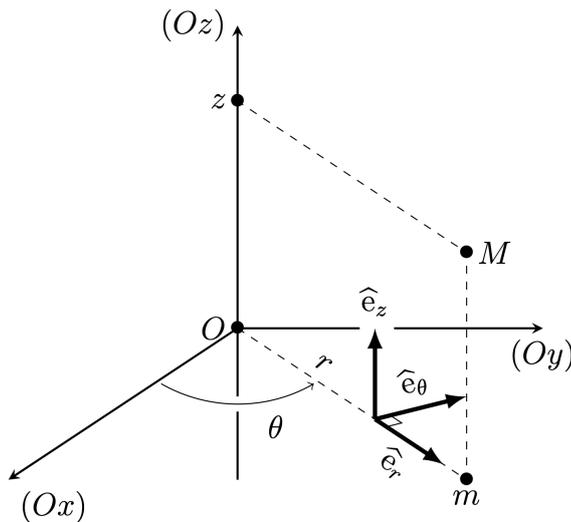


## DM n° 4 — à rendre le /12      Fluide en écoulement — oxydoréduction

## Physique en géométrie cylindrique : la circulation capillaire

On étudie un phénomène de mécanique des fluides décrit dans le système de coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)  $(r, \theta, z)$  du point  $M$  rappelé sur la figure 1;  $m$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$ . On rappelle aussi, dans ce système de coordonnées, les expressions de plusieurs opérateurs de l'analyse vectorielle. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ( $\vec{a}$ ) sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ( $\hat{e}_x$ ).



$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ .

En 1884, le physicien et médecin français Poiseuille débute son mémoire nommé « le Mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètre » par la phrase suivante : *Les physiologistes et les pathologistes se sont beaucoup occupés à rechercher les causes pour lesquelles tel viscère recevait plus de sang que tel autre.*

Il poursuit en indiquant que les causes essentielles en sont *l'étendue et le diamètre des petits vaisseaux qui composent le système capillaire et la pression du sang, déterminée par l'action du cœur.* Dans ce qui suit, le sang sera décrit comme un fluide en écoulement incompressible de masse volumique  $\rho = 1,1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et de viscosité dynamique  $\eta = 1,6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Il s'écoule en régime stationnaire le long des vaisseaux capillaires, tubes cylindriques de rayon  $R$  variant de 3 à 15  $\mu\text{m}$  de diamètre. On s'intéressera ici à un *capillaire typique*, de rayon  $R = 10 \mu\text{m}$ .

□ 1 — Rappeler l'expression et la signification physique du *nombre de Reynolds*  $\mathcal{R}_e$  d'un écoulement.

La physiologie humaine adulte est caractérisée par un volume sanguin total de l'ordre de 5 à 6 litres, une longueur totale du système capillaire de l'ordre de 100 000 km. Le *volume systolique* (la quantité de sang éjectée par chaque contraction du cœur) est d'environ 100 mL; la fréquence cardiaque de repos d'un adulte sera prise à 60 battements par minute. Enfin, la section cumulative (somme de toutes les sections) de tous les capillaires est d'environ  $\sigma = 0,5 \text{ m}^2$ .

□ 2 — Estimer la longueur moyenne d'un vaisseau capillaire typique.

□ 3 — Estimer le débit massique moyen  $D_m$  du sang dans un capillaire typique, puis le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  associé. Conclure.

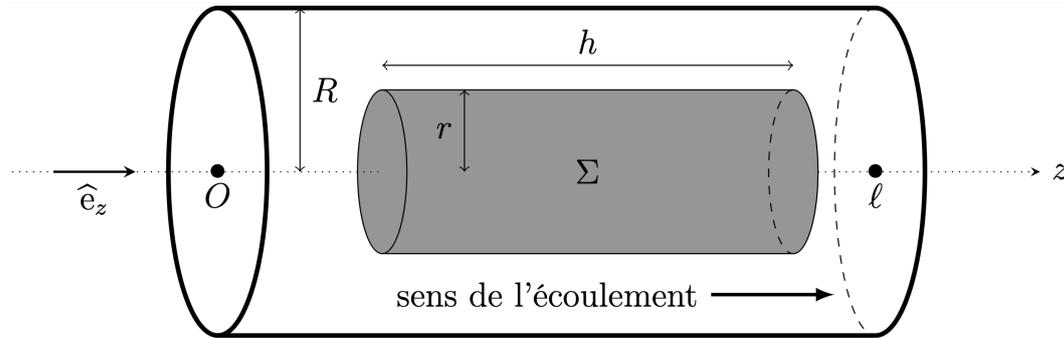


FIGURE 2 – Capillaire et élément de fluide étudié

Un capillaire typique est un tube cylindrique rigide, d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R = 10 \mu\text{m}$  et de longueur  $\ell = 5 \text{ cm}$ , parcouru par le fluide en écoulement incompressible et visqueux qui modélise le sang. On *admet* que la vitesse du sang ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe et de la distance  $z$  parcourue depuis l'entrée dans le capillaire; on l'écrit  $\vec{v} = v(r, z)\hat{e}_z$ . On néglige les effets de la pesanteur et la pression du sang dans le tube capillaire ne dépend que de  $z$ .

On étudie (cf. figure 2) l'écoulement du fluide situé à une distance au plus égale à  $r$  de l'axe du capillaire, sur une longueur arbitraire  $h < \ell$ .

□ 4 — Montrer que le caractère incompressible de l'écoulement assure que cet élément de fluide n'est pas accéléré.

□ 5 — En déduire l'existence d'un gradient de pression  $\frac{dP}{dz}$  constant dont on précisera l'expression en fonction, notamment, du terme de viscosité  $\eta \frac{\partial v}{\partial r}$ .

□ 6 — Exprimer complètement  $v(r, z)$  en fonction de  $R$ ,  $\eta$  et  $\frac{dP}{dz}$ .

□ 7 — En déduire la *résistance linéique d'écoulement*  $R_u$  définie par la relation  $\left| \frac{dP}{dz} \right| = R_u D_m$ .

□ 8 — Calculer numériquement l'écart de pression  $\Delta P$  de part et d'autre du capillaire en précisant en quel point la pression est la plus élevée.

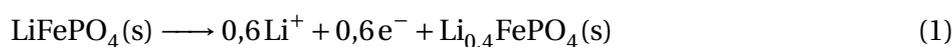
□ 9 — Exprimer la puissance des forces de pression exercées sur le fluide traversant le capillaire en fonction de  $\Delta P$ ,  $D_m$  et  $\rho$ , puis en fonction de  $R_u$ ,  $\rho$ ,  $D_m$  et  $\ell$ .

□ 10 — Que peut-on en déduire concernant la puissance totale du cœur humain? On attend ici une réponse numérique.

## Étude d'un accumulateur Li-ion

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Les batteries Li-ion  $\text{LiFePO}_4/\text{C}$  ont une densité d'énergie quatre fois supérieure à celle des batteries au plomb. Elles sont actuellement utilisées dans les voitures électriques et les smartphones. Un accumulateur est constitué d'une électrode en lithium fer phosphate ( $\text{LiFePO}_4$ ) et d'une électrode de graphite (C). En fonctionnement, l'électrode  $\text{LiFePO}_4$  ne peut pas être complètement dé-lithiée et la quantité de matière en ions  $\text{Li}^+$  effectivement extraite est de seulement 0,6 mol. On considère que les deux demi-équations suivantes modélisent les réactions qui se déroulent aux électrodes :



**Q 1.** Identifier, en justifiant, la réaction se déroulant à l'anode et celle à la cathode.

**Q 2.** Écrire l'équation bilan de la pile en fonctionnement.

**Q 3.** En utilisant une approche électrochimique, proposer une estimation de la masse d'un accumulateur 18650 de capacité spécifique 2600 mA · h.

**Q 4.** La masse d'un tel accumulateur est mesurée à  $m = 45,5$  g. Proposer une explication de la différence avec la masse obtenue à la question précédente.

### Données

*Valeurs relatives à l'accumulateur 18650*

Capacité spécifique :  $Q = 2600$  mA · h

Tension  $U = 3,7$  V

Masse  $m = 45,5$  g

Diamètre  $d = 18$  mm

Hauteur  $h = 65$  mm

Résistance interne  $r = 7,7$  mΩ

*Grandeurs générales*

Masses molaires

élément	Li	Fe	P	C	O	H
$M$ (g · mol <sup>-1</sup> )	6,9	55,8	31,0	12,0	16,0	1,0

Potentiels standard

couple	$\text{Li}^+/\text{Li}(\text{s})$	$\text{Li}^+/\text{LiFePO}_4(\text{s})$	$\text{Li}^+/\text{LiC}_6(\text{s})$
$E^\circ$ (V)	-3,0	0,6	-2,9

Constante de Faraday  $\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4$  C · mol<sup>-1</sup>