DM nº 4 Solution

Physique en géométrie cylindrique : la circulation capillaire

❑ **1 —** Le nombre de Reynolds est défini par

$$\mathcal{R}\mathrm{e} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

où U est la vitesse caractéristique de l'écoulement (vitesse débitante pour un écoulement dans une conduite) et L la longueur caractéristique du problème (diamètre dans le cas de l'écoulement dans une conduite).

Le nombre de Reynolds décrit l'importance relative du transport convectif et du transport diffusif de la quantité de mouvement.

$\mathcal{R}\mathrm{e} \gg 1$ **:** le rôle de la diffusion est faible, l'écoulement est gouverné par l'inertie.

$\mathcal{R}\mathrm{e} \ll 1$ **:** la diffusion domine l'écoulement.

❑ **2 —** L'énoncé donne la longueur totale des capillaires ($L_{\text{tot}} = 100\,000$ km).

La longueur ℓ_0 d'un capillaire est donnée par $L_{\text{tot}} = N\ell_0$, où N est le nombre total de capillaires. On peut déterminer ce nombre à partir de la donnée de la section cumulative $\sigma = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$ des capillaires ; la section d'un capillaire étant πR^2, on a

$$N = \frac{\sigma}{\pi R^2},$$

d'où

$$\ell_0 = \frac{L_0}{N} = \frac{\pi R^2 L_0}{\sigma} = \frac{\pi \times (10\times 10^{-6})^2 \times 10^8}{0{,}5}$$

soit

$$\boxed{\ell_0 = 6{,}3\ \mathrm{cm}}.$$

❑ **3 —** Le rythme cardiaque étant de 60 battements par minutes, une contraction dure $\tau = 1$ s ; pendant cette durée, un volume $V_0 = 0{,}1\ \mathrm{L} = 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$ sort du cœur. Le débit volumique total à travers la section totale des capillaires est donc

$$D_{\text{v,tot}} = \frac{V_0}{\tau}$$

soit un débit massique total

$$D_{\text{m,tot}} = \rho D_{\text{v,tot}} = \frac{\rho V_0}{\tau},$$

à travers les $N = \sigma/(\pi R^2)$ capillaires. Le débit massique moyen dans un capillaire typique est donc

$$D_{\text{m}} = \frac{D_{\text{m,tot}}}{N} = \frac{\rho V_0 \pi R^2}{\sigma\tau} = \frac{1{,}1\times 10^3 \times 10^{-4} \times \pi \times (10\times 10^{-6})^2}{0{,}5\times 1}$$

soit

$$\boxed{D_{\text{m}} = 7\times 10^{-11}\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}}.$$

La vitesse débitant étant donnée par $D_{\text{.v}} = U\pi R^2$, le nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans un capillaire typique est

$$\mathcal{R}\mathrm{e} = \frac{\rho U 2R}{\eta} = \frac{\rho D_{\text{v}} 2R}{\eta\pi R^2} = \frac{2D_{\text{m}}}{\pi\eta R},$$

soit

$$\boxed{\mathcal{R}\mathrm{e} = 3\times 10^{-3}}.$$

L'écoulement dans un capillaire typique est donc **laminaire**.

❑ **4 —** Le champ des vitesses est de la forme

$$\vec{v} = v(r,z)\hat{e}_z.$$

L'écoulement étant incompressible, on a $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, soit

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v(r,z)}{\partial z} = 0.$$

La composante $v(r,z)$ est donc indépendante de z, soit

$$\vec{v} = v(r)\hat{e}_z.$$

L'accélération d'une particule de fluide est donnée par

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v}.$$

L'écoulement étant stationnaire, on a

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}.$$

On forme

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}} = v(r)\cdot\frac{\partial}{\partial z},$$

d'où

$$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v} = v(r)\frac{\partial v(r)}{\partial z} = \vec{0}.$$

On a donc $\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$.

Par extension, un élément de fluide (constitué de particules de fluides) n'est pas accéléré.

❑ **5 —** Considérons la tranche de rayon r, comprise entre z et $z+\mathrm{d}z$.

Elle est soumise à :

— la force de pression en amont $P(z)\pi r^2\hat{e}_z$;

— la force de pression en aval $-P(z+\mathrm{d}z)\pi r^2\hat{e}_z$; la force visqueuse sur sa surface latérale

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{visc}} = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r)2\pi r\,\mathrm{d}z\hat{e}_z\,.$$

L'accélération de ce système étant nulle d'après la question précédente, on a

$$\vec{0} = P(z)\pi r^2\hat{e}_z - P(z+\mathrm{d}z)\pi r^2\hat{e}_z + \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r)2\pi r\,\mathrm{d}z\hat{e}_z\,,$$

soit en projection selon $\hat{e}_z$

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\pi r^2 + \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r)2\pi r\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{2\eta}{r}\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r}}\,.$$

Le premier membre est indépendant de r, tandis que le second est indépendant de z ; ces deux termes sont donc constants.

Le gradient de pression est constant.

❑ **6 —** D'après la question précédente, on a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}r$$

d'où

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}r^2 + A\,.$$

La condition $v(R) = 0$ donne

$$A = -\frac{1}{4\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}R^2\,,$$

d'où

$$\boxed{v(r) = -\frac{1}{4\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(R^2 - r^2)}\,.$$

➤ La pression diminue le long de l'écoulement visqueux : $\dfrac{\partial P}{\partial z} < 0$.

❑ **7 —** Le débit massique est donné par

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{m}} = \rho D_{\mathrm{v}} = \rho\iint_\Sigma v(r)\,\mathrm{d}S = \rho\int_0^R 2\pi r\,v(r)\,\mathrm{d}r \\
= -\frac{2\pi\rho}{4\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\int_0^R (R^2 - r^2)r\,\mathrm{d}r \\
= -\frac{\pi\rho}{2\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
= -\frac{\pi\rho R^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,.
\end{aligned}$$

Le résistance linéique d'écoulement

$$R_{\mathrm{u}} = \frac{1}{D_{\mathrm{m}}}\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right|$$

est donc donnée par

$$\boxed{R_{\mathrm{u}} = \frac{8\eta}{\pi\rho R^4}}\,.$$

❑ **8 —** La pression est nécessaire plus grande en $z = 0$ qu'en $z = \ell$ pour assurer l'écoulement. On a donc

$$P(0) = P(\ell) + \Delta P\,.$$

Le gradient de pression étant constant dans le capillaire, on a

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{P(\ell) - P(0)}{\ell} = -\frac{\Delta P}{\ell}\,.$$

On a donc

$$\Delta P = \left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right|\ell = R_{\mathrm{u}}D_{\mathrm{m}}\ell\,.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\Delta P = \frac{8\eta}{\pi\rho R^4}D_{\mathrm{m}}\ell \\
= \frac{8\times 1{,}6\times 10^{-3}}{\pi\times(1{,}1\times 10^3)\times(10\times 10^{-6})^4}\times 7\times 10^{-11}\times 5\times 10^{-2}
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\Delta P = 1{,}3\times 10^3\ \mathrm{Pa}}\,.$$

D'après la question précédente,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{8\eta D_{\mathrm{m}}}{\pi\rho R^4} < 0\,.$$

La pression est donc la plus élevée **à l'entrée du capillaire**.

❑ **9 —** Le fluide traversant le capillaire est soumis :

— à la forme de pression $\vec{F}_{z=0} = P(0)\pi R^2\hat{e}_z$ en entrée ;

— à la forme de pression $\vec{F}_{z=\ell} = -P(\ell)\pi R^2\hat{e}_z$ en sortie ;

— à la force visqueuse de la part de la paroi du capillaire.

La vitesse du fluide au contact avec la paroi étant nulle, la puissance de la force visqueuse est nulle.
La puissance des forces s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \vec{F}_{z=0} \cdot U\hat{e}_z + \vec{F}_{z=\ell} \cdot U\hat{e}_z \\ &= P(0)\pi R^2 U - P(\ell)\pi R^2 U = \Delta P \pi R^2 U = \Delta P D_\mathrm{v}\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P} = \Delta P \frac{D_\mathrm{m}}{\rho}}.$$

Avec $\Delta P = R_\mathrm{u} D_\mathrm{m} \ell$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{R_\mathrm{u} D_\mathrm{m}^2 \ell}{\rho}}.$$

❑ **10 —** La puissance dissipée dans les $N = \sigma/(\pi R^2)$ capillaire peut être estimée par

$$\mathcal{P}_\mathrm{tot} = N\mathcal{P} = \frac{\sigma}{\pi R^2} \Delta P \frac{D_\mathrm{m}}{\rho}$$

soit

$$\mathcal{P}_\mathrm{tot} = \frac{0{,}5}{\pi \times (10 \times 10^{-6})^2} \times 1{,}3 \times 10^3 \times \frac{7 \times 10^{-11}}{1{,}1 \times 10^3}.$$

On calcule $\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{tot} = 0{,}13\ \mathrm{W}}$.

➤ La puissance totale réelle du cœur humain est de l'ordre du watt. Le modèle ici est insuffisant, en particulier en négligeant l'effet de la pesanteur.

Étude d'un accumulateur Li-ion

Q 1. La réaction

$$\mathrm{LiFePO_4(s)} \longrightarrow 0{,}6\,\mathrm{Li^+} + 0{,}6\,\mathrm{e^-} + \mathrm{Li_{0,4}FePO_4(s)} \quad (1)$$

est une **oxydation** ; elle se déroule donc à la **anode**.
La réaction

$$\mathrm{Li^+} + 6\,\mathrm{C\,(s)} + \mathrm{e^-} \longrightarrow \mathrm{LiC_6(s)} \qquad (2)$$

est une **réduction**; elle se déroule donc à l'**cathode**.
Identifier, en justifiant, la réaction se déroulant à l'anode et celle à la cathode.

Q 2. On élimine les élections par une combinaison linéaire des deux équations précédentes, en multipliant l'équation (2) par 0,6 :

$$\boxed{\mathrm{LiFePO_4} + 3{,}6\,\mathrm{C\,(s)} \longrightarrow \mathrm{Li_{0,4}FePO_4(s)} + 0{,}6\mathrm{LiC_6(s)}}$$

Q 3. La capacité de la pile représente la charge totale débitée pendant son fonctionnement :

$$Q = 2600\ \mathrm{mA \cdot h} = 2{,}6 \times 3600 = 9360\ \mathrm{C}.$$

Le nombre d'électrons échangés vaut alors

$$n_\mathrm{e} = \frac{Q}{\mathcal{F}} = 9{,}70 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol}.$$

D'après la stœchiométrie des réactions électrochimiques, cette quantité d'électrons échangés correspond à

$$n(\mathrm{LiFePOP_4}) = \frac{n_\mathrm{e}}{0{,}6} = 1{,}62 \times 10^{-1}\ \mathrm{mol}$$

de $\mathrm{LiFePO_4}$ consommé et

$$n(\mathrm{C}) = 6n_\mathrm{e} = 5{,}82 \times 10^{-1}\ \mathrm{mol}$$

de C consommé.
Les masses correspondantes sont

$$\begin{aligned}&m(\mathrm{LiFePO_4}) = n(\mathrm{LiFePO_4})M(\mathrm{LiFePO_4}) \\ &= 1{,}62 \times 10^{-1} \times (6{,}9 + 55{,}8 + 31 + 4 \times 16) = 25{,}5\ \mathrm{g}\end{aligned}$$

et

$$m(\mathrm{C}) = n(\mathrm{C})M(\mathrm{C}) = 5{,}82 \times 10^{-1} \times 12 = 6{,}98\ \mathrm{g}.$$

La masse totale est donc $\boxed{m = 32{,}5\ \mathrm{g}}$.

Q 4. La masse de l'accumulateur est supérieure à la masse calculée en ne prenant en compte que les deux réactions de fonctionnement.
On en déduit qu'une partie des réactifs sont consommées par des réactions parasites.