = \frac{T_1 - T_{\text{air}}}{R_1} \quad \text{et} \quad C = \mu c H^2 L.$$

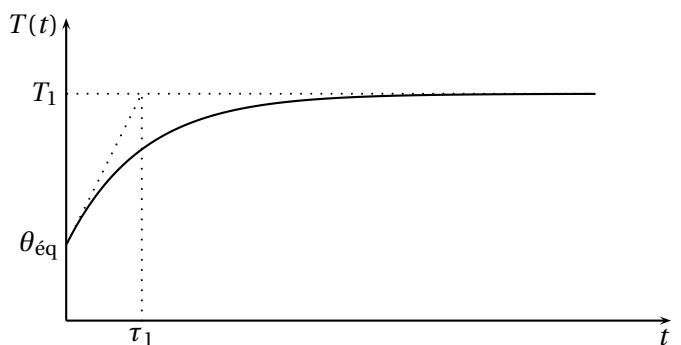
La résistance est égale à la résistance thermique R_1 et les potentiels aux températures $T(t)$ et T_{air} .

La situation (2) correspond au même schéma électrique, avec

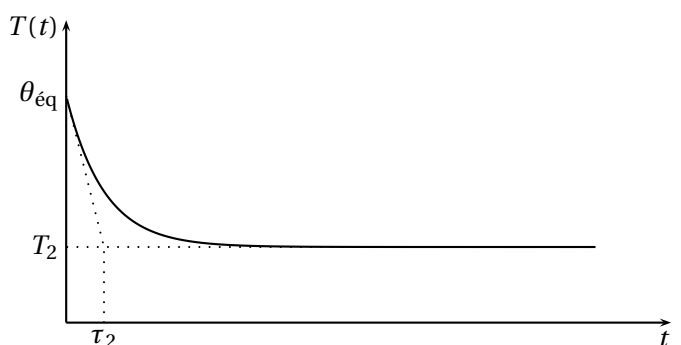
$$i'_0 = \frac{T_2 - T_{\text{air}}}{R_2}$$

la résistance étant R_2 .

Dans le cas de la brebis non tondue, avec $T_{\text{air}} = 17^\circ\text{C}$ et $p_m = p_{m0}$, on obtient $T_1 = T_{\text{air}} + \theta_{\text{éq}} - T_0 = 51^\circ\text{C}$.



Dans le cas de la brebis tondue, on a $T_2 = T_{\text{air}} + 2,6 = 27,6^\circ\text{C}$.



4 Réponse d'un groupe de brebis

□ 20 — La surface de l'extrémité d'une brebis est H^2 . La surface d'un côté latéral est $HL = H^2 X$.

Pour chaque cas, nous regardons quelle surface en contact avec l'air a été « supprimée ».

Cas 1 On supprime 2×5 extrémités, soit une surface $10H^2$.

Cas 1' On supprime 2×5 faces latérales, soit une surface $10H^2 X$.

Cas 2 On supprime 3×2 extrémités et 2×4 faces latérales, soit une surface $8H^2 + 6H^2 X$.

Cas 2' On supprime 2×4 faces latérales et 2×3 extrémités, soit une surface $6H^2 + 8H^2 X$.

Tableau récapitulatif :

Cas i	1	1'	2	2'
$S - S_i$	$10H^2$	$10H^2 X$	$2H^2(4 + 3X)$	$2H^2(3 + 4X)$
$X = 3,3$	$10H^2$	$33H^2$	$27,8H^2$	$32,4H^2$

La conductance étant proportionnelle à la surface de contact avec l'air, **le cas de plus faible conductance**

thermique est le cas 1'. Les brebis ont donc intérêt à adopter cette configuration.

Le flux thermique étant proportionnel à la surface de contact avec l'air, la diminution relative moyenne de flux, et donc de métabolisme, est

$$\frac{S_0 - S_{1'}}{S_0}$$

On a $S_0 = 6 \times (2H^2 + 4HL) = 12H^2(1 + 2X)$. Comme $S_0 - S_{1'} = 10H^2 X$, on a

$$\frac{S_0 - S_{1'}}{S_0} = \frac{10H^2 X}{12H^2(1 + 2X)} = \frac{5X}{6(1 + 2X)} = 0,36.$$

Le regroupement entraîne une diminution de métabolisme de 36 %.

Les brebis aux extrémités de la configuration présentent une plus grande surface de contact avec l'air que celle qui sont au milieu; elles ont donc intérêt à changer de place de temps en temps pour ne pas se refroidir plus vite que leurs congénères.

Partie III — Électrolytes

□ 1 — Une épaisseur dx de membrane contient $c^+(x)Sdx$ cations de charge $ec^+(x)Sdx$ et $c^-(x)Sdx$ anions de charge $-ec^-(x)Sdx$. La charge totale de la tranche étant nulle par neutralité, on a

$$ec^+(x)Sdx - ec^-(x)Sdx = 0$$

d'où $c^-(x) = c^+(x)$.

□ 2 — Un cation est soumis à la force électrique $\vec{F}_c = e\vec{E}$. Il se met donc en mouvement dans le même sens que \vec{E} : sa vitesse a le même sens que le champ électrique. On a donc $\mu^+ > 0$.

Un anion est soumis à la force électrique $\vec{F}_a = -e\vec{E}$, opposée à \vec{E} . Sa vitesse est donc opposée au champ électrique, d'où $\mu^- > 0$.

□ 3 — La densité volumique de charge des cations de vitesse \vec{v}^+ étant $ec(x)$, le vecteur densité de courant associé à ce mouvement de migration est

$$\vec{j}_m^+ = ec(x)\vec{v}^+.$$

Avec $\vec{v}^+ = \mu^+ E \vec{u}_x$, on en déduit

$$\vec{j}_m^+ = e\mu^+ c(x)E \vec{u}_x.$$

De même le vecteur densité de courant associé à la migration des anions s'écrit

$$\vec{j}_m^- = -ec(x)\vec{v}^-.$$

Avec $\vec{v}^- = -\mu^- E \vec{u}_x$, on en déduit

$$\vec{j}_m^- = e\mu^- c(x)E \vec{u}_x.$$

□ 4 — La loi de Fick exprime le vecteur de densité de courant de particules \vec{j}_{part} dû au gradient de concentration. Pour les cations, on a

$$\vec{j}_{part}^+ = -D^+ \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

Le vecteur densité de courant de charge associé est donné par $\vec{j}_d^+ = e\vec{j}_{part}^+$, soit

$$\vec{j}_d^+ = -eD^+ \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

De même pour les anions, le vecteur densité de courant de particules dû à la diffusion est

$$\vec{j}_{part}^- = -D^- \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

Le vecteur densité de courant de charge associé est donné par $\vec{j}_d^- = -e\vec{j}_{part}^-$, soit

$$\vec{j}_d^- = eD^- \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

□ 5 — Le vecteur densité de courant électrique \vec{j}^+ total dû à la migration et à la diffusion des cations dans la membrane est donné par

$$\vec{j}^+ = \vec{j}_m^+ + \vec{j}_d^+$$

soit

$$\vec{j}^+ = e\mu^+ c(x)E\vec{u}_x - eD^+ \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

De même pour les anions, on a

$$\vec{j}^- = \vec{j}_m^- + \vec{j}_d^-$$

soit

$$\vec{j}^- = e\mu^- c(x)E\vec{u}_x + eD^- \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

En posant $D^+ = \lambda\mu^+$ et $D^- = \lambda\mu^-$, on en déduit l'expression du vecteur densité de courant électrique total dans la membrane $\vec{j} = \vec{j}^+ + \vec{j}^-$:

$$\vec{j} = e(\mu^+ + \mu^-)c(x)E\vec{u}_x + \lambda e(\mu^- - \mu^+) \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

□ 6 — Avec $\vec{j} = \vec{0}$, on a

$$e(\mu^+ + \mu^-)c(x)E = \lambda e(\mu^+ - \mu^-) \frac{dc}{dx}$$

soit

$$E = \lambda \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} = \lambda \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \frac{d(\ln c)}{dx}.$$

On a donc

$$\vec{E} = \lambda K \frac{d(\ln c)}{dx} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad K = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-}.$$

□ 7 — Avec $E = -\frac{dV}{dx}$, on a

$$\frac{dV}{dx} = -\lambda K \frac{d(\ln c)}{dx} \vec{u}_x,$$

soit

$$dV = -\lambda K d(\ln c).$$

La tension entre les faces de la membranes est donnée par

$$U = V_I - V_{II} = \int_{V_{II}}^{V_I} dV = -\lambda K \int_{\ln(c_{II})}^{\ln(c_I)} d(\ln c) = -\lambda K \ln \frac{c_I}{c_{II}}$$

soit

$$U = \lambda K \ln \frac{c_{II}}{c_I}.$$

□ 8 — On calcule

$$U = 26 \frac{5,2 - 8}{5,2 + 8} \ln \frac{1}{10}$$

soit $U = 12,7 \text{ mV}$.

□ 9 — Si les cations sont complètement arrêtés, cela revient à considérer que la mobilité des cations est nulle; on reprend le résultat précédent avec $\mu^+ = 0$, d'où $K = -1$ et

$$U_c = -\lambda \ln \frac{c_{II}}{c_I}$$

soit $U_c = -60 \text{ mV}$.

Les anions sont complètement arrêtés si $\mu^- = 0$, d'où $K = 1$ et

$$U_a = \lambda \ln \frac{c_{II}}{c_I}$$

soit $U_a = 60 \text{ mV}$.

Partie IV — Les perchlorates (Centrale)

Q 1. Selon la loi de Hess, l'enthalpie standard de réaction s'exprime en fonction des enthalpies standard de formation des constituants selon

$$\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ,$$

où ν_i sont les coefficients stœchiométriques algébriques (positif pour un produit, négatif pour un réactif).

Q 2. On calcule

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{KClO}_3(\text{s})) + \frac{1}{2} \Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})) - \Delta_f H^\circ(\text{KClO}_4(\text{s}))$$

avec $\Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})) = 0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ car O_2 est dans son état standard de référence.

On a donc $\Delta_r H^\circ = 35,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Comme $\Delta_r H^\circ > 0$, la réaction est **endothermique**.

Q 3. D'après la relation de Van't Hoff,

$$\frac{d \ln K^\circ(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}.$$

Q 4. On en déduit par séparation des variables, dans l'approximation de Ellingham

$$\int_{K^\circ(T_1)}^{K^\circ(T)} d(\ln K^\circ) = \frac{\Delta_r H^\circ}{R} \int_{T_1}^T \frac{dT'}{T'^2}$$

soit

$$\ln \left(\frac{K^\circ(T)}{K^\circ(T_1)} \right) = \frac{\Delta_r H^\circ}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right)$$

d'où

$$K^\circ(T) = K^\circ(T_1) \exp \left[\frac{\Delta_r H^\circ}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \right].$$

Q 5. On calcule

$$K^\circ(T_0) = 6,43 \times 10^{-2} \times \exp \left[\frac{35,1 \times 10^3}{8,314} \left(\frac{1}{298} - \frac{1}{210} \right) \right]$$

soit $K^\circ = 1,70 \times 10^{-4}$.

Q 6. La constante d'équilibre ne dépend, pour une réaction donnée, que de la température. **Elle n'est donc pas influencée par les conditions de pression** qui règnent sur Mars.

Q 7. Le quotient de réaction s'écrit

$$Q_r = \frac{a(\text{KClO}_3(\text{s})) \sqrt{a(\text{O}_2(\text{g}))}}{a(\text{KClO}_4(\text{s}))}.$$

Pour les espèces solides, on a

$$a(\text{KClO}_3(\text{s})) = 1 \quad \text{et} \quad a(\text{KClO}_4(\text{s})) = 1.$$

Comme $a(\text{O}_2) = \frac{P_{\text{O}_2}}{P^\circ}$, on obtient

$$Q_r = \sqrt{\frac{P_{\text{O}_2}}{P^\circ}}.$$

Q 8. À l'équilibre, on a $Q_{r,\text{éq}} = K^\circ(T_0)$, d'où

$$P_{\text{O}_2,\text{éq}} = P^\circ (K^\circ(T_0))^2.$$

On calcule $P_{\text{O}_2,\text{éq}} = 2,89 \times 10^{-8} \text{ bar} = 2,89 \times 10^{-3} \text{ Pa}$.

Q 9. L'enthalpie libre de la réaction étudiée s'écrit

$$\Delta_r G = RT \ln \left(\frac{Q_r}{K^\circ(T_0)} \right) = RT \ln \sqrt{\frac{P'_{\text{O}_2}}{P_{\text{O}_2,\text{éq}}}} = \frac{RT}{2} \ln \left(\frac{P'_{\text{O}_2}}{P_{\text{O}_2,\text{éq}}} \right)$$

Comme $P'_{\text{O}_2} > P_{\text{O}_2,\text{éq}}$, on a $\Delta_r G > 0$.

La réaction se produit dans le sens \leftarrow .