Bilans d'énergie

2 — Navire brise-glace

1. Le point A correspond à un liquide saturant à 0,5 bar = 50 kPa, ce qui permet de le positionner.

La compression AB est isenthalpique jusqu'à 30 bar = 3 MPa, ce qui permet de tracer le segment vertical correspondant.

L'évolution dans la chaudière est isobare, jusqu'à 300 °C : on trace BC.

L'évolution dans la turbine est isentropique, jusqu'à la pression 0,5 bar, ce qui permet de tracer la courbe suivant l'isentropique.

2. On relève les grandeurs pour chaque point du cycle.

point	P (bar)	T °C	x	h (kJ · kg^{-1})
A	0,5	85	0	350
B	30	85	0	350
C	30	300	1	3000
D	0,5	85	0,83	2200

On interpole T_A, x_D et h_D.

Les isothermes sont verticales dans la zone liquide, l'évolution isenthalpique est donc aussi isotherme, d'où $T_B = T_A$.

3. L'efficacité est définie par

$$\eta = \frac{-w_u}{q_c} = \frac{h_C - h_D}{h_C - h_B} = \frac{3000 - 2200}{3000 - 350}$$

soit $\boxed{\eta = 0{,}30 = 30\ \%}$.

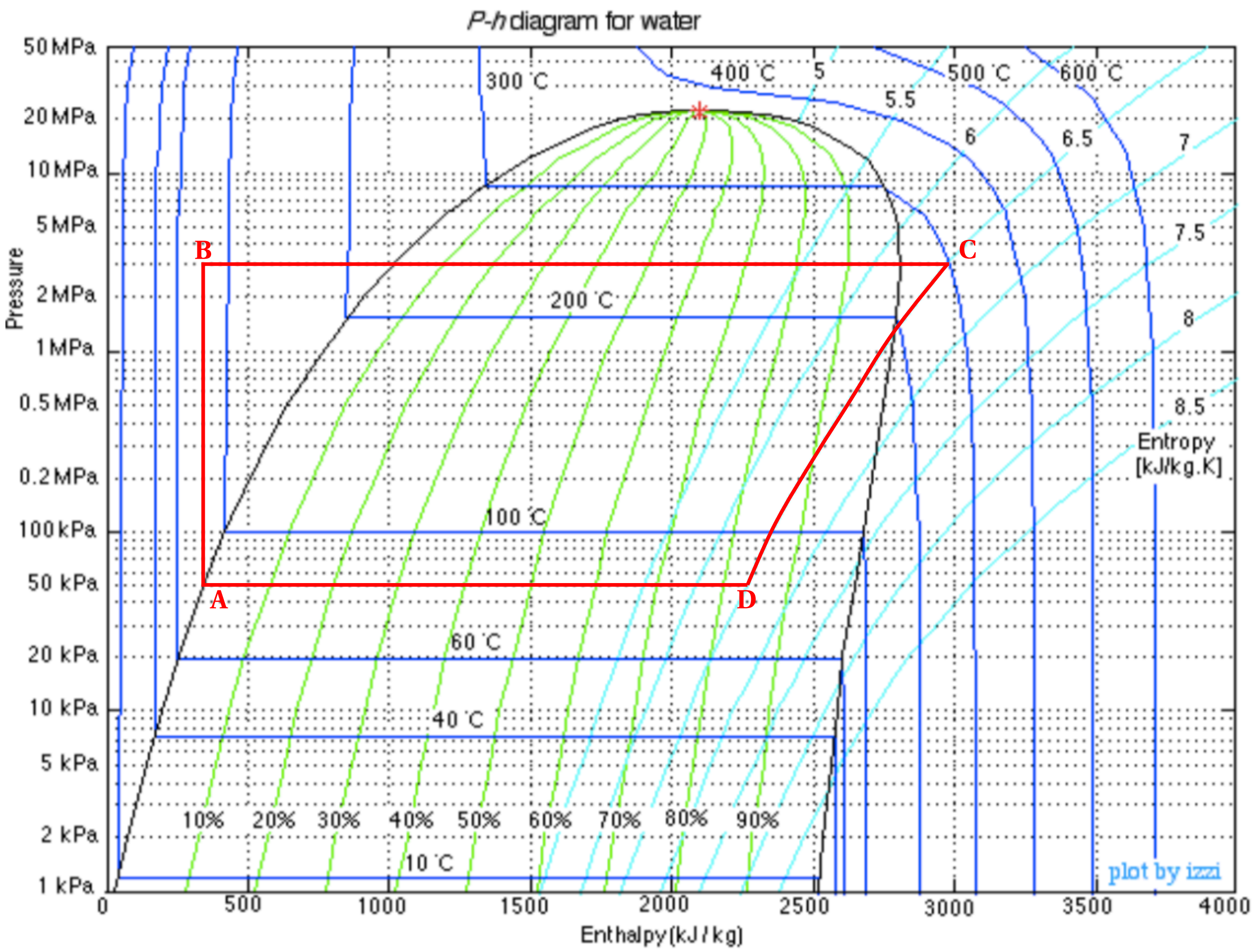
4. L'énergie mécanique indiquée (ou utile) et donnée par

$$W_u = m w_u = m(h_C - h_D)$$

d'où comme 1 kW · h = 3600 W · s

$$m = \frac{W_u}{h_C - h_D} = \frac{3600}{3000 - 2200}$$

soit $\boxed{m = 4{,}5\ \text{kg}}$.



3 — Machine frigorifique

1. La pression de vapeur saturante correspondant à une température −30 °C est $P_1 = 0{,}85$ bar. Cette isobare coupe l'isotherme −20 °C dans le domaine de la vapeur sèche, ce qui permet de positionner le point 1.

La compression 12 étant adiabatique réversible, elle est isentropique, ce qui permet de tracer le segment selon une isentrope, jusqu'à $P_2 = 10$ bar.

L'évolution 23 est une isobare (horizontale), jusqu'à rencontrer l'isotherme −30 °C, ce qui se produit dans le domaine du liquide (où les isothermes sont des demi-droites verticales). On peut tracer le point 3.

La détente adiabatique 34 se fait sans travail utile ; elle est donc isenthalpique : segment vertical jusqu'à croiser l'isobare 12.

point	P (bar)	T °C	x	h (kJ·kg^{-1})
1	0,85	−20	1	387
2	10	60	1	440
3	30	30	0	242
4	0,85	−30	0,37	242

2. L'intérêt d'amener le fluide au-delà de sa courbe de saturation au point 1 est d'éviter la présence de liquide dans la pompe. Cela permet en outre d'augmenter $q_{41} = h_4 - h_1$ en augmentant h_4, qui est l'énergie utile.

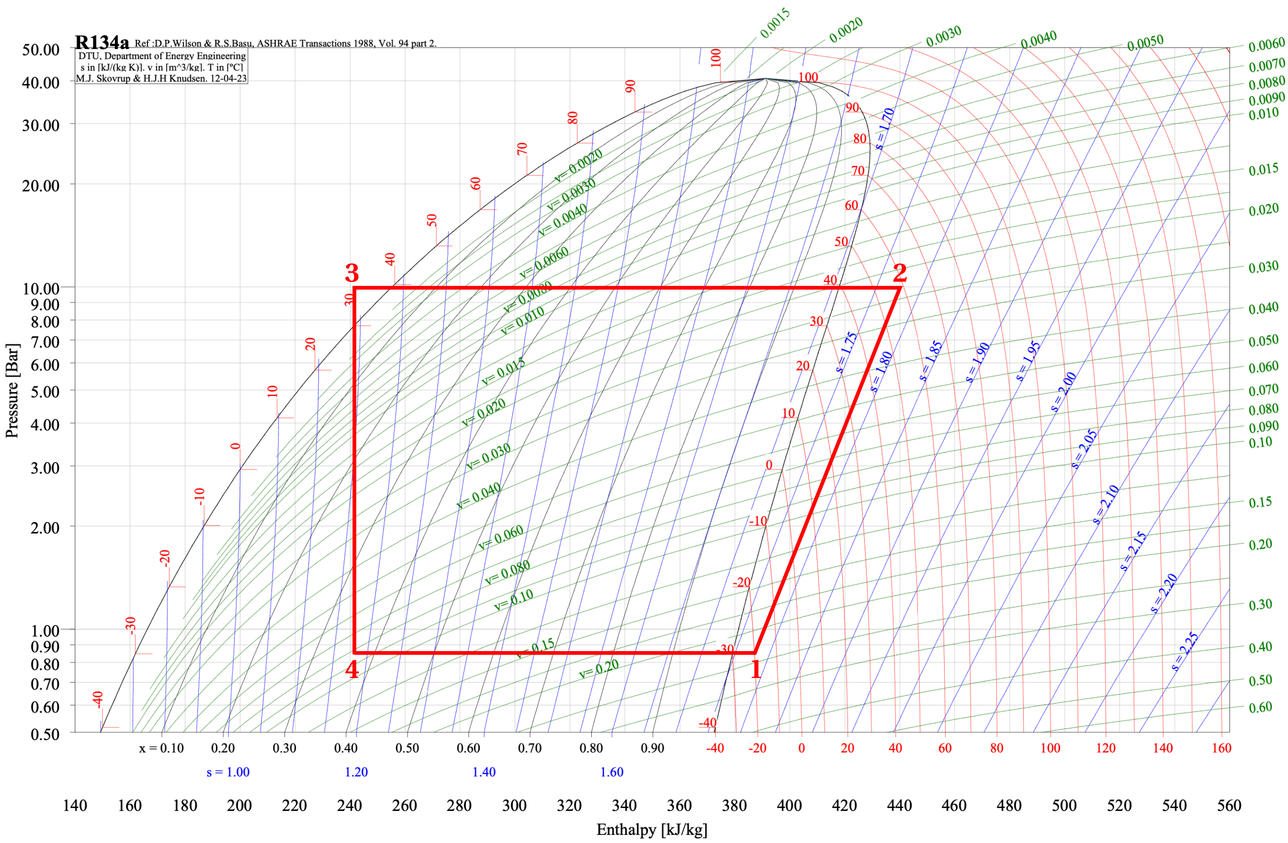
L'intérêt d'amener le point 3 dans le domaine liquide est d'éviter d'éventuelles bulles dans le détendeur en entrée, et d'augmenter q_{41} en diminuant $h_1 = h_3$.

Si la transformation dans le compresseur n'est pas réversible, on a $s_c > 0$ pour l'étape 12, donc $\Delta s = s_c > 0$ car $s_e = 0$. L'évolution ne suit plus l'isentrope, et le point 2 est décalé « vers la droite ». On a donc $h_2' > h_2$, ce qui augmente $w_u = h_2' - h_1$ (énergie coûteuse) sans gagner sur le transfert utile q_{41}.

3. L'efficacité est définie par

$$\eta = \frac{q_c}{w_u} = \frac{q_{41}}{w_{12}} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}.$$

On calcule $\boxed{\eta = 2{,}74}$.



4 — Tuyère

Le moteur Vulcain a pour rôle de propulser l'étage principale de la fusée Ariane 5. La réaction fortement exothermique entre du dihydrogène et du dioxygène produit de la vapeur d'eau ($P_e = 5$ bar, $T_e = 3300$ °C), qui est expulsée avec un débit volumique $D_m = 250\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ au travers d'une tuyère où elle est accélérée, ce qui génère en réaction une force de poussée sur la fusée.
On modélise la vapeur d'eau comme un gaz parfait tel que $c_p = 2{,}0\times10^3\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et $\gamma = 1{,}3$, indépendamment de la température.

1. Il faut supposer que la vapeur d'eau est considérée comme un gaz parfait, et que son évolution dans la tuyère, adiabatique, est réversible. On peut alors écrire la loi de Laplace en variables P et T, soit

$$P_s T_s^{1-\gamma} = P_e T_e^{1-\gamma},$$

d'où

$$\boxed{T_s = T_e\left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

On calcule (attention d'exprimer les températures en kelvin) $\boxed{T_s = 2200\ °\mathrm{C}}$.

2. Le premier principe s'écrit

$$\Delta h + \Delta(e_c) + \Delta(gz) = w_u + q.$$

On a $q = 0$, $w_u = 0$, on néglige $\Delta(gz)$, d'où en négligeant la vitesse d'entrée des gaz dans la tuyère

$$\Delta h + \frac{v_s^2}{2} = 0.$$

On a

$$\Delta h = h_s - h_e = c_p(T_s - T_e),$$

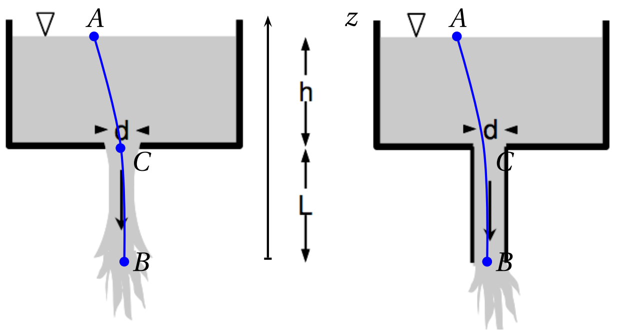
d'où

$$\boxed{v_s = \sqrt{2c_p(T_e - T_s)}}.$$

On calcule $\boxed{v_s = 2{,}1\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

3. La force de poussée au démarrage $F_p = D_m v_s$ vaut donc $\boxed{F_p = 5{,}2\times10^5\ \mathrm{N}}$.

5 — Vidange d'une cuve



1. Considérons une ligne de courant allant d'un point A de la surface libre à un point B dans le jet libre, à la distante verticale L en dessous de l'ouverture.
Dans les deux cas, on a $P(A) = P_0$, $P(B) = P_0$ et $v(A) = 0$; en notant $v = v(B)$, la relation de Bernoulli conduit alors à

$$\frac{P_0}{\mu} + gh = \frac{P_0}{\mu} - gL + \frac{v^2}{2}$$

d'où

$$\boxed{v = \sqrt{2g(h+L)}}.$$

2. Premier cas
On applique la relation de Bernoulli entre le point A et le point C au niveau de l'ouverture, où $P(B) = P_0$:

$$\frac{P_0}{\mu} + gh = \frac{P_0}{\mu} + \frac{v_C^2}{2}$$

d'où $\boxed{v_C = \sqrt{2gh}}$.

Deuxième cas
Par conservation du débit volumique dans le tube, la vitesse au niveau de l'ouverture est la même que celle au point B, c'est-à-dire $\boxed{v'_C = \sqrt{2g(h+L)}}$.

3. Premier cas
Le débit est donné par $D_v = \pi\frac{d^2}{4}v_C$, soit

$$\boxed{D_v = \pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2gh}}.$$

On calcule $\boxed{D_v = 0{,}31\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}}$. **Deuxième cas**
Le débit est donné par $D_v = \pi\frac{d^2}{4}v'_C$, soit

$$\boxed{D'_v = \pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2g(h+L)}}.$$

On a $D'_v > D_v$: le dispositif le plus efficace est celui comportant le tube vertical.

4. Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points C et B :

$$\frac{P(C)}{\mu} + gL = \frac{P_0}{\mu}$$

car $v(C) = v(B)$ par conservation du débit volumique.
La pression au point C diminue avec L ; le phénomène de cavitation se produit pour

$$P(C) = P_{sat} = P_0 - gL$$

soit pour

$$L = \frac{P_0 - P_{sat}}{\mu g} = 10{,}0\ \mathrm{m}.$$

Le débit vaut alors

$$D_v = \pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2g\left(h + \frac{P_0 - P_{sat}}{\mu g}\right)}$$

soit $\boxed{D_v = 0{,}54\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}}$.

6 — Vidange — oral Mines PC

Le fond d'un réservoir de section variable

$$S(z) = S_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha$$

est percé d'un petit trou.
Calculer le temps T de vidange entre les altitudes z_1 et z_2.
Quelle valeur de α choisir pour que T soit une fonction linéaire de $z_2 - z_1$?
Notons σ l'aire du petit trou percé à la base du réservoir ($z = 0$).

➤ On note Oz la verticale ascendente.

On considère en première approximation l'écoulement comme stationnaire en négligeant la vitesse des points de la surface libre, en supposant $S_0 \gg \sigma$. La relation de Bernoulli entre un point de la surface libre et un point du jet libre en sortie s'écrit alors

$$\frac{P_0}{\mu} + 0 + gz = \frac{P_0}{\mu} + \frac{v^2}{2} + 0$$

d'où la vitesse de sortie

$$\boxed{v = \sqrt{2gz}}\,.$$

Dans un second temps, nous allons prendre en compte la vitesse $-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ des points de la surface libre pour écrire la conservation du débit volumique (liquide incompressible) entre la surface libre et l'orifice de sortie :

$$D_\mathrm{v} = -S(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sigma v$$

d'où

$$z^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\sigma}{S_0}\sqrt{2g}z_0^\alpha\,\mathrm{d}t\,.$$

Le temps de vidange entre les altitudes z_1 et $z_2 < z_1$ vérifie alors

$$\int_{z_1}^{z_2} z^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\sigma}{S_0}\sqrt{2g}z_0^\alpha T\,,$$

soit

$$\left[\frac{z^{\alpha+1/2}}{\alpha+1/2}\right]_{z_1}^{z_2} = -\frac{\sigma}{S_0}\sqrt{2g}z_0^\alpha T\,.$$

On a alors

$$\boxed{T = \frac{S_0}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{1}{(1+2\alpha)z_0^\alpha}\left[z_1^{\alpha+1/2} - z_2^{\alpha+1/2}\right]}\,.$$

On a alors

$$\boxed{T = K(z_1 - z_2) \quad \text{pour} \quad \alpha = \frac{1}{2}}\,,$$

avec $K = \dfrac{S_0}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{g}}\dfrac{1}{(1+2\alpha)z_0^\alpha}$.

➤ On peut répondre directement à la deuxième question avec moins de calculs, à partir de la relation issue de la conservation du débit volumique

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma}{S_0}\frac{\sqrt{2g}}{z_0^\alpha}z^{1/2-\alpha}\,.$$

Il faut $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ = cte pour avec une hauteur variant de façon affine avec le temps, soit $\alpha = 1/2$ pour que la dérivée précédente ne dépende plus de z.

7 — Phénomène de cavitation

1. On applique la relation de Bernoulli sur la ligne de courant joignant les points A et B :

$$P(A) + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P(B) + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2\,.$$

À la surface libre, on a $P(A) = P_0$. Le point B étant dans un jet libre, $P(B) = P_0$. La hauteur d'eau étant constante, on a $v_A = 0$. Avec $z_A = H$ et $z_B = 0$, on en déduit la vitesse $v = v_B$ de sortie :

$$\boxed{v = \sqrt{2gH}}\,.$$

On calcule $\boxed{v = 56{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.
Le débit volumique vaut

$$D_\mathrm{v} = \pi\frac{D^2}{4}v\,.$$

On calcule $D_\mathrm{v} = 4{,}0\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}} = 4000\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$.

2. On applique la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant joignant les points A et C :

$$P_0 + \rho g H = P(z) + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z\,.$$

La section de la conduite étant identique en B et en C, on en déduit

$$v_C^2 = v_B^2 = 2gH\,,$$

d'où

$$\boxed{P(z) = P_0 - \rho g z}\,.$$

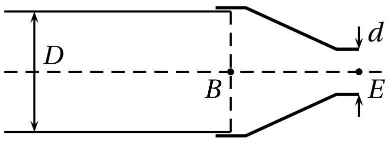
La pression décroît quand on s'élève dans la conduite. Le phénomène de cavitation se produit pour

$$P(z_\mathrm{c}) = P_0 - \rho g z_\mathrm{c} = P_\mathrm{sat}\,,$$

soit pour

$$\boxed{z_\mathrm{c} = \frac{P_0 - P_\mathrm{sat}}{\rho g} = 9{,}8\ \mathrm{m}}\,.$$

3. Pour remédier à ce problème (pouvant provoquer la rupture de la conduite), on visse à l'extrémité aval une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie $d < D$, avec $d = 15$ cm.



3.a) Le point E étant au niveau de la sortie, donc d'un jet libre, l'application de la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant joignant les points A et E conduit de même à

$$v_E = \sqrt{2gH}.$$

Le débit volumique s'écrit

$$D_v = \pi \frac{d^2}{4} v_E = 1{,}0\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}.$$

3.b) La conservation du débit volumique entre les sections B et E donne $v_C D^2 = v_B D^2 = v_E d^2$, d'où

$$v_C = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH}.$$

La relation de Bernoulli appliqué le long de la ligne de courant joignant les points A et C s'écrit alors

$$\begin{aligned} P_0 + \rho g H &= P(z) + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z \\ &= P(z) + \rho g H \left(\frac{d}{D}\right)^4 + \rho g z \end{aligned}$$

d'où

$$P(z) = P_0 - \rho g z + \rho g H \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

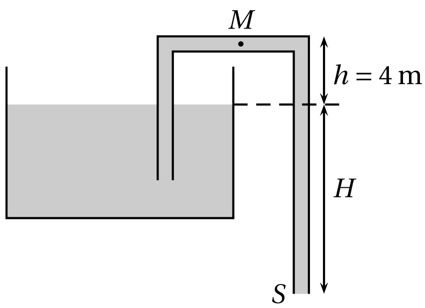
La pression vaut P_{sat} à l'altitude

$$z_{\text{sat}} = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g} + H\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = 160\ \mathrm{m},$$

hauteur inaccessible dans la conduite. L'embout a permis débiter la cavitation en réduisant la vitesse dans la conduite.

8 — Débit d'un siphon

Suite à de violents orages, une fondation étanche de grandes dimensions s'est remplie d'eau (fluide incompressible de masse volumique $\mu = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$). Celle-ci peut être vidée à l'aide d'un siphon constitué d'une conduite de 10 cm de diamètre qui s'élève à 4 m au-dessus de la surface libre du réservoir ouvert à l'atmosphère. On souhaite déterminer la cote H de la sortie du siphon pour obtenir le débit maximal. On négligera les pertes de charge.



On note Oz la verticale ascendante, l'origine étant prise à la surface libre.

1. On écrit la relation de Bernoulli entre un point de la surface libre et un point du jet libre de sortie :

$$\frac{P_0}{\mu} + 0 + 0 = \frac{P_0}{\mu} - gH + \frac{v^2}{2}$$

d'où

$$\boxed{v = \sqrt{2gH}}.$$

2. La vitesse v est constante dans la conduite de section constante (conservation du débit volumique de l'eau incompressible) ; la relation de Bernoulli entre le point M et un point du jet de sortie s'écrit

$$\frac{P(M)}{\mu} + gh + \frac{v^2}{2} = \frac{P_0}{2} - gH + \frac{v^2}{2},$$

d'où

$$\boxed{P(M) = P_0 - \mu g(H + h)}.$$

On doit avoir $P(M) > 0$, d'où

$$\boxed{H < \frac{P_0}{\mu g} - h}.$$

➤ Rigoureusement, on devrait écrire $P(M) > P_{\text{sat}}$, mais $P_{\text{sat}} \ll P_0$ d'où l'approximation effectuée.

3. La vitesse maximale est obtenue pour

$$H_{\max} = \frac{P_0}{\mu g} - h,$$

soit

$$v_{\max} = \sqrt{2\left(\frac{P_0}{\mu} - gh\right)}$$

Le débit maximal correspondant est

$$\boxed{D.\max = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2\left(\frac{P_0}{\mu} - gh\right)}}.$$

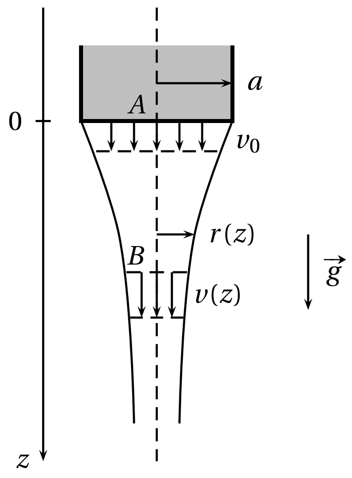
On calcule

$$\boxed{D_{\max} = 8{,}7 \times 10^{-2}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 87\ \mathrm{L \cdot s^{-1}}}.$$

La cote de la sortie du siphon vaut alors

$$\boxed{H_{\max} = 6{,}2\ \mathrm{m}}.$$

9 — Rétrécissement d'un jet liquide



On considère un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible dans le champ de pesanteur : on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et B sur une même ligne de courant.
L'axe Oz étant descendant, il faut écrire

$$\frac{P(A)}{\mu}+\frac{v_0^2}{2}+0=\frac{P(B)}{\mu}+\frac{v^2(z)}{2}-gz.$$

Le jet étant libre, on a $P(A)=P(B)=P_0$, d'où

$$v^2(z)=v_0^2+2gz,$$

soit

$$v(z)=v_0\sqrt{1+\frac{2gz}{v_0^2}}.$$

La conservation du débit volumique entre la sortie et la cote z s'écrit

$$Q=\pi a^2 v_0=\pi r^2(z)v(z).$$

On en déduit

$$\boxed{r(z)=\frac{a}{\left(1+\frac{2gz}{v_0^2}\right)^{1/4}}}.$$

10 — Un problème de robinets

1. Un volume SH de fluide s'écoule pendant une durée T_1 ; le débit volumique correspondant est donc

$$\boxed{D_1=\frac{SH}{T_1}}.$$

2. *Vu en cours.* En appliquant la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant joignant un point de la surface libre et un point à l'orifice de sortie, on obtient la vitesse du fluide à la sortie : $v=\sqrt{2gz}$. Le débit volumique correspondant est donc

$$\boxed{D_2(z)=\sigma\sqrt{2gz}}.$$

3. La vitesse d'un point de la surface libre étant $-\frac{dz}{dt}>0$ lors de la vidange, la conservation du débit volumique s'écrit

$$-S\frac{dz}{dt}=D_2(z)=\sigma\sqrt{2gz}.$$

On a donc

$$-\int_H^0\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g}\int_0^{T_2}dt$$

d'où

$$2\sqrt{H}=\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g}\,T_2.$$

Le temps de vidange vaut donc $T_2=\frac{2S}{\sigma}\sqrt{\frac{H}{2g}}$ soit

$$\boxed{T_2=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}}.$$

4. Pendant une durée dt, si la hauteur de fluide dans la baignoire augmente de dz, cela correspond à un volume $S\,dz$ de fluide supplémentaire dans la baignoire.
Le robinet apporte un volume $D_1\,dt$; il sort un volume $D_2(z)\,dt$ par la bonde. Un bilan conduit à

$$S\,dz=D_1\,dt-D_2(z)\,dt$$

soit

$$S\,dz=\frac{SH}{T1}dt-\sigma\sqrt{2gz}\,dt.$$

La hauteur d'eau vérifie donc l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dz}{dt}+\frac{\sigma}{S}\sqrt{2gz}=\frac{H}{T_1}}.$$

Cette équation est non linéaire.

5. Initialement, $\frac{dz}{dt}(0)=\frac{H}{T_1}>0$: la hauteur d'eau augmente.
Écrivons qu'elle admet une valeur asymptotique t_∞ constante :

$$0+\frac{\sigma}{S}\sqrt{2gz_\infty}=\frac{H}{T_1}$$

d'où

$$z_\infty=\frac{H^2S^2}{2g\sigma^2T_1^2}.$$

On a donc

$$\frac{z_\infty}{H}=\frac{HS^2}{2g\sigma^2T_1^2}=\frac{T_2^2}{4T_1^2}.$$

La hauteur d'eau se stabilise donc dans la baignoire à une hauteur donnée par

$$\boxed{\frac{z_\infty}{H}=\left(\frac{T_2}{2T_1}\right)^2}.$$

Avec les données de l'énoncé, on obtient $\frac{z_\infty}{H}=0{,}56$: la baignoire ne se remplit au maximum qu'à un peu plus de la moitié !

Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique

12 — Perte de charge singulière

1. La pression p_1 s'exerce sur les deux faces en amont : la section S_1 et la partie droite d'aire $S_2 - S_1$ en contact avec la zone morte, soit sur la surface totale $S_1 + (S_2 - S_1) = S_2$. La pression p_2 s'exerce sur la section S_2 en aval. Le bilan total des forces s'exerçant sur le fluide est donc

$$\boxed{\vec{F} = S_2(p_1 - p_2)\,\vec{e}_x}\,.$$

2. Le débit massique, conservé, s'écrit

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2}\,.$$

3. On construit un système fermé :

— à l'instant t, il est constitué du fluide entre les sections S_1 et S_2 du schéma, ainsi que de la masse $\mathrm{d}m = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ de fluide qui franchit la section amont pendant $\mathrm{d}t$, à la vitesse v_1 ;

— à l'instant $t + \mathrm{d}t$, il est constitué du fluide entre les sections S_1 et S_2 du schéma, ainsi que de la masse $\mathrm{d}m = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ qui franchit la section aval pendant $\mathrm{d}t$, à la vitesse v_2.

Écrivons la quantité de mouvement de ce système à l'instant t, soit

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^*(t) + \mathrm{d}m\,v_1\,\vec{e}_x$$

et à l'instant $t + \mathrm{d}t$, soit

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}^*(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}m\,v_2\,\vec{e}_x\,.$$

L'écoulement étant stationnaire, la quantité de mouvement de la partie de fluide comprise entre les sections amont et aval, fixes, vérifie $\vec{P}^*(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}^*(t)$. On a donc

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t) = D_\mathrm{m}(v_2 - v_1)\,\vec{e}_x\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = D_\mathrm{m}(v_2 - v_1)\,\vec{e}_x\,.$$

Le principe de la résultante dynamique s'écrit

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \vec{F}$$

soit en projection selon $\vec{e}_x$:

$$\boxed{D_\mathrm{m}(v_2 - v_1) = S_2(p_1 - p_2)}\,.$$

4. On a donc

$$p_2 = p_1 + \frac{D_\mathrm{m}}{S_2}(v_1 - v_2) = p_1 + \rho v_2(v_1 - v_2)$$

soit

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + v_2(v_1 - v_2)\,.$$

On remarque que

$$v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2 = -2v_2^2 + 2v_1 v_2 = 2v_2(v_1 - v_2)\,,$$

d'où

$$\boxed{\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2}{2}}\,.$$

La relation de Bernoulli conduirait à

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2}\,.$$

Le théorème de Bernoulli est valable pour un écoulement parfait. On peut l'utiliser dans le cas d'un écoulement réel si les effets de la viscosité sont confinés dans une couche limite de faible épaisseur. On observe ici un décollement de la couche limite au niveau du changement de section, entraînant l'apparition d'une zone « morte » où la viscosité ne peut plus être négligée. On ne peut donc utiliser le théorème de Bernoulli.

5. En terme de pression, la relation obtenue s'écrit

$$p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho(v_2 - v_1)^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \Delta p$$

où la perte de charge est donnée par

$$\Delta p = \frac{\rho(v_2 - v_1)^2}{2}\,.$$

Comme $S_1 v_1 = S_2 v_2$, on en déduit $\Delta p = \alpha\frac{\rho v_1^2}{2}$, avec

$$\boxed{\alpha = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2}\,.$$

13 — Homogénéisation d'un écoulement

1. Les forces tangentielles de viscosité homogénéisent l'écoulement, par diffusion de quantité de mouvement.

2. Deux inconnues p_3 et v_3 : il faut faire un bilan de masse et un bilan de quantité de mouvement.
Bilan de masse :

$$m(t) + \delta m_1 + \delta m_2 = m(t+\mathrm{d}t) + \delta m_3$$

avec

$$\delta m_1 = \mu\frac{S}{2}v_0\,ddt\,,$$

$$\delta m_2 = \mu\frac{S}{2}\frac{v_0}{2}\,ddt$$

et

$$\delta m_3 = \mu S v_3\,\mathrm{d}t\,.$$

La conservation de la masse conduit à
$$\mu\frac{S}{2}v_0\,\mathrm{d}t+\mu\frac{S}{2}\frac{v_0}{2}\,\mathrm{d}t=\mu S v_3\,\mathrm{d}t$$
d'où
$$\boxed{v_3=\frac{3v_0}{4}}\,.$$
Bilan de quantité de mouvement :
$$\delta m_1 v_1+\delta m_2 v_2=\delta m_3 v_3$$
d'où
$$\mu\frac{S}{2}v_0^2\,\mathrm{d}t+\mu\frac{S}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2\mathrm{d}t=\mu S v_3^2\,\mathrm{d}t$$
soit
$$\frac{5}{8}\mu S v_0^2=\frac{P}{16}\mu S v_0^2$$
d'où
$$\frac{\mathrm{D}p_x}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{16}\mu S v_0^2\,.$$
Le poids et les forces de pression latérales sont sans effet dans la direction Ox ; il reste les forces de pression en amont et en aval :
$$-\frac{1}{16}\mu S v_0^2=-p_3 S+p_0\frac{S}{2}+p_0\frac{S}{2}$$
d'où
$$\boxed{p_3=p_0+\frac{1}{16}\mu v_0^2}\,.$$
3. On a
$$E_\mathrm{c}(t)=E_\mathrm{c}^0+\frac{1}{2}\delta m_1 v_1^2+\frac{1}{2}\delta m_2 v_2^2$$
soit
$$E_\mathrm{c}(t)=E_\mathrm{c}^0+\frac{9}{32}\mu S v_0^3\,\mathrm{d}t$$
et
$$E_\mathrm{c}(t+\mathrm{d}t)=E_\mathrm{c}^0+\frac{1}{2}\delta m_3 v_3^2=E_\mathrm{c}^0+\frac{27}{128}\mu S v_0^3\,\mathrm{d}t\,.$$
On a donc, avec $v_3=3v_0/4$:
$$\frac{\mathrm{D}E_\mathrm{c}}{\mathrm{D}t}=-\frac{9}{128}\mu S v_0^3\,.$$
Le poids et les forces de pression latérales ont une puissance nulle (forces normales au déplacement) ; la puissance des forces de viscosité sur les parois est nulle car la vitesse du fluide est nulle sur les parois fixes. Il reste la puissance des forces de pression en amont et en aval :
$$\frac{\mathrm{D}E_\mathrm{c}}{\mathrm{D}t}=-\frac{9}{128}\mu S v_0^3=-p_3 S v_3+p_0\frac{S}{2}v_0+p_0\frac{S}{2}\frac{v_0}{2}+\mathcal{P}\mathrm{int}$$
d'où
$$\mathcal{P}\mathrm{int}=-\frac{9}{128}\mu S v_0^3+\frac{3}{4}S v_0(p_3-p_0)=\mu S v_0^3\left(\frac{3}{64}-\frac{9}{128}\right).$$
On a donc
$$\boxed{\mathcal{P}\mathrm{int}=-\frac{3}{128}\mu S v_0^3<0}\,.$$
Les forces intérieures de viscosité sont donc dissipatives.

14 — Tuyère de Laval

1. Le bilan d'énergie s'écrit, entre $x=0$ et x à la cote z constante :
$$D_\mathrm{m}\left[h(x)-h_0+\frac{1}{2}(v^2(x)-v_0^2)\right]=\mathscr{P}_\mathrm{m}+\mathscr{P}_Q\,.$$
La tuyère étant calorifugée, on a $\mathscr{P}_Q=0$. Il n'y a pas de partie mobiles : $\mathscr{P}_\mathrm{m}=0$. On a donc
$$v^2(x)=v_0^2+2[h_0-h(x)]\,.$$
Pour le gaz parfait :
$$h_0-h(x)=c_\mathrm{p}[T_0-T(x)]=\frac{\gamma R}{(\gamma-1)M}[T_0-T(x)]$$
$$=\frac{\gamma R T_0}{(\gamma-1)M}\left[1-\frac{T(x)}{T_0}\right]=\frac{\gamma P_0}{(\gamma-1)\mu_0}\left[1-\frac{T(x)}{T_0}\right].$$
Le gaz parfait subissant une évolution isentropique, la loi de Laplace s'écrit
$$P^{1-\gamma}(x)T^\gamma(x)=P_0^{1-\gamma}T_0^\gamma\,,$$
d'où l'équation de Saint-Venant
$$\boxed{v^2(x)=v_0^2+\frac{2\gamma P_0}{(\gamma-1)\mu_0}\left[1-\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right]}\,.$$
2. La conservation du débit massique s'écrit $D_\mathrm{m}=\mu(x)S(x)v(x)=\text{cte}$. La dérivée logarithmique s'écrit alors
$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0\,.$$
La loi de Laplace $p(x)\mu^{-\gamma}(x)=\text{cte}$ conduit à
$$\frac{1}{p(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\gamma}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\,.$$
L'équation d'Euler en projection selon Ox s'écrit
$$v(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,.$$
On a donc
$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\gamma p(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-v(x)\frac{\mu(x)}{\gamma p(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,,$$
d'où
$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v^2(x)\frac{\mu(x)}{\gamma p(x)}\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
soit
$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\left[\frac{v^2(x)\mu(x)}{\gamma p(x)}-1\right].$$
On a donc
$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\left[M^2(x)-1\right]\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
avec
$$M^2(x)=\frac{v^2(x)\mu(x)}{\gamma p(x)}\,.$$

3. On veut $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} > 0$.

Tant que $v(x) < c(x)$, on a $M^2 - 1 < 0$; il faut donc $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$: la tuyère doit être convergente.

Pour $v(x) > c(x)$, on a $M^2 - 1 > 0$; il faut alors $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} > 0$: la tuyère doit être divergente.

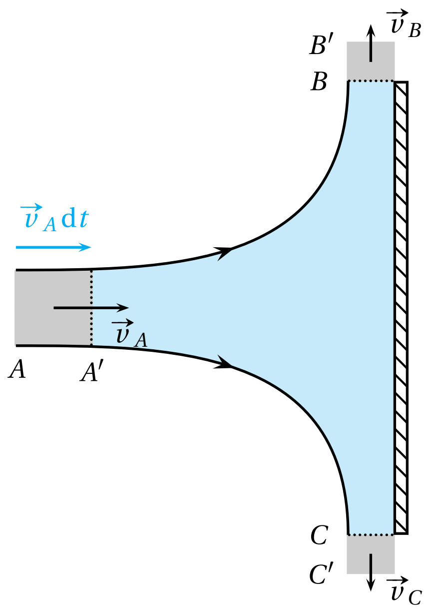
Le profil de la tuyère doit donc être convergent-divergent comme indiqué sur le schéma de l'énoncé.

15 — Action d'un jet sur une plaque

On considère le système fermé, représenté ainsi de profil :

— ABC à l'instant t ;

— $A'B'C'$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$.



À l'instant t, il comporte, outre la partie commune, la masse δm de fluide qui va entrer de t à $t + \mathrm{d}t$, à la vitesse uniforme $\vec{v}_A$.
À l'instant $t + \mathrm{d}t$, il comporte, outre la partie commune, la masse $\mathrm{d}m$ qui sort de t à $t + \mathrm{d}t$ (même masse que précédemment du fait de la stationnarité de l'écoulement) ; cette partie de fluide a la forme d'un anneau, la vitesse étant radiale. Elle admet l'axe de la plaque comme axe de symétrie.
La partie commune entre t et $t + \mathrm{d}t$ est donc $A'BC$, siège d'un écoulement stationnaire. Les grandeurs relatives à cette partie sont donc indépendantes du temps.
La quantité de mouvement à l'instant t est

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{A'BC} + \delta m \vec{v}_A .$$

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, elle vaut

$$\vec{P}(t + \mathrm{d}t) = \vec{P}_{A'BC} + \delta \vec{P}$$

Du fait de la symétrie radiale du fluide sortant de la plaque, la quantité de mouvement $\delta \vec{P}$ du fluide qui sort de la plaque est globalement nulle : on peut regrouper deux à deux des masses élémentaires radialement opposées ; leurs vitesse étant opposées, on a avec la notation de la figure

$$\delta m_B \vec{v}_B + \delta m_C \vec{v}_C = \vec{0} .$$

La variation de la quantité de mouvement vaut donc

$$\vec{P}(t + \mathrm{d}t) - \vec{P}(t) = -\delta \vec{v}_A = -D_{\mathrm{m}} \vec{v}_A \mathrm{d}t = -\rho S v_A \vec{v}_A \mathrm{d}t ,$$

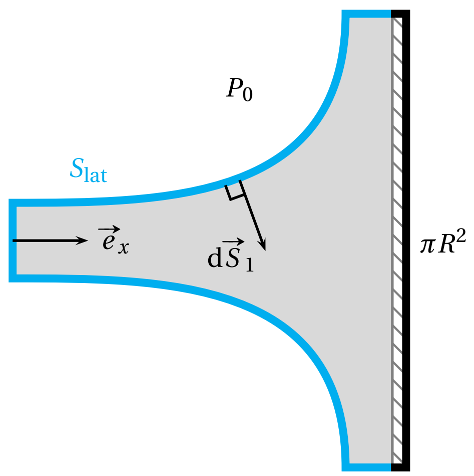
d'où

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = -\rho S v_A \vec{v}_A .$$

Le système est soumis à :

— la force $\vec{F}_{\mathrm{air}}$ de pression de l'air sur la surface latérale S_{lat} ;

— la force $\vec{F}_{\mathrm{plaque/jet}}$ de la part de la plaque.



La pression de l'air P_0 étant uniforme, sa résultante sur une surface fermée est nulle. On complète alors la surface latérale par la surface plane πR^2 (en noir sur la figure), et la résultante des forces de pression sur la surface fermée ainsi construite s'écrit

$$\vec{0} = \vec{F}_{\mathrm{air}} - P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$$

d'où

$$\vec{F}_{\mathrm{air}} = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x ,$$

et le bilan s'écrit

$$-\rho S v_A^2 \vec{e}_x = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x + \vec{F}\mathrm{plaque/jet} .$$

On en déduire la force du jet sur la plaque

$$\boxed{\vec{F}\mathrm{jet/plaque} = \rho S v_A^2 \vec{e}_x + P_0 \pi R^2 \vec{e}_x} .$$

16 — Décollage d'une fusée oral CCP PSI

1. Se reporter au cours. On effectue un bilan de quantité de mouvement sur la fusée :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z - Qu\vec{e}_z.$$

La loi de la dynamique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = -m(t)g\vec{e}_z$$

soit

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = -m(t)g\vec{e}_z + Qu\vec{e}_z.$$

On interprète cette expression en introduisant une « force de poussée » $\vec{\Pi}$ telle que

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = -m(t)g\vec{e}_z + \vec{\Pi}$$

avec $\boxed{\vec{\Pi} = Qu\vec{e}_z}$.

2. Le fusée décolle si à $t = 0$ on a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0$$

soit si

$$-m(0)g + Qu > 0.$$

Avec $m(0) = m_0 + m_c$, on en déduit $Q > Q_{\min}$, avec

$$\boxed{Q_{\min} = (m_0 + m_c)\frac{g}{u}}.$$

3. On a établi

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m(t)g + Qu.$$

Avec $m(t) = m_0 + m_c - Qt$, on en déduit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{Qu}{m_0 + m_c - Qt} \tag{1}$$

d'où en séparant les variables

$$\mathrm{d}v = -g\,\mathrm{d}t + u\frac{Q\,\mathrm{d}t}{m_0 + m_c - Qt}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} v(t) &= -gt + u\int_0^t \frac{Q\,\mathrm{d}t}{m_0 + m_c - Qt} \\ &= -gt - u\int_0^t \frac{\mathrm{d}(m_0 + m_c - Qt)}{m_0 + m_c - Qt} \end{aligned}$$

soit

$$v(t) = -gt - u\ln\left(\frac{m_0 + m_c - Qt}{m_0 + m_c}\right).$$

D'après (1) si $Q > Q_{\min}$, on a $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0$: la vitesse est une fonction croissante du temps. La vitesse maximale est alors atteinte à l'instant t_m où tout la carburant a été brûlé, soit $Qt_m = m_c$. On a alors

$$v_{\max} = -gt_{\max} - u\ln\frac{m_0}{m_0 + m_c}$$

soit

$$\boxed{v_{\max} = -\frac{m_c g}{Q} + u\ln\left(1 + \frac{m_c}{m_0}\right)}.$$

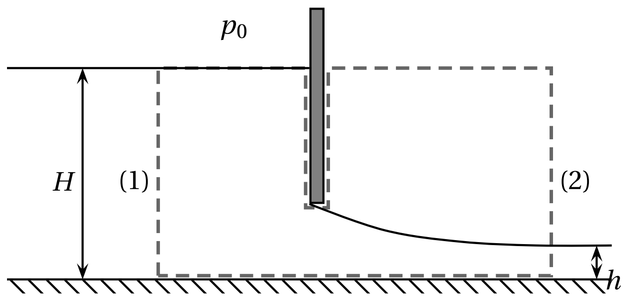
En prenant $Q = Q_{\min} = (m_0 + m_c)\frac{g}{u}$, on calcule

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -\frac{m_c}{m_0 + m_c}u + u\ln\frac{m_0}{m_0 + m_c} \\ &= u\left[\ln\left(1 + \frac{m_c}{m_0}\right) - \frac{m_c}{m_0 + m_c}\right] \end{aligned}$$

soit $v_{\max} = 7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

En prenant $1{,}2Q_{\min}$, on trouve $v_{\max} = 13\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

17 — Effort sur un radier



Le système Σ défini par la surface de contrôle indiquée sur la figure est un système ouvert. On construit le système fermé associé :

- $S(t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section d'entrée pendant $\mathrm{d}t$;
- $S(t + \mathrm{d}t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section de sortie pendant $\mathrm{d}t$.

On a

$$\delta m = \mu LHv_1\,\mathrm{d}t = \mu Lhv_2\,\mathrm{d}t.$$

Calculons les quantités de mouvement

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_1\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{P}(t + \mathrm{d}t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_2\vec{e}_x$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \mu L(hv_2^2 - Hv_1^2)\vec{e}_x.$$

Les actions extérieures sont :

- la force de pression $\vec{F}_{p,1}$ sur la section (1) d'entrée ;
- la force de pression $\vec{F}_{p,2}$ sur la section (2) de sortie ;
- la force $\vec{F}_{r/e}$ exercée par le radier.

Dans la zone (1), le champ des vitesses est uniforme. La répartition de pression est donc hydrostatique

$$p_1(z) = p_0 + \mu g(H - z)\,.$$

De même dans la zone (2)

$$p_2(z) = p_0 + \mu g(h - z)\,.$$

On a donc

$$\vec{F}_{\mathrm{p},1} = \int_0^H p_1(z) L \,\mathrm{d}z\, \vec{e}_x = \left(p_0 H L + \mu g L \frac{H^2}{2}\right) \vec{e}_x\,.$$

De même

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{p},2} &= -p_0 L(H-h)\vec{e}_x - \int_0^h p_2(z) L\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x \\ &= -p_0 L(H-h)\vec{e}_x - p_0 L h\vec{e}_x - \mu g L\frac{h^2}{2}\vec{e}_x \\ &= -p_0 L H\vec{e}_x - \mu g L \frac{h^2}{2}\vec{e}_x\,.\end{aligned}$$

La résultante des forces de pression est donc

$$\vec{F}_\mathrm{p} = \mu g L\left(\frac{H^2-h^2}{2}\right)\vec{e}_x\,.$$

En notant $\vec{F}_{\mathrm{r/e}} = F_{\mathrm{r/e}}\vec{e}_x$, la loi de la dynamique s'écrit, en projection selon Ox

$$\mu L(h v_2^2 - H v_1^2) = \mu g L\left(\frac{H^2-h^2}{2}\right) + F_{\mathrm{r/e}}\,.$$

L'effort exercé sur le radier est $F = -F_{\mathrm{r/e}}$, soit

$$F = \frac{\mu g L}{2}(H^2 - h^2) - \mu L(h v_2^2 - H v_1^2)\,.$$

Avec $H v_1 = h v_2$, on a

$$\boxed{F = \frac{\mu g L}{2}(H^2-h^2) - \mu L H v_1^2\left(\frac{H}{h} - 1\right)}\,.$$

Avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, on calcule $\boxed{F = 2{,}7\times 10^3\ \mathrm{N}}$.

18 — Force sur un tuyau coudé

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t) = D_\mathrm{m}\mathrm{d}t(\vec{v}_C - \vec{v}_B)$$

B d'où

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = D_\mathrm{m}(\vec{v}_C - \vec{v}_B)\,.$$

Les actions extérieures sont

$$\vec{F}_{\mathrm{tuyau}\to BC}\,,$$

$$\vec{F}_{\mathrm{atm}\to\mathcal{S}} = -P_0 S\vec{u} = P_0 S(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$$

et

$$\vec{F}_{\text{eau amont}} = P_1 S\vec{e}_x\,.$$

La vitesse est donnée par

$$v = \frac{D_\mathrm{m}}{\rho S}$$

d'où

$$\vec{v}_B = v\,\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{v}_C = v(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y)\,.$$

On a donc

$$\vec{F}_{\mathrm{eau}\to\mathrm{tuyau}} = P_1 S\vec{e}_x - P_0 S\vec{u} + D.\mathrm{m}v(\vec{e}_x - \vec{u})$$

soit

$$\vec{F}_{\mathrm{eau}\to\mathrm{tuyau}} = \left(\frac{D_\mathrm{m}^2}{\rho S} + P_0 S\right)\left[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y\right] + K D_\mathrm{m} S\vec{e}_x\,.$$

19 — Ressaut hydraulique

1. Le théorème de Bernoulli ne peut pas s'appliquer entre x_1 et x_2 du fait de la zone turbulent située au niveau du ressaut. Il ne permet donc pas de calculer v_2 et h_2.

2. Pour $x \leqslant x_1$, le champ des vitesses est uniforme et parallèle, selon vex. On a donc une répartition hydrostatique de pression, cette dernière vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}z} = \mu g\,.$$

Avec $P_1(h_1) = P_0$, on en déduit sur la face d'entrée

$$\boxed{P_1(z) = P_0 + \mu g(h_1 - z)}\,.$$

Avec $P_2(h_2) = P_0$, la pression sur la face de sortie est donnée par

$$\boxed{P_2(z) = P_0 + \mu g(h_2 - z)}\,.$$

3. Le système Σ compris entre x_1 et x_2 est un système ouvert, en régime stationnaire. On définit le système fermé associé :

— $S(t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section x_1 pendant $\mathrm{d}t$;

— $S(t+\mathrm{d}t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section x_2 pendant $\mathrm{d}t$.

On a

$$\delta m = \mu L h_1 v_1 = \mu L h_2 v_2\,.$$

La quantité de mouvement du système fermée est donnée par

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_1\,\vec{e}_x$$

et

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_2\,\vec{e}_x\,.$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \delta m(v_2 - v_1)\,\vec{e}_x\,.$$

La résultante des forces de pression sur la face d'entrée est

$$\vec{F}_\mathrm{e} = \int_0^{h_1} P_1(z)L\,\mathrm{d}z + P_0L(h_2-h_1)$$
$$= P_0Lh_2+\mu gL\int_0^{h_1}(h_1-z)\,\mathrm{d}z = P_0Lh_2+\mu gL\left(h_1h_1-\frac{h_1^2}{2}\right)$$

soit

$$\vec{F}_\mathrm{e} = P_0Lh_2 + \frac{\mu gLh_1^2}{2}.$$

De même, la résultante des forces de pression sur la face de sortie est

$$\vec{F}_\mathrm{s} = -\int_0^{h_2} P_2(z)L\,\mathrm{d}z = -P_0Lh_2-\mu gL\int_0^{h_2}(h_2-z)\,\mathrm{d}z$$
$$= -P_0Lh_2-\mu gL\left(h_2h_2-\frac{h_2^2}{2}\right)$$

soit

$$\vec{F}_\mathrm{s} = -P_0Lh_2 - \frac{\mu gLh_2^2}{2}.$$

Le loi de la quantité de mouvement s'écrit, en projection selon Ox

$$\delta m(v_2-v_1) = \frac{\mu gL}{2}(h_1^2-h_2^2),$$

soit avec $\delta m = \mu Lh_1v_1$

$$\mu Lh_1v_1 = (v_2-v_1) = \frac{\mu gL}{2}(h_1^2-h_2^2)$$

d'où

$$\boxed{h_1v_1(v_2-v_1) = \frac{g}{2}(h_1^2-h_2^2)}.$$

4. Avec la conservation du débit volumique $h_1v_1 = h_2v_2$ on peut écrire

$$h_1v_1^2\frac{h_1-h_2}{h_2} = \frac{g}{2}(h_1-h_2)(h_1+h_2)$$

d'où

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{gh_2}{2h_1}(h_1+h_2)}}$$

et

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{gh_1}{2h_2}(h_1+h_2)}}.$$

5. On effectue un bilan d'énergie cinétique pour le système fermé S :

$$E_\mathrm{c}(t) = E_{\mathrm{c},\Sigma} + \frac{1}{2}\delta m v_1^2$$

et

$$E_\mathrm{c}(t+\mathrm{d}t) = E_{\mathrm{c},\Sigma} + \frac{1}{2}\delta m v_2^2$$

avec $\delta m = \mu Lh_1v_1\,\mathrm{d}t$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mu Lh_1v_1(v_2^2-v_1^2).$$

La puissance des forces de pression est donnée par

$$\mathcal{P}_\mathrm{press} = \int_0^{h_1} P_1(z)L\,\mathrm{d}z\,v_1 - \int_0^{h_2} P_2(z)L\,\mathrm{d}z\,v_2$$
$$= Lv_1\left(P_0h_1+\mu g\frac{h_1^2}{2}\right) - Lv_2\left(P_0h_2+\mu g\frac{h_2^2}{2}\right)$$
$$= P_0L(h_1v_1-h_2v_2) + \frac{\mu gL}{2}(v_1h_1^2-v_2h_2^2).$$

Comme $h_1v_1 = h_2v_2$, on a

$$\mathcal{P}_\mathrm{press} = \frac{\mu gL}{2}(v_1h_1^2-v_2h_2^2).$$

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_\mathrm{press} + \mathcal{P}_\mathrm{int}$$

soit

$$\frac{1}{2}\mu Lh_1v_1(v_2^2-v_1^2) = \frac{\mu gL}{2}(v_1h_1^2-v_2h_2^2) + \mathcal{P}_\mathrm{int}.$$

On a donc

$$\mathcal{P}_\mathrm{int} = \frac{1}{2}\mu Lh_1v_1(v_2^2-v_1^2) - \frac{\mu gL}{2}(v_1h_1^2-v_2h_2^2)$$
$$= \frac{1}{2}\mu Lh_1v_1(v_2-v_1)(v_2+v_1) - \frac{\mu gL}{2}(v_1h_1^2-v_2h_2^2)$$
$$= \frac{1}{2}\mu L\frac{g}{2}(h_1^2-h_2^2)(v_2+v_1) - \frac{\mu gL}{2}(v_1h_1^2-v_2h_2^2)$$
$$= \frac{\mu gL}{4}\left[(h_1^2-h_2^2)(v_2+v_1) - 2(v_1h_1^2-v_2h_2^2)\right]$$

soit avec $h_1v_1 = h_2v_2$

$$\mathcal{P}_\mathrm{int} = \frac{\mu gL}{4}\left[(h_1^2-h_2^2)(h_1+h_2)\frac{v_1}{h_2} - 2h_1v_1(h_1-h_2)\right]$$
$$= \frac{\mu gL}{4}(h_1-h_2)\left[(h_1+h_2)^2\frac{v_1}{h_2} - 2h_1v_1\right]$$
$$= \frac{\mu gL}{4}(h_1-h_2)\frac{v_1}{h_2}\left[h_1^2+h_2^2+2h_1h_2-2h_1h_2\right]$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{int} = \frac{\mu gL}{2}\frac{h_1^2+h_2^2}{h_2}(h_1-h_2)}.$$

Comme $h_1 < h_2$, on a $\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{int} < 0}$: il s'agit bien d'une puissance dissipée dans la zone turbulente.