

~~~~~ Équation de d'Alembert ~~~~~

✦ Autour de la corde vibrante

1 — Ondes progressives

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui représentent une onde progressive, et préciser alors la célérité de l'onde.

1. $y(x, t) = A \sin(ax^2 - bt)$.
2. $y(x, t) = A(\alpha x + \beta t)^2$.
3. $y(x, t) = A e^{-\alpha(ax-t)^2}$.
4. $y(x, t) = A e^{-\alpha t} \sin(\alpha x - bt)$.
5. $y(x, t) = A \cos(\omega t + \phi) \sin(kx + \psi)$.

2 — Propagation d'une impulsion

À l'instant $t = 0$, une impulsion est représentée par $y(x, 0) = \frac{2,5}{0,5 + x^2}$.

1. Quelle est l'expression générale de $y(x, t)$ sachant que l'onde se propage dans le sens des x positifs avec une célérité de $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?
2. Dessiner l'impulsion à $t = 0$, $t = 1 \text{ s}$ et $t = 2 \text{ s}$.

3 — Oral Mines

On considère une corde vibrante dont l'extrémité, en $x = L$, est fixée. On impose à l'extrémité située en $x = 0$ le mouvement suivant :

- $0 \leq t \leq \tau$: $y(x = 0, t)$ varie de 0 à a et $\dot{y}(x, t)$ est constante;
- $\tau \leq t \leq 3\tau$: $y(x = 0, t)$ reste constante;
- $3\tau \leq t \leq 5\tau$: $y(x = 0, t)$ varie de a à 0 et $\dot{y}(x, t)$ est constante.

On note c la célérité de l'onde de déformation et on a $\tau = 0,1L/c$.

Représenter l'allure de la corde aux instants 6τ et 13τ .

4 — Résonance sur une corde vibrante

On étudie les petits mouvements dans la direction \vec{e}_z d'une corde métallique de longueur L , fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I = I_0 \cos \omega t$ et plongée dans un champ magnétique

$$\vec{B} = B_0 \sin \frac{\pi x}{L} \vec{e}_y.$$

On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement $z(x, t)$ d'un point de la corde est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{I_0 B_0}{\mu} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \cos \omega t,$$

où c est une constante à exprimer en fonction des données.

2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x, t) = C \sin \frac{\pi x}{L} \cos \omega t$.

Déterminer C pour $\omega \neq \pi c/L$.

Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\pi c/L$?

5 — Corde vibrante

On considère une corde vibrante de masse linéique μ , sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe Ox : à l'ordre d'approximation considéré, le point M qui a pour coordonnées $(x, 0)$ au repos passe au point de coordonnées $(x, y(x, t))$. Le déplacement $y(x, t)$ est un infiniment petit d'ordre un ainsi que l'angle $\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}$ que fait la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox .

1. Établir rapidement l'équation d'onde relative aux mouvements transversaux de faible amplitude.
2. La masse linéique d'une corde de guitare a pour ordre de grandeur le gramme par mètre. Donner un ordre de grandeur réaliste de la tension de cette corde.
3. La corde de longueur L est fixée à ses deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$. Elle n'est soumise à aucune excitation aux dates positives, mais on lui donne une forme $y(x, t = 0) = Y(x)$ à la date $t = 0$ et on l'abandonne sans vitesse initiale, c'est-à-dire que $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$.

On cherche une solution de type mode propre, c'est-à-dire de la forme $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$.

Montrer que $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = A \sin \left(\frac{\omega x}{c} \right)$$

et que les seules pulsations possibles sont de la forme $\omega_n = n\omega_1$, avec n entier.

Exprimer la pulsation ω_1 du mode fondamental en fonction de L et c .

4. On suppose que $y(x, 0) = 4b \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

Déterminer $y(x, t)$.

On donne $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$.

6 — Corde vibrante

On applique une tension T sur une corde de longueur L , de massique linéique μ , fixée à ses extrémités $x = 0$ et $x = L$.

1. Établir l'équation de d'Alembert en précisant les hypothèses effectuées, et exprimer la célérité en fonction des paramètres de la corde.

2. Soit les solutions suivantes de l'équation précédente :

2.a) $y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$;

2.b) $y(x, t) = A \cos(\omega t + kx)$;

2.c) $y(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)(C \cos kx + D \sin kx)$;

2.d) $y(x, t) = A \cos(\omega t + kx) + A \cos(\omega t - kx)$;

2.e) $y(x, t) = A \cos(\omega t + kx) + B \cos(\omega t - kx)$ avec $|A| \neq |B|$.

Interpréter physiquement chaque solution.

3. La corde est fixée à ses deux extrémités. Parmi les solutions proposées précédemment, quelle est celle qui convient? En déduire les pulsations ω possibles.

4. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la corde est plate (pas de perturbation); la solution est d'amplitude Y . Déterminer complètement l'expression de $y(x, t)$.

5. La tension exercée sur la corde est de 10 N. La corde mesure 2,0 mm et, lorsque celle-ci est excitée à une fréquence de 10 Hz, on observe 5 nœuds de déplacement (en dehors des extrémités de la corde). Déterminer la masse linéique de la corde.

On rappelle la formule trigonométrique :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

7 — Corde lestée

On considère une corde de longueur L , fixée à des extrémités. En son milieu, on fixe une masse m_0 sur la corde. On néglige la pesanteur, et la tension de la corde est T_0 au repos. On note c la célérité des ondes transverses.

On note $y_1(x, t)$ l'élongation de la corde pour la portion $0 \leq x < L/2$ et $y_2(x, t)$ son élongation pour $L/2 < x \leq L$.

1. Compte tenu de la condition imposée en $x = 0$, quelle forme proposer pour la solution $y_1(x, t)$? Même question pour $y_2(x, t)$ compte tenu de la condition imposée en $x = L$.

2. Établir deux relations vérifiées par $y_1(x, t)$ et $y_2(x, t)$ ou leurs dérivées en $x = L/2$.

Nous cherchons les modes propres de la corde lestée.

3. Montrer qu'un premier groupe de modes propres est constitué d'un sous-ensemble des modes propres de la corde vibrante non lestée.

4. Montrer qu'un second groupe de modes propres est constitué des solutions de l'équation

$$\cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \alpha \left(\frac{\omega L}{2c}\right),$$

où l'on précisera l'expression de α en fonction de paramètres du problème.

Proposer une résolution graphique.

Étudier les cas limites $m_0 \ll m$ et $m_0 \gg m$, où m est la masse de la corde.

8 — Corde vibrante dont l'extrémité est mobile

L'étude d'une corde vibrante dont les deux extrémités sont fixes ne permet pas de décrire rigoureusement un instrument à corde : la puissance sonore rayonnée par la corde elle-même est trop faible pour être perçue; c'est le couplage de la corde avec la table d'harmonie de l'instrument, au niveau des extrémités de la corde, qui permet de produire une puissance sonore importante. Il faut donc tenir compte du mouvement des extrémités de la corde. Nous adopterons un modèle simplifié en considérant qu'une extrémité de la corde est mobile.

La corde est supposée homogène, de masse linéique μ , soumise à une tension T uniforme.

Extrémité purement élastique

On considère que la corde est fixée en $x = 0$ à un ressort de raideur K , au repos quand l'extrémité de la corde est à l'élongation $y(0, t) = 0$.

On suppose que l'autre extrémité de la corde est immobile : $y(L, t) = 0$.



On rappelle que l'élongation transversale vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

1. On étudie les modes propres de vibration de la corde en cherchant une solution de la forme

$$y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t).$$

Établir l'équation différentielle vérifiée par $Y(x)$. On posera $k = \omega/c$.

- À l'aide de la condition en $x = L$, exprimer $Y(x)$ en fonction de k , L et x .
- À l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ et $y(0, t)$. En déduire une relation entre $Y'(0)$ et $Y(0)$.
- En déduire que k vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète k_n . Établir de même l'équation vérifiée par les pulsations propres ω_n .
- Par une représentation graphique appropriée, comparer ω_n à $n\omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité élastique?

Extrémité purement massique

Une masse M_0 se trouve à l'extrémité $x = 0$ de la corde; elle peut se déplacer librement le long de l'axe Oy . On néglige l'influence de la pesanteur sur la masse M_0 .

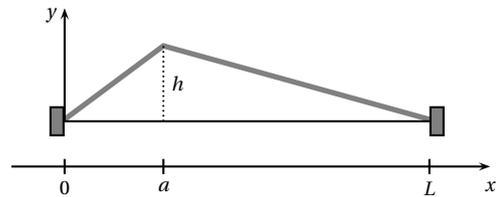


Les solutions de l'équation d'onde sont cherchées de la forme $y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t)$, où $Y(x)$ vérifie l'équation différentielle établie à la question 1.a. La condition en $x = L$, inchangée, conduit à l'expression de $Y(x)$ établie en 1.b.

- À l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0, t)$.
- En déduire que k vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète k_n . Établir de même l'équation vérifiée par les pulsations propres ω_n . On ne cherchera pas à la résoudre.
- Par une représentation graphique appropriée, comparer ω_n à $n\omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité massique?

9 — Étude d'une corde pincée

On considère une corde vibrante de longueur L , de tension T , de masse linéique μ , fixe à ses deux extrémités. Une corde pincée est écartée de sa position d'équilibre par un doigt (ou un plectre); la corde est ensuite lâchée avec une vitesse initiale nulle. Le contact avec le doigt est supposé ponctuel, à l'abscisse a . On adopte une description simplifiée de la forme initiale de la corde par un profil triangulaire.



- Écrire les conditions initiales $y(x, 0) = Y(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$.
- Compte tenu des conditions aux limites $y(0, t) = 0$ et $y(L, t) = 0$, on cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L} + \psi_n\right)$$

où c est la célérité.

Déterminer les constantes ψ_n .

- Considérons la fonction $F(x)$, de période $2L$, impaire, coïncidant avec $y(x, t)$ sur l'intervalle $[0, L]$: $F(x) = y(x, t)$ pour $x \in [0, L]$.

En utilisant l'annexe, rappeler l'expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction impaire, $2L$ -périodique. Montrer que les coefficients du développement s'expriment ici en fonction du profil initial $Y(x)$ de la corde, et les calculer.

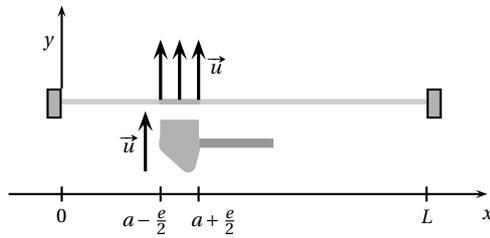
- Discuter de la dépendance des amplitudes des harmoniques avec leur rang n .
- Comment peut-on supprimer l'harmonique de rang n du son émis?
- Simplifier l'expression de $y(x, t)$ quand $a \rightarrow 0$. Que peut-on dire alors du timbre du son émis lorsque le point d'excitation de la corde est proche d'une extrémité?
- La *brillance* d'un son est décrite par le centre de gravité spectral défini par

$$CGS = \frac{\sum_{n=1}^N n b_n}{\sum_{n=1}^N b_n}$$

pour un son constitué de N harmoniques. Un CGS bas correspond à un son mat, tandis qu'un son brillant est caractérisé par un CGS élevé. En considérant les 30 premiers harmoniques, comparer numériquement la brillance du son émis par une corde de guitare pour $a = \frac{L}{4}$ et pour $a = \frac{L}{20}$.

10 — Étude d'une corde frappée

On considère une corde vibrante de longueur L , de tension T , de masse linéique μ , fixe à ses deux extrémités. Initialement, la corde est au repos dans sa situation d'équilibre. À $t = 0$, un marteau de largeur e frappe la corde à l'abscisse a , communiquant aux points de la corde avec lesquels il est en contact au moment du choc une vitesse $u \vec{e}_y$, les autres points de la corde restant au repos.



1. Écrire les conditions initiales $y(x, 0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = V(x)$.

2. Compte tenu des conditions aux limites $y(0, t) = 0$ et $y(L, t) = 0$, on cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{nc\pi t}{L} + \psi_n\right)$$

où c est la célérité.

Déterminer les constantes ψ_n .

3. On suppose que $e \ll L$.

Considérons la fonction $V(x)$, de période $2L$, impaire, coïncidant avec $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$ sur l'intervalle $[0, L]$:

$$F(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \quad \text{pour } x \in [0, L].$$

En utilisant l'annexe, rappeler l'expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction impaire, $2L$ -périodique. Montrer que les coefficients du développement s'expriment ici en fonction du profil initial de vitesse $V(x)$ de la corde, et les calculer.

4. Montrer que l'on peut supprimer des harmoniques en choisissant judicieusement un paramètre. Comment supprimer l'harmonique de rang $n = 7$, dissonnant ?

Annexe : décomposition en série de Fourier

Soit $u(t)$ un signal de période T . On peut écrire $u(t)$ comme la somme d'une série trigonométrique :

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$

où t_0 est quelconque (on prend usuellement $t_0 = 0$ ou $t_0 = -T/2$ si $u(t)$ présente une parité).

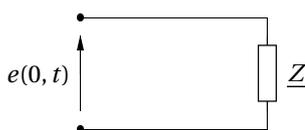
✦ Autour des lignes électriques

11 — Ligne électrique

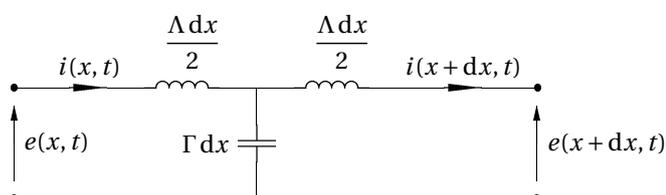
Si le courant qui parcourt un circuit électrique a une fréquence trop élevée, on ne peut plus dire qu'il est égal en tout point. On se propose d'étudier un tel cas.

Soient deux fils conducteurs parallèles de longueur L , la ligne ayant une inductance linéique Λ et une capacité linéique Γ . On relie les deux fils en $x = L$ par un dipôle d'impédance \underline{Z} .

En $x = 0$, on impose une tension $e(0, t) = E_0 \cos(\omega t)$.



On donne le schéma équivalent d'une portion de ligne de longueur dx .



1. Montrer que pour tout x :

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial i}{\partial x} = 0.$$

2. Montrer que

$$\underline{e}(x, t) = \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} + \beta e^{j[\omega(t+x/v)]}$$

est solution. Expliciter v .

Expliquer physiquement ces deux termes.

Exprimer α et β en utilisant les conditions limites :

$$\underline{e}(0, t) = E_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{e}(L, t) = \underline{Z} \underline{i}(L, t).$$

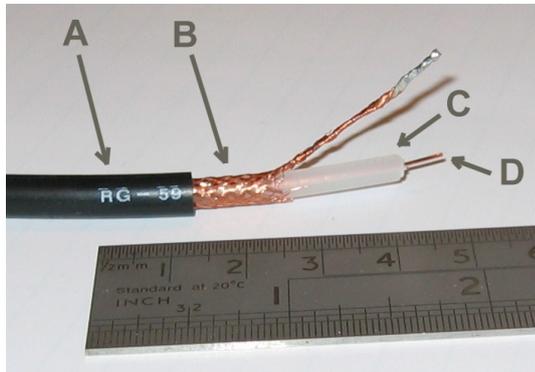
On pourra utiliser le fait que, en tout point du circuit, le courant moyen est nul.

3. Déterminer \underline{Z} tel qu'il n'existe qu'une onde se déplaçant de $x = 0$ à $x = L$.

12 — Câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont utilisés pour transmettre des informations. Ils sont conçus pour transmettre des si-

gnaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour des interconnexions dans les réseaux informatiques; toutefois, la fibre optique est préférée pour des transmissions sur des distances supérieures au kilomètre, son atténuation étant bien inférieure à celle du câble coaxial.



Les câbles coaxiaux sont utilisés pour transmettre des informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour des interconnexions dans les réseaux informatiques; toutefois, la fibre optique est préférée pour des transmissions sur des distances supérieures au kilomètre, son atténuation étant bien inférieure à celle du câble coaxial.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur L , l'un entourant l'autre :

- le conducteur central (D), appelé *âme*, est en général massif (en cuivre) ;
- le conducteur extérieur (B) est un blindage constitué d'une tresse métallique, parfois enroulée sur une feuille d'aluminium.

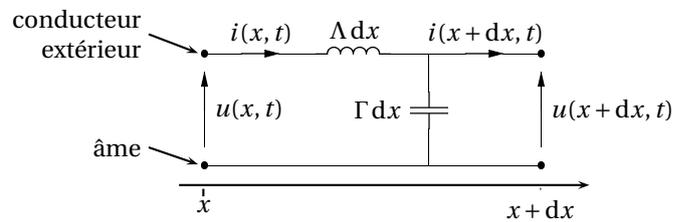
Les deux conducteurs sont séparés par un isolant (C), le plus souvent en téflon ou en polyéthylène. L'ensemble est entouré d'une gaine isolante (A), en PVC, polyéthylène, téflon ou caoutchouc synthétique.

Un tel câble, de par sa constitution, possède une inductance L_c et une capacité C_c .

Pour un câble de longueur $L = 100$ m, on mesure $L_c = 33,4$ μ H et $C_c = 7,46$ nF.

On modélise le câble comme un milieu continu, caractérisé par une inductance linéique Λ (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$) et une capacité linéique Γ (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$) : on parle de modèle à constantes réparties.

Le schéma électrique modélisant une longueur élémentaire dx du câble est :



1. En écrivant la loi des nœuds et la loi des mailles, puis en les linéarisant, établir deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $u(x, t)$ et $i(x, t)$.

2. Montrer que $u(x, t)$ et $i(x, t)$ vérifient la même équation de d'Alembert, faisant intervenir une célérité c que l'on exprimera en fonction des caractéristiques de la ligne. Calculer numériquement c en utilisant les valeurs mesurées de l'inductance et de la capacité du câble.

On considère une onde progressive de tension dans le sens des x croissants : $u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$.

3. Établir l'expression de l'onde de courant $i(x, t)$.

Montrer que l'on peut définir une impédance caractéristique $Z_c = \frac{u(x, t)}{i(x, t)}$ indépendante de la position x et du temps t , dont on donnera l'expression en fonction de Λ et Γ .

Que devient cette impédance dans le cas d'une onde progressive dans le sens des x décroissants ?

4. Déterminer numériquement les valeurs de Λ , Γ et Z_c pour le câble considéré.

On se place dans le cas général où l'onde de tension n'est *a priori* pas progressive; elle s'écrit alors sous la forme

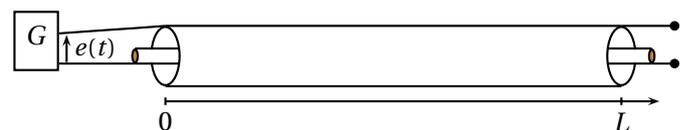
$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

5. Quelle est alors l'expression du courant $i(x, t)$ le long du câble ?

6. A-t-on toujours proportionnalité entre $u(x, t)$ et $i(x, t)$?

La ligne est de longueur $L = 100$ m, et un générateur envoie un signal $e(t)$ en $x = 0$.

L'extrémité de la ligne est en circuit ouvert.



On considère une onde de tension issue de générateur, qualifiée de « incidente », progressive dans le sens des x croissants :

$$u_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

7. Quelle est l'expression de l'onde de courant associée $i_i(x, t)$? On l'exprimera en fonction de $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et de l'impédance caractéristique Z_c de la ligne.

8. Dans le cas où la ligne est en sortie ouverte, traduire cette condition en une relation imposée à une des grandeurs $u(L, t)$ ou $i(L, t)$.

L'onde décrite par $u_i(x, t)$ et $i_i(x, t)$ peut-elle convenir? En déduire qu'il doit exister une onde progressive dans le sens des x décroissants, appelée onde réfléchie, décrite par

$$u_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Quelle est l'expression de l'onde de courant associée $i_r(x, t)$?

9. On définit les coefficients

$$r_I = \frac{i_r(L, t)}{i_i(L, t)} \quad \text{et} \quad r_V = \frac{u_r(L, t)}{u_i(L, t)}.$$

Quelle est leur interprétation physique?

Donner leurs expressions dans le cas où l'extrémité de la ligne est ouverte.

On place un oscilloscope à l'entrée du câble, en $x = 0$. Le générateur envoie une impulsion rectangulaire. On donne le signal visualisé à l'oscilloscope, la base de temps étant de $1 \mu\text{V}/\text{div}$:



10. Interpréter le signal observé. Déterminer la célérité de l'onde dans le câble et comparer avec la valeur déterminée à la question 2.

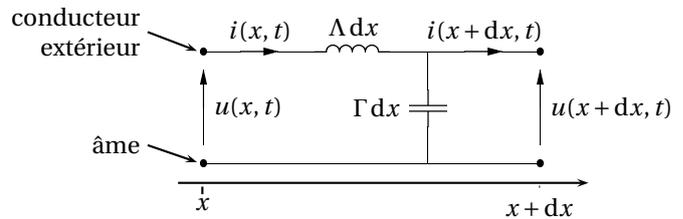
11. Quelle serait l'allure de l'oscillogramme si on change la nature de l'extrémité terminale (ouverte \rightleftharpoons fermée)?

12. Le modèle du câble coaxial proposé ici est-il satisfaisant pour expliquer l'allure de l'oscillogramme?

13 — Câble coaxial et impédance itérative

On considère un câble coaxial modélisé comme un milieu continu, caractérisé par une inductance linéique Λ (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$) et une capacité linéique Γ (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$) : on parle de modèle à constantes réparties.

Le schéma électrique modélisant une longueur élémentaire dx du câble est :

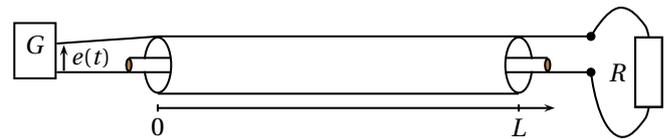


1. En écrivant la loi des nœuds et la loi des mailles, puis en les linéarisant, établir deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $u(x, t)$ et $i(x, t)$.

2. Montrer que $u(x, t)$ et $i(x, t)$ vérifient la même équation de d'Alembert, faisant intervenir une célérité c que l'on exprimera en fonction des caractéristiques de la ligne. Calculer numériquement c en utilisant les valeurs mesurées de l'inductance et de la capacité du câble.

La ligne est de longueur $L = 100 \text{ m}$, et un générateur envoie un signal $e(t)$ en $x = 0$.

On branche une impédance résistive R à l'extrémité $x = L$ de la ligne.



On considère une onde de tension sous la forme

$$u(x, t) = u_i(x, t) + u_r(x, t)$$

avec

$$u_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad u_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

3. Quelle interprétation physique donner aux termes $u_i(x, t)$ et $u_r(x, t)$?

4. En déduire l'expression de l'onde de courant associée, écrite sous la forme

$$i(x, t) = i_i(x, t) + i_r(x, t)$$

en explicitant les expressions de $i_i(x, t)$ et $i_r(x, t)$.

On posera $Z_c = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$.

5. On définit les coefficients

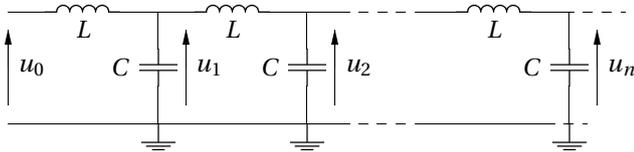
$$r_I = \frac{i_r(L, t)}{i_i(L, t)} \quad \text{et} \quad r_V = \frac{u_r(L, t)}{u_i(L, t)}.$$

À partir de la condition imposée en $x = L$ par la présence de la résistance, déterminer les expressions de r_I et r_V en fonction de R et Z_c .

6. Comment supprimer l'onde réfléchie à l'extrémité d'un câble coaxial?

14 — Ligne LC discrète dans l'approximation continue

On considère une ligne LC supposée de taille infinie dans un premier temps, constituée d'inductances discrètes supposées idéales $L = 10 \text{ mH}$ et de capacités discrètes $C = 4 \text{ nF}$. On applique une tension u_0 à l'entrée de la ligne et on étudie la propagation de l'onde de tension $u_n(t)$ et de courant $i_n(t)$ le long de la ligne.



1. Déterminer l'équation différentielle couplant les tensions $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$. On fera apparaître une pulsation ω_0 que l'on exprimera en fonction de L et C . Calculer la valeur numérique de la fréquence f_0 correspondante.

L'approximation continue consiste à ne considérer que les variations spatiales des tensions u_n ne se font que sur de « grandes distances ». On suppose ainsi que la distance caractéristique sur laquelle varie $u_n(t)$ est très supérieure à la taille a d'une cellule. On peut alors introduire la fonction continue des deux variables continues x et t , définie par $u(x = na, t) = u_n(t)$.

2. Dans le cadre de cette approximation, montrer que la fonction $u(x, t)$ est régie par une équation de d'Alembert. Exprimer la vitesse de propagation v des ondes de tension et de courant en fonction de ω_0 et a .

On applique une tension sinusoïdale $u_0(t) = U \cos(\omega t)$ à l'entrée de la ligne, et on se place en régime sinusoïdal forcé. On considère une solution en onde progressive harmonique de la forme

$$\underline{u}(x, t) = \underline{U} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i}(x, t) = \underline{I} e^{j(\omega t - kx)}$$

pour l'onde de tension et l'onde de courant se propageant le long de la ligne.

3. Montrer que les deux ondes de tension $\underline{u}(x, t)$ et de courant $\underline{i}(x, t)$ sont liées par la relation

$$\frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)} = \underline{Z}$$

où l'on exprimera la grandeur \underline{Z} en fonction de L et C . Quelle est sa dimension? Quelle est sa valeur numérique? Commenter.

Qu'en serait-il si on avait considéré deux ondes de tension et de courant progressives vers les x décroissants?

La ligne est en réalité de taille finie et est constituée de 16 cellules LC. On s'intéresse ici à la propagation d'un train d'impulsions périodiques de tension le long de la ligne.

4. Par analyse dimensionnelle, donner un ordre de grandeur du temps de retard τ provoqué par la traversée d'une cellule LC. Quel ordre de grandeur prévoyez-vous *a priori* pour le temps de propagation du signal entre l'entrée et la sortie de la ligne?

En déduire une fréquence et une largeur convenables pour les impulsions qui ne doivent pas se recouvrir.

5. On applique à l'entrée de la ligne (signal u_0) un train d'impulsions adéquat et d'amplitude suffisante à l'aide de GBF (résistance interne 50Ω). On observe simultanément les signaux u_0 et u_{16} à l'oscilloscope dans les deux cas suivants :

- extrémité en circuit ouvert;
- extrémité en court-circuit.

Représenter l'allure des signaux u_0 et u_{16} .

6. On branche maintenant une résistance variable R à l'extrémité de la ligne, et on en ajuste la valeur pour éliminer le signal réfléchi observé à l'entrée. Quelle est cette valeur? Interpréter.

❖ L'équation de d'Alembert dans d'autres situations

15 — Chaîne d'atomes

On modélise une tige solide par une chaîne infinie d'oscillateurs, selon un axe Ox , constituée de masses m identiques, reliées deux à deux par un ressort de raideur k et de longueur au repos a . Les masses, qui modélisent les atomes d'un cristal, se déplacent sans frottement le long de l'axe Ox . Au repos, elles sont distantes de a .

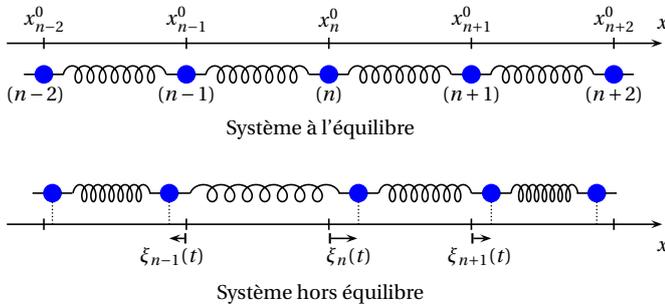
On a donc une description discrète du milieu :

— la masse numéro n a pour abscisse $x_n^0 = na$ quand

elle est au repos;

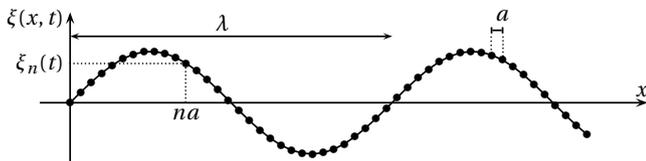
— elle a pour abscisse $x_n(t) = x_n^0 + \xi_n(t) = na + \xi_n(t)$ en présence de l'onde.

La grandeur algébrique $\xi_n(t)$ repère donc l'écart de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre. Sur la figure suivante, on a par exemple $\xi_{n-1}(t) < 0$, $\xi_n(t) > 0$ et $\xi_{n+1}(t) < 0$.



1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse (n) , établir une relation de récurrence reliant $\frac{d^2 \xi_n}{dt^2}$ à $\xi_{n-1}(t)$, $\xi_n(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$.

Nous allons mener l'étude dans le cadre de l'approximation des milieux continus, valable quand la distance entre chaque masse est très petite devant la longueur d'onde de l'onde considérée : $a \ll \lambda$. À l'échelle de la longueur d'onde λ , la chaîne est vue comme un milieu continu, comme le suggère la figure suivante.



Dans le cadre de cette approximation, nous pouvons remplacer la description discrète $\{\xi_n(t)\}_n$ de l'état de la chaîne d'oscillateurs par une fonction continue de l'espace et du temps $\xi(x, t)$, qui interpole la position des masses. Cette fonction $\xi(x, t)$, qui décrit de façon continue l'écart des masses à leur position d'équilibre, doit satisfaire aux propriétés suivantes :

- elle est de classe \mathcal{C}^2 ;
- elle coïncide avec l'écart à l'équilibre de la masse (n) quand $x = na$, soit $\xi(na, t) = \xi_n(t)$.

2. La distance a étant considérée comme un « infinement petit », en effectuant un développement de Taylor¹ à l'ordre 2 de $\xi_{n+1}(t)$ et $\xi_{n-1}(t)$, montrer que la relation de récurrence établie précédemment conduit à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

où la célérité c sera exprimée en fonction de k , a et m .

16 — Onde sur une barre

Une barre de masse volumique ρ , de section S et de module d'Young E est le siège d'une onde de déformation longitudinale entraînant le déplacement de la section située à l'abscisse x d'une longueur $u(x, t)$. La

1. On remarquera que $\xi_{n+1}(t) = \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t)$.

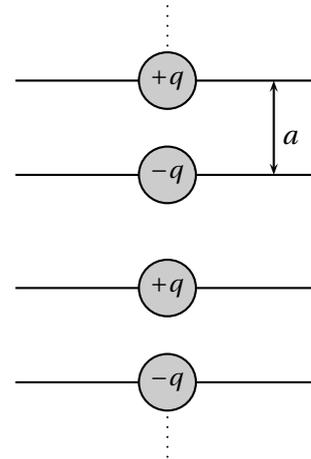
force de traction entraînant un allongement dl de la barre est donnée par

$$dF = ES \frac{dl}{l}.$$

En étudiant la section de barre située entre x et $x + dx$, trouver l'équation différentielle vérifiée par $u(x, t)$ et donner la nature des solutions, ainsi que la vitesse de propagation de l'onde.

17 — Boules chargées —oral ENS...

On considère une chaîne infinie de boules chargées qui ne peuvent se déplacer que sur les fils horizontaux.



Donner l'équation d'onde :

- si chaque boule n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisines ;
- si chaque boule interagit avec toutes les autres (une infinité).

18 — Ondes de gravité en eau peu profonde

On considère un bassin de largeur L selon Oy , de profondeur moyenne H selon Oz et de longueur infinie selon Ox , rempli d'eau. Le bassin est le siège de vagues (ondes de gravité) caractérisées par un champ de vitesse $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$ et un champ de pression $P(x, z, t)$. À l'instant t et à l'abscisse x , la hauteur d'eau est notée

$$h(x, t) = H + \zeta(x, t) \quad \text{où} \quad |\zeta(x, t)| \ll H.$$

1. On admet la relation

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\vec{\text{grad}} P + \mu \vec{g}.$$

Interpréter et commenter cette relation.

2. En déduire les relations (PZ) liant $P(x, z, t)$ et $\zeta(x, t)$, et (PV) liant $P(x, z, t)$ et $v(x, t)$.

3. En déduire l'équation de couplage (1) liant $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

On considère une tranche d'eau située entre les abscisses x et $x + dx$, en régime non permanent.

4. Dessiner la tranche d'eau aux deux instants t et $t + dt$. En effectuant un bilan de masse sur cette tranche en régime non stationnaire, obtenir la relation (2) couplant $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$.

5. En déduire que la surélévation $\zeta(x, t)$ est régie par

une équation de d'Alembert, et préciser l'expression de la vitesse de propagation des vagues.

6. expliquer pourquoi les vagues ralentissent en s'approchant du rivage, et y arrivent en lui étant parallèles.

7. Expliquer pourquoi une grosse vague se propageant dans un bassin de profondeur constante se déforme et déferle.

❖ Ondes sonores dans les fluides

19 — Ordres de grandeur en acoustique

On considère une source sonore émettant une onde plane harmonique d'intensité 60 dB, de fréquence $f = 1$ kHz, dans l'air à la température $T_0 = 20$ °C. Calculer numériquement :

- l'amplitude de la pression acoustique p_m ;
- l'amplitude de la vitesse particulaire v_m ;
- l'amplitude du déplacement particulaire ξ_m ;
- l'écart de température $\Delta T = T_m - T_0$.

20 — Évolution isotherme ou adiabatique?

On considère une onde acoustique se propageant dans un fluide assimilé à un gaz parfait de masse molaire M . L'évolution du fluide est considérée comme isotherme, à la température T_0 .

1. Comment faut-il modifier les équations de l'acoustique linéaire pour prendre en compte l'évolution isotherme du fluide?

2. Établir l'équation d'onde vérifiée par la surpression p_1 , et en déduire l'expression de la célérité c_T des ondes.

3. Calculer c_T dans le cas de l'air, de masse molaire $M = 29$ g·mol⁻¹, à la température $T_0 = 300$ K. On donne $R = 8,314$ JK⁻¹·mol⁻¹.

4. Le coefficient de diffusivité thermique du milieu est D_{th} .

4.a) Quelle est la longueur caractéristique des variations spatiales des champs dues à une onde acoustique de fréquence f ?

4.b) Montrer que la diffusion thermique est négligeable si la fréquence vérifie une condition à expliciter. On donne $c = 340$ m·s⁻¹ et $D_{th} = 2 \times 10^{-5}$ m²·s⁻¹ pour l'air; discuter de l'hypothèse.

21 — Propagation dans un tuyau élastique

On considère un tuyau cylindrique souple, contenant un fluide homogène. Une onde acoustique se propage

dans ce fluide.

On note $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ la masse volumique; $p(x, t) = P_0 + p_1(x, t)$ la pression, $\vec{v}(x, t) = v_1(x, t) \vec{e}_x$ la vitesse des particules de fluide, et $S(x, t) = S_0 + S_1(x, t)$ la section du tuyau.

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

L'élasticité du tuyau est décrite par son coefficient de distensibilité $D = \frac{1}{S} \frac{dS}{dP}$.

On note χ_S le coefficient de compressibilité isentropique du fluide.

1. En effectuant un bilan de masse sur une tranche comprise entre x et $x + dx$, établir la relation

$$\mu_0 \frac{\partial S_1}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 S_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

2. Montrer que la surpression acoustique vérifie l'équation de d'Alembert, et exprimer la célérité c en fonction des données.

3. Calculer la célérité des ondes dans un tuyau métallique ($D_m = 10^{-11}$ Pa⁻¹), puis dans un tuyau élastique ($D_{el} = 4 \times 10^{-5}$ Pa⁻¹). Commenter.

Le fluide est de l'eau, pour lequel $\mu_0 = 1 \times 10^3$ kg·m⁻³ et $\chi_S = 5,1 \times 10^{-10}$ Pa⁻¹.

La section du tuyau est $S_0 = 7,35 \times 10^{-2}$ m².

22 — Puissance sonore du violon

1. On considère un violon avec une corde de longueur ℓ , fixée à ses deux extrémités, selon l'axe des x . Un musicien pince la corde donnant naissance à une onde de célérité c . Donner l'expression de l'élongation $y(x, t)$, ainsi que la relation liant la fréquence et le mode.

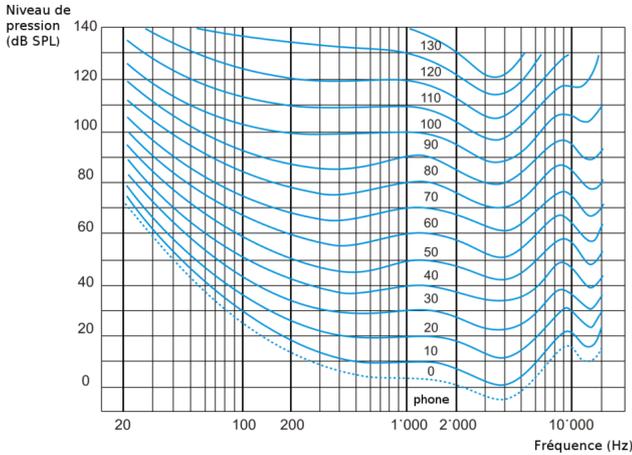
2. On donne $\ell = 33$ cm. Un musicien pince la corde en son centre. Quelle est la fréquence du son émis. Quel est l'utilité d'un archet?

3. le niveau d'intensité sonore est défini par

$$L(\text{dB}) = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

où $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ est le seuil d'audibilité, ou seuil de perception. À $a = 1,0 \text{ m}$ du violon, on mesure $L = 70 \text{ dB}$. Jusqu'à quelle distance d peut-on entendre le violon? Utiliser les approximation qui vous semblent pertinentes.

On donne les courbes d'égale sensation auditive.



23 — Onde sonore dans un gaz

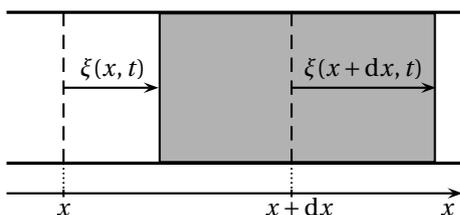
On veut établir l'équation de propagation des ondes sonores dans un tuyau par un raisonnement lagrangien, c'est-à-dire en suivant une particule de fluide, qui est par construction un système fermé, dans son mouvement.

Le tuyau, de section S constante, contient un fluide homogène au repos en l'absence d'onde. La pression du fluide vaut alors P_0 , sa masse volumique μ_0 et sa température T_0 .

Les effets de la pesanteur et les causes d'amortissement ne sont pas pris en compte.

Le système fermé étudié est une tranche de fluide d'épaisseur dx au repos, comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En présence de l'onde acoustique, $\xi(x, t)$, appelé déplacement acoustique, représente le déplacement de la face de la particule de fluide par rapport à son abscisse x lorsque le fluide n'est pas perturbé. Quand le fluide est perturbé par l'onde sonore, la particule de fluide se trouve donc entre les abscisses $x + \xi(x, t)$ et $x + dx + \xi(x + dx, t)$.

On note $p(x, t) = P(x, t) - P_0$ la pression acoustique et $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ la masse volumique.



1. Commenter sans la justifier l'hypothèse $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1$,

dite de l'« approximation acoustique », retenue dans tout ce problème : tout terme d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ sera négligé.

2. En exprimant la conservation de la masse de la tranche de fluide, exprimer $\mu_1(x, t)$ en fonction de μ_0 et $\frac{\partial \xi}{\partial x}$.

3. Traduire, au même ordre, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche de fluide et en déduire la relation liant $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ à $\frac{\partial p}{\partial x}$.

4. Il faut faire une hypothèse supplémentaire sur la nature de la transformation subie par le fluide, que nous supposons être un gaz parfait de masse molaire M , de constante γ , à la température T_0 au repos.

4.a) L'évolution de la tranche de fluide est supposée isotherme.

En déduire une relation entre p et μ_1 .

Montrer alors que ξ vérifie l'équation de d'Alembert, et exprimer la célérité c_T de l'onde sonore en fonction de T_0 et des constantes caractéristiques du gaz.

4.b) L'évolution de la tranche de fluide est supposée adiabatique réversible.

Montrer que ξ vérifie l'équation de d'Alembert, et exprimer la célérité c de l'onde sonore en fonction de T_0 et des constantes caractéristiques du gaz.

4.c) Calculer la célérité des ondes sonores pour l'air de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ avec ces deux modèles. On donne $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $\gamma = 1,4$. On prendra $T_0 = 293 \text{ K}$.

Quelle est l'hypothèse à retenir?

24 — Bruit d'explosion — oral Mines

1. Une explosion retentit et est entendue par un observateur à une distance D à l'horizontale. On considère la température constante égale à T_0 . Calculer la durée τ_h que met l'onde à parcourir cette distance.

2. L'observateur se situe maintenant à la verticale à une même distance D . La température évolue selon la loi $T(z) = T_0 - Bz$. Déterminer la durée correspondante τ_v .

3. À partir de quelle distance D l'écart relatif entre τ_h et τ_v est-il supérieur à 1 %?

Données

L'air est supposé parfait diatomique avec $\gamma = 1,40$, de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

$T_0 = 288 \text{ K}$,
 $B = 5 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$.

25 — Trompette

On considère un instrument de musique de type trompette, modélisé par un tuyau de longueur L et de diamètre d .

1. On donne $p_1(L, t) = 0$. Pourquoi?
2. On donne $p_1(0, t) = p_0 \cos(\omega t)$. Résoudre l'équation de d'Alembert.
3. Le spectre du son est constitué des fréquences 250 Hz, 500 Hz et 1000 Hz. Déterminer la longueur L de l'instrument. Le modèle linéaire est-il cohérent?
4. Le vecteur densité de courant énergétique $\vec{\Pi}$ est-il égal à $p_1(x, t) \vec{v}_1(x, t)$ ou à $P_0 \vec{v}_1(x, t)$, où P_0 est la pression atmosphérique? Calculer $\vec{\Pi}$ en $x = L$. Commenter.

26 — Clarinette

On considère une clarinette comme étant un tube de longueur L et de section S . Son extrémité en $x = 0$ est fermée et on impose une pression P_0 en $x = L$. Au repos, la pression dans le tube est P_0 , la masse volumique μ_0 et on note c la célérité d'une onde sonore dans l'air. Le musicien lance une onde sonore dans le tube en $x = 0$, dont la surpression est

$$p_1(x, t) = p_{10} \cos(\omega t) \cos(kx).$$

1. Justifier la forme de cette onde.
2. Déterminer l'expression de l'onde de vitesse dans le tube.
3. Lister les conditions aux limites.
4. Quels sont les pulsations ω possibles dans ce tube?
5. La pulsation du fondamental pour une flûte est $\frac{c\pi}{L}$. Comparer le hauteur du son d'une flûte et d'une clarinette de même longueur.
6. Déterminer la hauteur du son émis par une clarinette de longueur 65 cm dont tous les trous sont bouchés à l'exception du trou central.
7. Quelle est cette note? Qu'est-ce que le timbre?

27 — Diapason

Un diapason est un instrument en forme de U, qui produit une note dans la hauteur sert de référence, le *la* à 440 Hz. La caisse de résonance du diapason est une boîte en bois parallélépipédique creuse dont l'un des côtés est ouvert. Lorsque le diapason est encastré sur sa caisse, on entend un *la* très pur et puissant.



1. Pourquoi la longueur de la boîte, entre l'extrémité ouverte et l'extrémité fermée, est-elle d'environ 19 cm?
2. Le *la* se fait-il entendre plus ou moins longtemps avec la caisse que sans?
3. Estimer la célérité des ondes dans le diapason.

28 — Fréquences propres d'une sphère rigide

On cherche à étudier les modes propres de vibration à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon R . On écrit la surpression sous la forme

$$p(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} + \frac{B}{r} e^{i(\omega t + kr)}.$$

1. Justifier cette expression et écrire le champ des vitesses.
2. En notant D_v le débit volumique à travers une sphère de rayon r , que peut-on dire de $\lim_{r \rightarrow 0} D_v$? Quelles sont les conditions aux limites? Déterminer l'équation vérifiée par les fréquences propres.
3. Donner une valeur numérique approchée de la plus basse de ces fréquences. Effectuer l'application numérique pour $R = 5,0$ cm.

29 — Sphère pulsante et impédance de rayonnement

Une sphère de centre fixe O dont les rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ varie sinusoidalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique ρ_0 où la célérité des ondes sonores vaut c . Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, on cherche pur les ondes de pression et de vitesse des solutions de la forme $P_1(r, t)$ et $v_1(r, t) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Le laplacien d'un champ scalaire $f(r, t)$ s'écrit

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}.$$

1. Déterminer la forme générale des solutions $P_1(r, t)$ de l'équation de d'Alembert et interpréter.

Dans tout le suite, on ne conserve que la solution $P_1(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$.

Justifier ce choix.

2. Dans toute la suite, on cherche une solution sinusoïdale de la forme

$$P_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \alpha).$$

Que vaut k ?

Déterminer le champ des vitesses correspondant en tout point.

Que devient-il dans la « zone de rayonnement », i.e. pour $r \gg \lambda$?

Quelle est alors localement la structure de l'onde ?

Que vaut le rapport $\frac{P_1(r, t)}{v_1(r, t)}$ dans ce domaine ?

3. Déterminer A et α en fonction des données du problème en examinant le champ des vitesses au voisinage de la sphère (zone de « champ proche »).

4. Calculer la puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace par la sphère.

On modélise l'extrémité ouverte d'un tuyau cylindrique de rayon a_0 (d'une flûte par exemple) par la sphère pulsante précédente, et on cherche à interpréter la condition aux limites usuelle que l'on écrit à la sortie d'un tel tuyau : « nœud de pression, ventre de vitesse ».

5. Exprimer le rapport complexe $\frac{P_1(r, t)}{v_1(r, t)}$ dans le cas de la sphère pulsante à une distance r quelconque, en fonction de ρ_0 , c , ω et r .

6. En déduire que l'« impédance de rayonnement » du tuyau sonore, définie en $r = a_0$, vaut sensiblement

$$\underline{Z}_{\text{ray}} \approx \rho_0 c \left[\left(\frac{\omega a_0}{c} \right)^2 + j \frac{\omega a_0}{c} \right].$$

On justifiera quantitativement l'approximation faite.

7. Interpréter la condition aux limites usuelles que l'on écrit à la sortie d'un tel tuyau : « nœud de pression, ventre de vitesse ».

30 — Accordons-nous

Imaginez vous un concert, salle Pleyel; il fait chaud et au bout d'un moment les instruments sont moins performants.

La température augmente de 5°C , de combien de 1/2 tons est désaccordé le *la* d'un instrument à vent ?

31 — Tuyau d'orgue

On modélise un tuyau d'orgue par un cylindre d'axe \vec{e}_x , de longueur L et de section carrée de côté $D \ll L$ fermé à ses extrémités $x = 0$ et $x = L$.

1. On étudie la propagation d'un son monochromatique dans le tuyau, assimilé au domaine $\{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq D, 0 \leq z \leq D\}$. On cherche une solution de l'équation de d'Alembert de la forme

$$p_1(x, y, z, t) = p_m \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t).$$

Quelle relation doivent vérifier k_x , k_y , k_z , ω et la célérité c du son dans l'air ?

2. Exprimer les composantes du vecteur vitesse \vec{v}_1 associé. Déduire des conditions aux limites les expressions de k_x , k_y et k_z en fonction de D , L et de trois entiers n_1 , n_2 et n_3 .

3. En déduire les expressions des fréquences que peut émettre le tuyau en fonction de L , D , c , n_1 , n_2 et n_3 .

4. Le tuyau est harmonieux s'il n'émet que les multiples de la fréquence fondamentale. Quelle est la fréquence minimale f_m d'un son non harmonieux ? Calculer f_m pour $D = 1 \text{ cm}$ et $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Commenter.

32 — Flûte traversière

Une flûte traversière est modélisée par un tuyau de section S constante et de longueur ℓ ouvert à ses deux extrémités. Lorsque le musicien souffle dans l'embouchure latérale de la flûte, les vibrations produites excitent une onde stationnaire harmonique décrite par la surpression acoustique

$$p(x, t) = P_a \cos(\omega t) \cos(kx + \alpha).$$

1. Quelles sont les conditions aux limites aux deux extrémités ? Pourquoi modéliser l'onde sonore par une onde stationnaire ?

2. Déterminer complètement l'onde de pression ainsi que les fréquences des sons pouvant être joués par cette flûte.

3. La flûte émet un *do* à 264 Hz quand tous ses trous sont bouchés, à une température de 20°C . Quelle est la longueur de la flûte, sachant que seul le fondamental est excité ?

4. Quelle est la fréquence du son émis à une température de 10°C , tous les trous étant bouchés ?

5. Où se trouve le trou qu'on doit déboucher pour jouer un *ré* à 294 Hz, à une température de 20°C ?

6. Déterminer le champ des vitesses dans le tuyau ainsi que le vecteur densité de courant énergétique acoustique moyen.