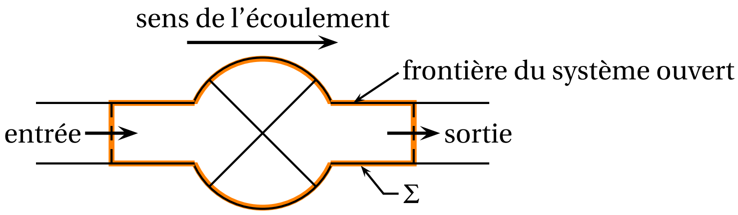
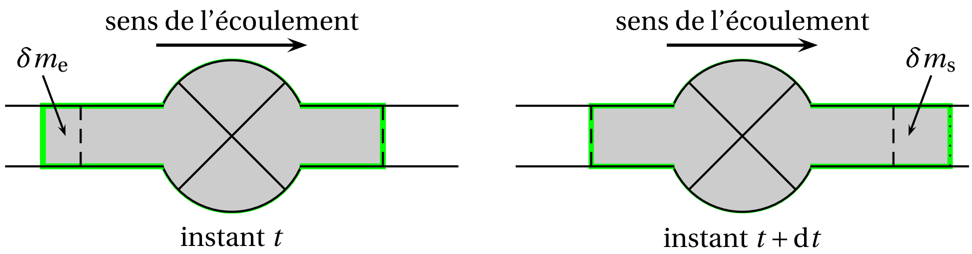
## Méthode d'étude d'un système ouvert

On considère un système ouvert $\Sigma$, traversé par un écoulement unidimensionnel : les grandeurs intensives sont uniformes sur la section d'entrée (repérées alors par l'indice « e ») et sur la section de sortie (repérées alors par l'indice « s »).
L'écoulement est stationnaire : les grandeurs intensives ne dépendent pas du temps en tout point fixe du système.




Le système fermé $\Sigma^*$ est construit à partir du système ouvert $\Sigma$, on lui ajoutant :
— à l'instant $t$ la masse $\delta m_\mathrm{e}$ qui entre dans $\Sigma$ entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$ ;
— à l'instant $t+\mathrm{d}t$ la masse $\delta m_\mathrm{s}$ qui sort de $\Sigma$ entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$.




➤ En régime stationnaire, on a $\boxed{\delta m_\mathrm{e} = \delta m_\mathrm{s} = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t}$ , où $D_\mathrm{m}$ est le débit massique traversant le système.

### Variation d'une grandeur extensive en régime stationnaire

Soit $Y$ une grandeur extensive et $y$ la grandeur massique (intensive) associée.

> En régime stationnaire, la variation $\mathrm{d}Y_{\Sigma^*} = Y_{\Sigma^*}(t+\mathrm{d}t) - Y_{\Sigma^*}(t)$ de $Y$ pour le système fermé $\mathrm{d}\Sigma^*$ pendant la durée $\mathrm{d}t$ s'écrit
> $$\mathrm{d}Y_{\Sigma^*} = \Delta y\, D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t,$$
> où $\Delta y = y_\mathrm{s} - y_\mathrm{e}$ est la différence entre la grandeur massique à l'entrée et à la sortie du système ouvert $\Sigma$.

➤ La variation $\mathrm{d}Y_{\Sigma^*}$ est infinitésimale, car prise entre deux instants infiniment proches.
➤ La différence $\Delta y$ n'est *a priori* pas infinitésimale, la grandeur massique pouvant varier de façon importante entre l'entrée et la sortie du système $\Sigma$.
➤ On relie ainsi la variation $\Delta Y_{\Sigma^*}$ relative à un système fermé à la différence de grandeurs d'*entrée* et de *sortie*, deux notions caractéristiques d'un système ouvert.

## Premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire

Pendant $\mathrm{d}t$, le fluide intérieur à $\Sigma$ peut recevoir le travail utile (ou travail indiqué) $\delta W_\mathrm{u}$ si l'élément de machine comporte des pièces mobiles[1]. Le système étant traversée par une masse $\delta m$ pendant $\mathrm{d}t$, on définit le **travail utile massique** $w_\mathrm{u}$ par

$$\boxed{\delta W_\mathrm{u} = w_\mathrm{u}\,\delta m}.$$

Le fluide intérieur à $\Sigma$ recevant le transfert thermique $\delta Q$ pendant $\mathrm{d}t$, on définit le **transfert thermique massique** $q$ par

$$\boxed{\delta Q = q\,\delta m}.$$

1. Le travail des forces de pression n'est pas comptabilité comme travail utile ; on l'appelle aussi « travail de transvasement » ; c'est lui qui assure l'écoulement du fluide.

➤ Attention : $w_u$ et $q$ sont des grandeurs massiques, mais ce ne sont pas des grandeurs intensives au sens de grandeurs « locales » : il s'agit de grandeurs relatives à l'unité de masse traversant le système ouvert.

Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_u + q\,,$$

où $h$ est l'enthalpie massique, $e_c$ l'énergie cinétique massique, et $Oz$ la verticale ascendante.

➤ Les termes de cette équations sont en $\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

➤ $\Delta h = h_s - h_e$ représente la variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie du système ouvert.

## Second principe pour un système ouvert en régime stationnaire

Le second principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit

$$\Delta s = s_{\text{reçu}} + s_{\text{créé}}\,.$$

➤ Le terme $\Delta s = s_s - s_e$ représente la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie du système ouvert.

➤ L'entropie reçue par le système traversé par la masse $\delta m$ de fluide pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit $\delta S_{\text{reçu}} = s_{\text{reçu}}\,\delta m$, où $s_{\text{reçu}}$ est l'**entropie échangée par unité de masse traversant le système**, en $\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

➤ L'entropie créée au sein du système traversé par la masse $\delta m$ de fluide pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit $\delta S_{\text{créé}} = s_{\text{créé}}\,\delta m$, où $s_{\text{créé}}$ est l'**entropie créée par unité de masse traversant le système**, en $\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

➤ Dans le cas d'une évolution adiabatique, on a $s_{\text{reçu}} = 0$.

➤ Dans le cas d'une évolution réversible, on a $s_{\text{créé}} = 0$.

## Diagramme enthalpique (dit diagramme des frigoristes)

### Principe général

On représente l'ensemble des états du fluide sur un diagramme plan, la pression $P$ étant en ordonnée et l'enthalpie massique $h$ en abscisse.

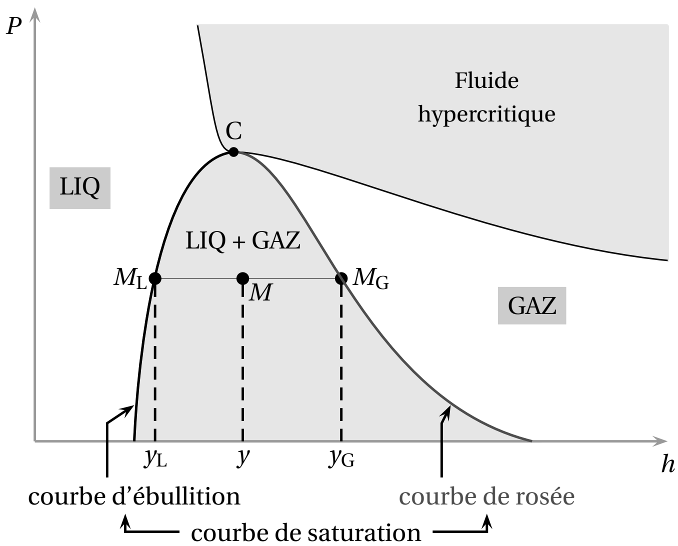
➤ La pression est usuellement représentée en échelle logarithmique.

La courbe de saturation délimite la zone du diagramme dans laquelle le fluide est diphasé (liquide + vapeur) : elle est constituée de la courbe d'ébullition et de la courbe de rosée, qui se rejoignent au point critique C.

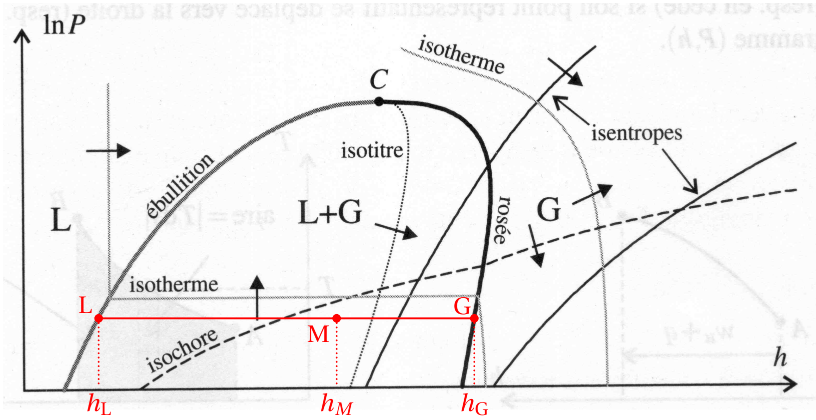
➤ Que ce soit $P$ ou $T$ qui est représentée en ordonnée, tout segment horizontal $M_LM_G$ dans la zone diphasée est à la fois une isotherme et une isobare.

➤ Le titre massique en vapeur dans la zone diphasée est donné par la **règle des moments** :

$$\boxed{x = \frac{h(M) - h_L}{h_G - h_L} = \frac{M_LM}{M_LM_G}}\,.$$

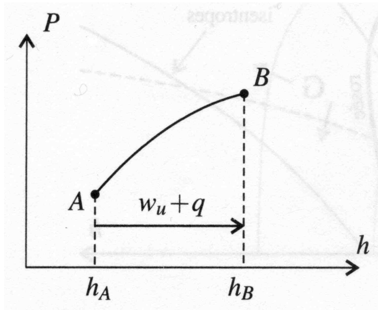


On représente la pression $P$, en échelle logarithmique le plus souvent, en fonction de l'enthalpie massique $h$.
Les flèches indiquent la direction dans laquelle la grandeur constante sur la courbe augmente.




Entre les points $A$ et $B$ à l'entrée et à la sortie du système, la différence des abscisses donne directement la somme du travail utile massique $w_u$ et du transfert thermique massique $q$ reçu par le fluide :

$$h_B - h_A = w_u + q\,.$$




- Une détente isenthalpique (Joule-Thomson) dans un détendeur est représentée par un segment vertical descendant.
- En dernière page de ce document, on donne le diagramme « officiel » du tétrafluoroéthane, fluide réfrigérant de code R134a.

## Relation de Bernoulli

### Hypothèses

On considère un écoulement **parfait**, **stationnaire**, **incompressible** et **homogène**.

- Un écoulement est parfait si on néglige tous les phénomènes diffusifs : viscosité, échanges thermiques. L'évolution du fluide est donc isentropique (adiabatique réversible).
- À nombre de Reynolds élevé, on peut considérer un écoulement parfait en se plaçant en dehors de la couche limite.

Dans un référentiel galiléen, pour un écoulement parfait stationnaire, incompressible et homogène d'un fluide soumis uniquement aux forces de pression et de pesanteur, la relation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = C(\mathcal{L})$$

constante le long d'une ligne de courant $\mathcal{L}$, où $Oz$ est la verticale ascendante.

- La relation de Bernoulli traduit la **conservation de l'énergie** d'une particule de fluide au cours de l'écoulement :

$$\underbrace{\frac{p}{\mu}}_{\substack{\text{énergie potentielle}\\ \text{massique}\\ \text{des forces de pression}}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\substack{\text{énergie cinétique}\\ \text{massique}}} + \underbrace{gz}_{\substack{\text{énergie potentielle}\\ \text{massique de pesanteur}}} = C(\mathcal{L})$$

### Applications de la relation de Bernoulli

#### Écoulement unidimensionnel uniforme

Si le champ des vitesses est uniforme $\vec{v} = V_0\,\vec{e}_x$, la répartition de pression au sein du fluide est régie par l'hydrostatique :

$$P(z) + \mu g z = \text{cte}\,.$$

- Dans le cas d'une conduite horizontale de section constante, on néglige usuellement l'effet de la pesanteur : on considère la pression constante en tout point de la conduite.

### Effet Venturi

Dans une conduite horizontale, on a $\dfrac{P}{\mu}+\dfrac{v^2}{2}=$ cte. Si la conduite est de section variable, la conservation du débit volumique s'écrit $D_\mathrm{v}=Sv$ : si la section diminue, la vitesse augmente et la pression diminue.

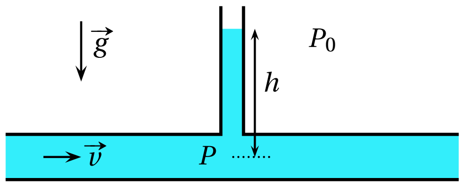
> Dans une conduite de section variable, les zones de faibles section, donc de grande vitesse, sont des zones de faible pression.

- Si la pression diminue jusqu'à la pression de vapeur saturante, il se forme des bulles de vapeur qui implosent violemment : c'est le phénomène de **cavitation**.

### Prise de pression statique

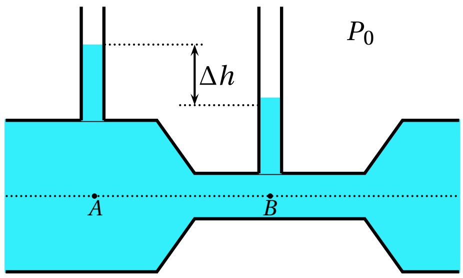
Une prise de section statique consiste en un tube placé verticalement sur la paroi d'un conduite. On observe une montée du liquide dans le tube jusqu'à une hauteur $h$, reliée à la pression dans la conduite par

$$h=\frac{P-P_0}{\mu g}.$$



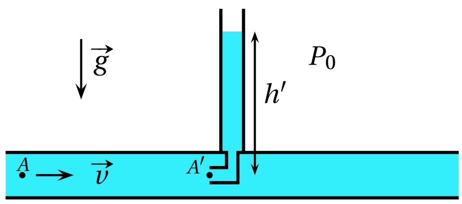

### Débitmètre de Venturi

On note $S_A$, $v_A$ et $P_A$ la section, la vitesse et la pression en $A$, et $S_B$, $v_B$ et $P_B$ ces même grandeurs en $B$.
Débit conservé : $S_A v_A = S_B v_B$.
Répartition hydrostatique verticale de la pression : $P_A - P_B = \mu g \Delta h$.
Bernoulli : $\dfrac{P_A}{\mu}+\dfrac{v_A^2}{2}=\dfrac{P_B}{\mu}+\dfrac{v_B^2}{2}$.
On en déduit $D_\mathrm{v}=\dfrac{S_A S_B}{\sqrt{S_A^2-S_B^2}}\sqrt{2g\Delta h}$ : on déduit $D_\mathrm{v}$ de la mesure de $\Delta h$.



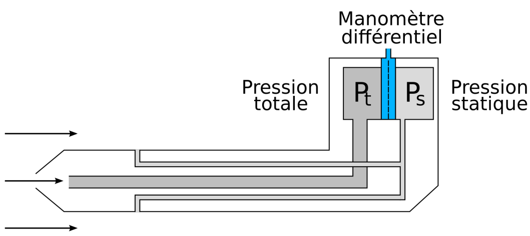

### Prise de pression dynamique

Une prise de section dynamique consiste en un tube placé verticalement sur la paroi d'un conduite, dont l'orifice d'entrée fait face à l'écoulement.
Le point $A'$ est un point d'arrêt : $v_{A'}=0$. Bernoulli : $P_{A'}=P+\mu\dfrac{v^2}{2}$, où $P$ est la pression dans la conduite (en $A$).
Avec $P_{A'}=P_0+\mu g h'$ on a $h'=\dfrac{P-P_0}{\mu g}+\dfrac{v^2}{2g}$




### Tube de Pitot

Un tube de Pitot est constitué d'une prise de pression statique et d'une prise de pression dynamique.
La prise de pression statique mesure la pression $P_\mathrm{s}=P$, pression dans le fluide.
La prise de pression dynamique mesure la pression dynamique $P_\mathrm{t}=P+\mu\dfrac{v^2}{2}$.




Le manomètre différentiel retourne la différence des deux pressions mesurées, qui permet d'accéder à la vitesse du fluide : $P_\mathrm{t}-P_\mathrm{s}=\mu\dfrac{v^2}{2}$.

## Bilan macroscopique d'énergie mécanique

L'étude d'un système ouvert se fait en se ramenant à un système fermé comme présenté en début de document. La variation d'énergie mécanique du système fermé entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$ s'écrit alors

$$\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \left[\Delta e_\mathrm{c} + \Delta(gz)\right]\delta m = \left[\Delta e_\mathrm{c} + \Delta(gz)\right] D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$$

Le théorème de l'énergie mécanique $\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \delta W_\mathrm{visc} + \delta W_\mathrm{ext}$ prend en compte le travail des forces internes visqueuses et des forces externes au système.

Pour un système ouvert en régime stationnaire, le bilan d'énergie mécanique s'écrit

$$D_\mathrm{m}\left[\Delta e_\mathrm{c} + \Delta(gz)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{ext} + \mathcal{P}_\mathrm{visc}$$

— $\Delta e_\mathrm{c} + \Delta(gz)$ est la variation d'énergie mécanique massique entre l'entrée et la sortie ;
— $\mathcal{P}_\mathrm{ext}$ est la puissance des forces extérieures ;
— $\mathcal{P}_\mathrm{visc}$ est la puissance des forces intérieures de viscosité (au sein du fluide).

➤ **Pour un écoulement parfait et incompressible on a $\mathcal{P}_\mathrm{visc} = 0$.**
➤ La puissance des forces visqueuses sur une paroi immobile est nulle (vitesse nulle).

On peut décomposer les actions extérieures en distinguant les forces de pression et les forces « utiles » (pompe, turbine…) : $\mathcal{P}_\mathrm{ext} = \mathcal{P}_\mathrm{pres} + \mathcal{P}_\mathrm{u}$.

La puissance des forces de pression s'écrit $\mathcal{P}_\mathrm{pres} = P_\mathrm{e}S_\mathrm{e}v_\mathrm{e} - P_\mathrm{s}S_\mathrm{s}v_\mathrm{s} = (P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s})D_\mathrm{v} = \dfrac{P_\mathrm{e} - P_\mathrm{v}}{\mu}D_\mathrm{m}$, avec le débit massique $D_\mathrm{m} = \mu D_\mathrm{v}$ où $D_\mathrm{v} = S_\mathrm{e}v_\mathrm{e} = S_\mathrm{s}v_\mathrm{s}$, d'où

$$D_\mathrm{m}\left[\Delta e_\mathrm{c} + \Delta\left(\frac{P}{\mu}\right) + \Delta(gz)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{u} + \mathcal{P}_\mathrm{visc}\,.$$

Pour un système ouvert en écoulement stationnaire et incompressible, le théorème de l'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme

$$D_\mathrm{m}\left[\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + gz_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + gz_\mathrm{e}\right)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{u} + \mathcal{P}_\mathrm{visc}\,,$$

ou en terme de travail par unité de masse traversante

$$\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + gz_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + gz_\mathrm{e}\right) = w_\mathrm{u} + w_\mathrm{visc}\,.$$

Cette forme est appelée **relation de Bernoulli généralisée**.

➤ On a $\mathcal{P}_\mathrm{u} > 0$ pour une pompe, et $\mathcal{P}_\mathrm{u} < 0$ pour une turbine.

### Complément : perte de charge hydraulique dans une conduite

La charge d'un écoulement est définie en hydraulique en terme de hauteur :

$$H = \frac{P}{\mu g} + \frac{v^2}{2g} + z\,.$$

Dans le cas d'un écoulement parfait, la relation de Bernoulli traduit la conservation de la charge de l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement réel sans travail utile échangé (conduite sans partie mobile), la relation de Bernoulli généralisée traduit la diminution de la charge lors de l'écoulement :

$$\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu g} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_\mathrm{s}\right) = \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu g} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_\mathrm{e}\right) - \Delta H$$

où $\Delta H > 0$ est la perte de charge.

➤ Pour un fluide incompressible dans une conduite horizontale de section constante, la perte de charge se traduit par une diminution de pression $\Delta P = \mu g \Delta H$.

#### Pertes de charges régulières

Les pertes de charges régulières sont réparties tout au long de la conduite. On les écrit sous la forme

$$\Delta P_{\text{reg}} = f\,\frac{\mu U^2}{2}\,\frac{L}{D}$$

où $U$ est la vitesse débitante, $L$ la longueur de la conduite, $D$ son diamètre et $f$ le coefficient de perte de charge.

- ➤ Le coefficient de perte de charge dépend du nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ et de la rugosité relative $\varepsilon/D$ de la paroi ; il est donné par le diagramme de Moody.
- ➤ On a bien $\Delta P \propto L$ pour des pertes de charge régulières.

#### Pertes de charges singulières

Les pertes de charge singulières sont localisées au niveau des singularités de la canalisation (coude, élargissement, rétrécissement...). On les écrit sous la forme [2]

$$\Delta P_{\text{sing}} = \Lambda\,\frac{\mu U^2}{2}$$

où $\Lambda$ est le coefficient de pertes de charge singulières, donné par des tables.

- ➤ Dans une conduite donnée, la perte de charge totale est $\Delta P_{\text{tot}} = \Delta P_{\text{reg}} + \Delta P_{\text{sing}}$.

## Bilans dynamiques

### Bilan de quantité de mouvement

Étant donné un système fermé $\mathscr{S}$, le théorème de la résultante cinétique s'écrit

$$\frac{\vec{P}(t+\mathrm{d}t)-\vec{P}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où $\vec{F}_{\text{ext}}$ est la résultante des forces **extérieures** s'appliquant sur le système, $\vec{P}(t)$ sa quantité de mouvement à l'instant $t$ et $\vec{P}(t+\mathrm{d}t)$ à l'instant $t+\mathrm{d}t$.

- ➤ Seules les actions extérieures interviennent. On peut éliminer une action inconnue en définissant un système qui la rend intérieure.
- ➤ La résultante des forces de pression uniforme sur une surface fermée est nulle : $-\oiint_{M\in\Sigma} p_0\,\mathrm{d}\vec{S}_M = \vec{0}$.
- ➤ On considère la pression atmosphérique comme uniforme sur des dimensions « à taille humaine ».

### Bilan de moment cinétique

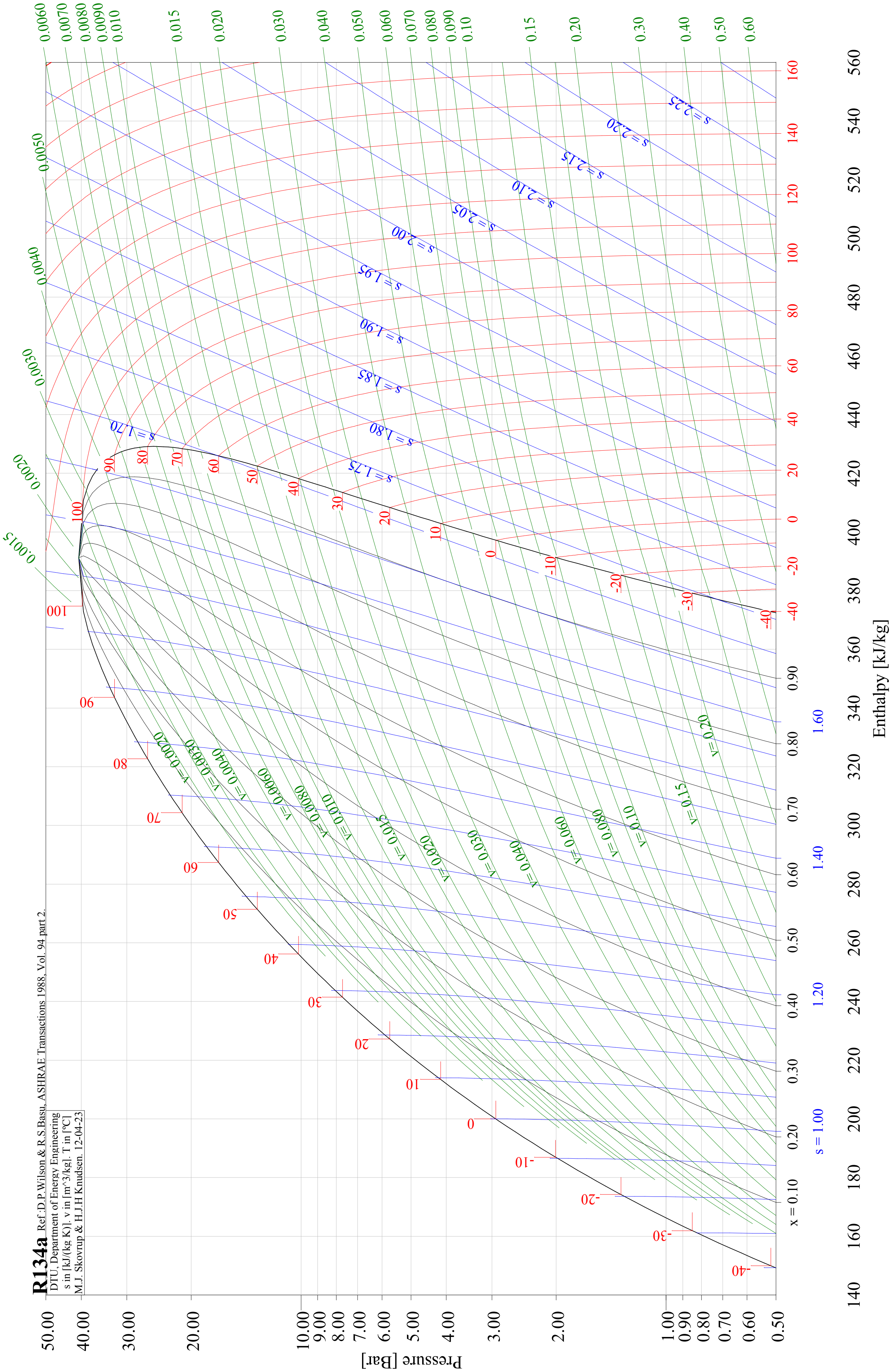
Le taux de variation du moment cinétique du système fermé vérifie le **théorème du moment cinétique** :

$$\frac{\vec{L}_O(t+\mathrm{d}t)-\vec{L}_O(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathscr{M}}_{\text{ext}}(O)$$

où $O$ est un point fixe dans le référentiel d'étude.

- ➤ Seules les actions extérieures interviennent. On peut éliminer une action inconnue en définissant un système qui la rende intérieure.
- ➤ Le moment résultant en un point $O$ des forces de pression uniforme sur une surface fermée est nul.

2. Cette relation n'est pas à connaître, elle est donnée ici pour information.


R134a Ref.:D.P.Wilson & R.S.Basu, ASHRAE Transactions 1988, Vol. 94 part 2.
DTU, Department of Energy Engineering
s in [kJ/(kg K)]. v in [m^3/kg]. T in [°C]
M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen. 12-04-23
Enthalpy [kJ/kg]
Pressure [Bar]