

## Physique : télémétrie par ultrasons

La télémétrie consiste à mesurer des distances. Le principe des détecteurs ultrasons est de mesurer le temps de propagation entre la capteur et la cible. L'avantage des capteurs ultrasons est de pouvoir fonctionner à grande distance (jusqu'à 10 m), mais surtout d'être capable de détecter tout objet réfléchissant le son indépendamment de la forme et de la couleur.

### 1 Célérité de l'onde ultrasonore

On étudie la propagation d'une onde ultrasonore produite dans l'air.

L'air est assimilé à un gaz parfait, initialement au repos de vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , et qui en l'absence de toute perturbation possède une masse volumique  $\mu_0$ , une pression  $P_0$  et a une température  $T_0$ .

On suppose que la lame de quartz, positionnée à l'abscisse  $x = 0$ , transmet ses vibrations aux couches d'air environnantes et crée ainsi une onde ultrasonore sinusoïdale de fréquence  $f_0$  se propageant suivant  $(O, \vec{e}_x)$  à la célérité  $c$ .

Le passage de l'onde perturbe l'équilibre. En un point  $M$  de l'air d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$ , on note ainsi

- $p(x, t)$  la pression avec  $p(x, t) = P_0 + p_1(x, t)$ ,
- $\mu(x, t)$  la masse volumique avec  $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ ,
- $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$  le champ des vitesses avec  $\vec{v}(x, t) = \vec{v}_0 + v_1(x, t) \vec{e}_x$  où  $v_1(x, t)$  est petit devant  $x$ .

L'écoulement du fluide est considéré comme parfait et on néglige l'action de la pesanteur.

On donne la constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Dans tout la suite on se place dans l'approximation acoustique.** Cela signifie que :

- on considère des ondes de faible amplitude, pour lesquelles la surpression  $p_1$  est très petite par rapport à la pression  $P_0$  de l'air au repos :  $|p_1| \ll P_0$  ;
- on mène les calculs au premier ordre.

1. L'air étant assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M_a$ , à la température  $T_0$  supposée (dans un premier temps) constante, retrouver l'expression de la pression  $p$  de l'air en fonction de  $\mu$ ,  $M_a$ ,  $T_0$  et  $R$ . En déduire que l'approximation acoustique se traduit aussi par la relation  $\mu_1 \ll \mu_0$ .

### Bilan de masse

On considère un volume élémentaire d'air  $d\tau$ , fixe dans le référentiel du laboratoire, contenu dans un cylindre de section  $S$  constante, d'axe  $(O, \vec{e}_x)$  et compris entre les surfaces situées en  $x$  et en  $x + dx$  (voir figure 1). Ce système est ouvert.

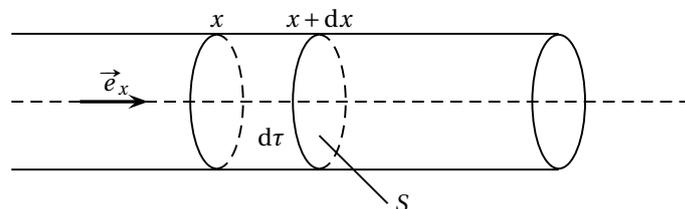


FIGURE 1 – Volume élémentaire d'air

2. Donner l'expression de la masse  $dm(t)$  présente dans le volume  $d\tau$  à l'instant  $t$ . De même pour la masse  $dm(t + dt)$  présente dans le volume  $d\tau$  à l'instant  $t + dt$ .
3. Exprimer la masse  $\delta m_e$  entrant dans  $d\tau$  pendant la durée  $dt$  par la surface située en  $x$ . Même question pour la masse  $\delta m_s$  sortant de  $d\tau$  pendant la durée  $dt$  par la surface située en  $x + dx$ .
4. Montrer que, dans le cas de l'approximation acoustique, la conservation de la masse pour le système étudié se traduit par la relation **(R1)**

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0. \quad (\text{R1})$$

### Équation du mouvement

La loi de la quantité de mouvement, appliquée à la particule de fluide contenue dans le cylindre précédemment défini, conduit à la relation suivante :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p.$$

5. Que devient l'expression précédente, dans le cas unidimensionnel et dans le cadre de l'approximation acoustique? On appelle **(R2)** la relation ainsi obtenue.

### Évolution isentropique

Historiquement, Isaac Newton a supposé que les particules d'air subissent une transformation isotherme lors du passage d'une onde sonore. Cette hypothèse s'est avérée en désaccord avec les valeurs expérimentales de la célérité des ondes sonores. Ce fut Pierre Simon de Laplace qui montra que l'hypothèse d'une transformation isentropique est plus adéquate.

6. On considère que, pour des ondes ultrasonores se propageant dans des fluides, l'hypothèse adiabatique est adéquate. Justifier succinctement et sans calculs la raison de cette hypothèse.

Les particules d'air subissant une transformation isentropique lors du passage de l'onde ultrasonore, on définit alors l'expression du coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S.$$

7. Établir, dans le cas de l'approximation acoustique, la relation liant  $\mu_1$  à  $\mu_0$ ,  $p_1$  et  $\chi_S$ . Cette relation constitue la relation **(R3)**.

### Équation de propagation

8. En utilisant les relations **(R1)**, **(R2)** et **(R3)**, montrer que la surpression  $p_1$  vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

On donnera l'expression de la célérité  $c$  de l'onde ultrasonore en fonction de  $\mu_0$  et  $\chi_S$ .

9. L'air état assimilé à un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant), exprimer  $\chi_S$  en fonction de  $\gamma$  et  $P_0$  et en déduire que l'expression de la célérité est

$$c(T_0) = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}.$$

Dans toute la suite du problème on prendra pour valeur de la célérité des ondes ultrasonores  $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour une température de l'air de  $20^\circ\text{C}$ .

## 2 Réflexion de l'onde ultrasonore

On désire, dans cette partie, vérifier que l'onde ultrasonore est bien réfléchiée par les matériaux usuels rencontrés dans une maison.

Pour cela, on étudie la réflexion et la transmission d'une onde ultrasonore sur une interface plane séparant l'air (milieu 1) d'un milieu solide (milieu 2), les deux milieux étant supposés s'étendre à l'infini.

On considère que l'interface plane est de masse négligeable, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation et au repos dans le référentiel d'étude en l'absence d'onde acoustique.

On place désormais l'origine du repère à l'interface (voir figure 2).

On considère le cas d'ondes planes progressives harmoniques se propageant suivant l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  à la célérité  $c$ .

On adopte la notation complexe pour les **surpressions** instantanées et pour les vitesses instantanées.

De plus, on introduit l'impédance acoustique  $Z_i$  d'un milieu  $i$ , coefficient supposé réel positif.

On a donc pour l'onde incidente :

$$\blacktriangleright \underline{\vec{v}}_i(x, t) = \underline{v}_i(x, t) \vec{e}_x = v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] \vec{e}_x$$

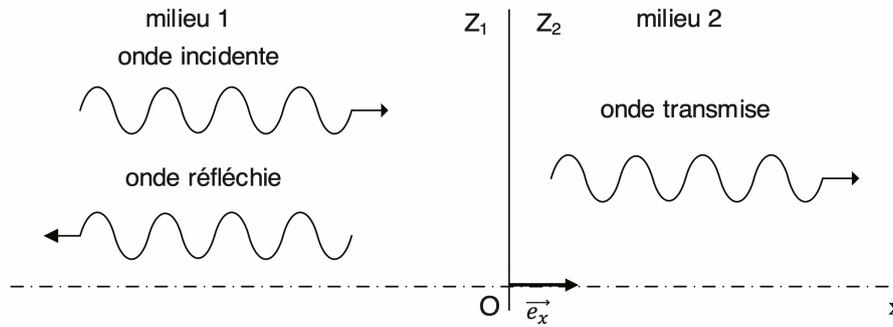


FIGURE 2 – Réflexion et transmission sur une interface plane

$$\blacktriangleright \underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] = Z_1 v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)];$$

pour l'onde réfléchie :

$$\blacktriangleright \underline{v}_r(x, t) = \underline{v}_r(x, t) \vec{e}_x = v_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] \vec{e}_x$$

$$\blacktriangleright \underline{p}_r(x, t) = p_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] = -Z_1 v_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)];$$

et pour l'onde transmise :

$$\blacktriangleright \underline{v}_t(x, t) = \underline{v}_t(x, t) \vec{e}_x = v_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)] \vec{e}_x$$

$$\blacktriangleright \underline{p}_t(x, t) = p_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)] = Z_2 v_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)];$$

où toutes les amplitudes  $v_{i0}$ ,  $v_{r0}$  et  $v_{t0}$  sont des coefficients supposés réels.

10. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la pression et montrer qu'elle conduit à la relation

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}. \quad (1)$$

11. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la vitesse et montrer qu'elle conduit à la relation

$$v_{i0} + v_{r0} = v_{t0}. \quad (2)$$

12. Dédurre des relations (1) et (2) les expressions des coefficients de réflexion  $r = \frac{v_{r0}}{v_{i0}}$  et de transmissions  $t = \frac{v_{t0}}{v_{i0}}$  en amplitude, en fonction de  $Z_1$  et de  $Z_2$ .

On introduit le vecteur de Poynting acoustique réel  $\vec{\Pi}$  associé au vecteur de Poynting acoustique complexe  $\vec{\Pi}$  défini par  $\vec{\Pi} = \underline{p}^* \vec{v}$  où  $\underline{p}^*$  est le nombre complexe conjugué de  $\underline{p}$ . La module de la valeur moyenne temporelle de  $\vec{\Pi}$  est donné par la relation

$$\|\langle \vec{\Pi} \rangle\| = \left\| \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{\Pi}) \right\|$$

où Re est la partie réelle d'un nombre complexe.

Au niveau de l'interface, en  $x = 0$ , on définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance par

$$R = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|}.$$

13. Quelle est la signification physique du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  ? Quelle est son unité usuelle ?

14. Exprimer  $R$  et  $T$  en fonction de  $Z_1$  et de  $Z_2$ .

15. En déduire que  $R + T = 1$ . Que traduit cette relation ?

Le tracé du coefficient de transmission en puissance entre deux milieux en fonction du rapport de leur impédance acoustique donne la courbe de la figure 3.

Le tableau suivant donne les valeurs de l'impédance acoustique de quelques milieux présents dans une maison.

16. En utilisant les figures 3 et 4, et en expliquant votre raisonnement, déterminer le milieu que le robot autonome détectera le moins. Pour ce milieu, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission. L'onde est-elle bien réfléchiée par les matériaux usuels rencontrés dans une maison ?

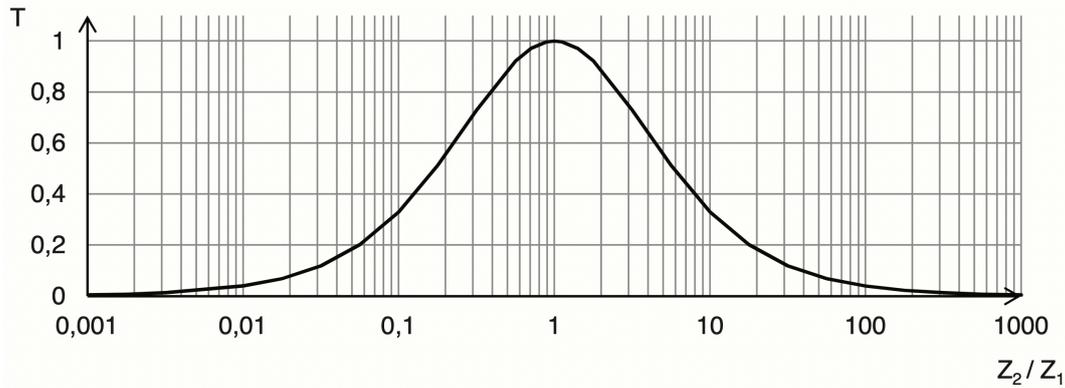


FIGURE 3 – Coefficient de transmission en puissance en fonction du rapport des impédances

Milieu	Impédance acoustique $Z$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ )
air	$4,2 \times 10^2$
béton	$8,8 \times 10^6$
bois dur	$2,8 \times 10^6$
verre	$1,4 \times 10^7$
polystyrène expansé	$6,0 \times 10^3$
milieu biologique	$1,5 \times 10^6$

FIGURE 4 – Impédance acoustique de quelques milieux

### 3 Détection d'un obstacle mobile

#### Effet Doppler

Le robot doit aussi être capable de détecter des obstacles mobiles : enfant ou animal domestique se déplaçant. On étudie donc, dans cette partie, la réflexion d'une onde ultrasonore sur un obstacle (ou paroi) assimilée à une interface plane, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation.

L'obstacle se déplace en direction de l'émetteur à la vitesse constante  $\vec{V} = -V \vec{e}_x$ .

On place l'origine du repère à la position initiale de l'obstacle ; la position de ce dernier est donc  $x_P(t) = -Vt$ .

On admet, dans cette partie, qu'il n'y a pas d'onde transmise.

On néglige l'effet de l'écoulement de l'air engendré par le déplacement de la paroi, c'est-à-dire que l'on considère que les ondes incidente et réfléchie se propagent comme si l'air était au repos.

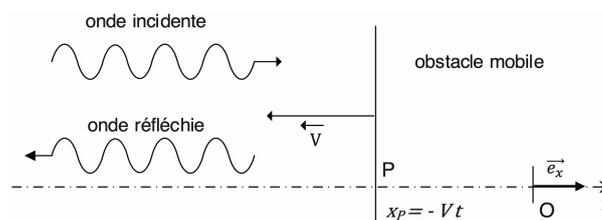


FIGURE 5 – Réflexion sur une interface plane mobile

On considère le cas d'ondes planes progressives harmoniques se propageant suivant l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  à la célérité  $c$ . On adopte la notation complexe pour les **surpressions** instantanées et pour les vitesses instantanées.

On a donc pour l'onde incidente :

$$\blacktriangleright \underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)];$$

$$\blacktriangleright \underline{\vec{v}}_i(x, t) = \underline{v}_i(x, t) \vec{e}_x = v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] \vec{e}_x;$$

pour l'onde réfléchie :

$$\blacktriangleright \underline{p}_r(x, t) = p_{r0} \exp[j(\omega_r t + k_r x)];$$

$$\blacktriangleright \underline{\vec{v}}_r(x, t) = \underline{v}_r(x, t) \vec{e}_x = v_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] \vec{e}_x$$

17. Sachant que les vitesses instantanées incidente  $\vec{v}_i(x, t)$  et réfléchie  $\vec{v}_r(x, t)$  vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension  $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \vec{0}$ , déterminer la relation reliant  $\omega_0$  et  $k_i$  ainsi que celle reliant  $\omega_r$  et  $k_r$ .
18. En considérant qu'au voisinage de l'interface la vitesse de la particule de fluide suivant l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  est nulle dans le référentiel du laboratoire, déterminer la relation entre  $\omega_0$ ,  $\omega_r$ ,  $k_i$ ,  $k_r$  et  $V$ .
19. En déduire que la pulsation  $\omega_r$  de l'onde reçue par le récepteur à ultrasons, après réflexion de l'onde sonore émise à la pulsation  $\omega_0$  sur un obstacle mobile à la vitesse  $V$  est

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}.$$

20. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse  $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  vers ce dernier, justifier la relation  $\omega_r \approx \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right)$ .

Pour la suite du problème, on considère que  $\omega_r = \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right)$ .

### Détection hétérodyne

Pour prendre la décision adéquate — rebrousser immédiatement son chemin ou continuer encore son trajet — le robot doit déterminer la vitesse  $V$  de l'obstacle mobile. Pour cela, on va effectuer une détection hétérodyne, c'est-à-dire qui exploite un décalage de fréquence. Dans un premier temps, on multiplie la tension  $u_0$  à laquelle a été soumise la lame de quartz par la tension  $u_r$  délivrée par le récepteur à ultrasons. Puis on filtre le signal  $u_e$  ainsi obtenu.

Formulaire mathématique :  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$ .

21. Représenter sur un schéma-bloc les opérations effectuées sur les signaux  $u_0(t)$  et  $u_r(t)$  par la détection hétérodyne pour obtenir un signal dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse  $V$  recherchée.

On a  $u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ ,  $u_r(t) = U_r \cos(\omega_r t + \varphi)$  et  $u_e(t) = k \cdot u_0(t) \cdot u_r(t)$ .

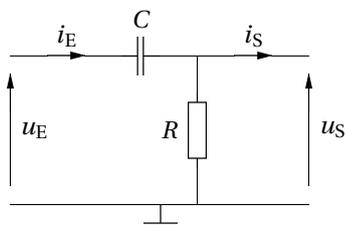
22. Exprimer  $u_e(t)$  comme une somme de composantes harmoniques puis représenter l'allure de son spectre en pulsation.

23. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse  $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , avec  $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $f_0 = 40 \text{ kHz}$ , on désire ne conserver que la composante  $\omega_r - \omega_0$  pour accéder à la valeur de  $V$ .

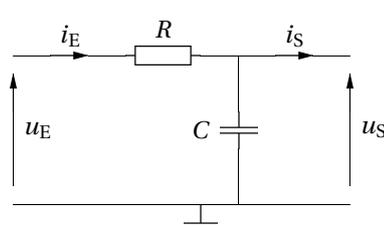
Justifier ce choix.

En déduire la nature du filtre nécessaire. Dans quel domaine de valeurs numériques doit se situer la pulsation de coupure?

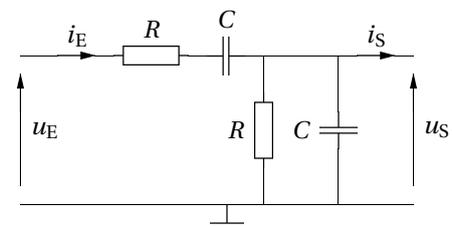
On cherche une réalisation simple de ce filtre. Pour cela, on étudie les trois quadripôles suivants, pour lesquels on considère que l'intensité  $i_s$  du courant de sortie est nulle.



Filtre n° 1



Filtre n° 2



Filtre n° 3

24. Analyser le comportement à basses et hautes fréquences des trois quadripôles. Lequel de ces quadripôles réalise la fonction de filtrage désirée?

25. Déterminer l'expression de la fonction de transfert harmonique du filtre choisi. Exprimer la pulsation de coupure  $\omega_c$  du filtre en fonction de  $R$  et  $C$ .

26. On désire atténuer d'un facteur 100 l'amplitude de la composante haute fréquence du signal  $u_e(t)$ . Déterminer la valeur de la pulsation de coupure  $\omega_c$  du filtre.

Quelle est alors la valeur du facteur d'atténuation de la composante basse fréquence du signal? Commenter

## Chimie : accumulateur cadmium-nickel

### 1 — Généralité

On représente la chaîne électrochimique de façon simplifiée par



L'électrolyte utilisé est une solution concentrée de potasse  $\text{K(OH)}$  de pH très proche de 14.

Les espèces chimiques contenant les éléments Ni et Cd sont à l'état solide.

1. Déterminer les nombres d'oxydation des éléments Ni et Cd dans les 4 espèces considérées :  $\text{Cd(s)}$ ,  $\text{Cd(OH)}_2\text{(s)}$ ,  $\text{Ni(OH)}_2\text{(s)}$  et  $\text{Ni}_2\text{O}_3\text{(s)}$ .

Les domaines d'existence et de prédominance associés au nickel et à l'eau sont représentés sur le diagramme  $E$ -pH de la figure 6.

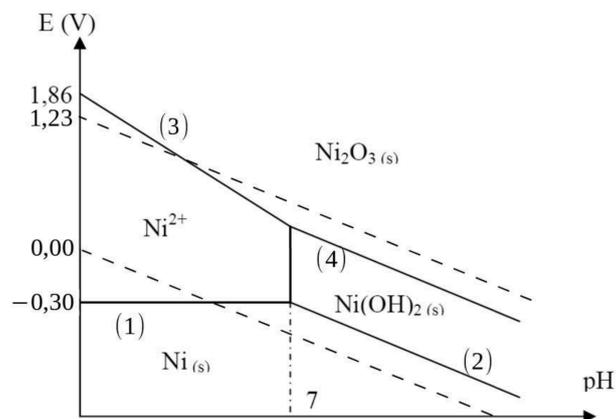


FIGURE 6 – Diagrammes  $E$ -pH du nickel et de l'eau

On donne, pour l'élément Ni, les équations des frontières entre les différents domaines. Les potentiels sont exprimés en volt.

(1):  $E_1 = -0,30$

(2):  $E_2 = 0,12 - 0,06\text{pH}$

(3):  $E_3 = 1,86 - 0,18\text{pH}$

(4):  $E_4 = 1,02 - 0,06\text{pH}$

Les données sont indiquées pour une concentration d'espèces dissoutes  $c_0 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et une température de  $25^\circ\text{C}$ .

2. Tracer sur la copie le diagramme  $E$ -pH du cadmium en prenant en compte les espèces  $\text{Cd}^{2+}$ ,  $\text{Cd(OH)}_2\text{(s)}$  et  $\text{Cd(s)}$ .

L'énoncé comporte en annexe une reproduction agrandie de la figure 6; cette reproduction est un support proposé pour la réflexion. On peut, par exemple, y superposer le diagramme  $E$ -pH du cadmium pour répondre aux questions se basant sur le diagramme complet. Cette figure n'est pas à rendre avec la copie, mais elle peut être schématiquement reproduite si nécessaire.

## 2 — Étude de la décharge

3. Identifier l'anode et la cathode lors de la décharge de l'accumulateur. Écrire la demi-équation électronique observée à chaque électrode en milieu fortement basique. En déduire l'équation de la réaction lorsque l'accumulateur débite.

4. Déterminer les potentiels rédox  $E_+$  et  $E_-$  de chaque pôle, et en déduire  $E_{\text{NiCd}}$ , différence de potentiel prévue par la thermodynamique aux bornes de la pile.

5. Déduire de  $E_{\text{NiCd}}$  la valeur de l'enthalpie libre standard  $\Delta_r G^\circ$  pour la réaction de décharge de l'accumulateur. Calculer à partir des données l'enthalpie standard de réaction  $\Delta_r H^\circ$ . En déduire l'entropie standard de réaction  $\Delta_r S^\circ$ .

On se placera à 25 °C et on considérera que l'enthalpie standard de la réaction et l'entropie standard de réaction sont indépendantes de la température.

6. En déduire la variation de la tension  $E_{\text{NiCd}}$  avec la température.

L'accumulateur Cd-Ni est réputé pour délivrer une tension indépendante de la concentration en potasse K(OH) et pour sa stabilité face aux variations de température ambiante.

7. Les calculs précédents confirment-ils ou non ces propriétés?

## 3 — Étude de la recharge

On souhaite recharger l'accumulateur.

8. Comment brancher un générateur externe pour recharger l'accumulateur? On précisera clairement le signe des bornes du générateur sur la schéma.

9. Écrire l'équation de la réaction réalisée pendant la charge.

10. Quelle est la tension minimale  $U_{\text{min}}$ , prévue par des considérations thermodynamiques, nécessaire pour que le générateur puisse recharger l'accumulateur?

11. Quels phénomènes pourraient causer une augmentation significative de cette valeur? On argumentera de façon rigoureuse.

### Données numériques

#### Potentiels standard redox

élément Ni       $\text{Ni}^{2+}/\text{Ni} : E_a^\circ = -0,24 \text{ V}$        $\text{Ni}_2\text{O}_3/\text{Ni}^{2+} : E_b^\circ = 1,43 \text{ V}$

élément Cd       $\text{Cd}^{2+}/\text{Cd} : E_c^\circ = -0,40 \text{ V}$

couples de l'eau       $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2 : E_d^\circ = 0,00 \text{ V}$        $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O} : E_e^\circ = 1,23 \text{ V}$

constante de Faraday       $F = 96\,480 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$

#### Produits de solubilité

$\text{Ni}(\text{OH})_2(\text{s}) : \text{p}K_{\text{s}1} = 16$

$\text{Cd}(\text{OH})_2(\text{s}) : \text{p}K_{\text{s}2} = 14$

#### Valeurs thermodynamiques

Produit ionique de l'eau à 25 °C :  $\text{p}K_e = 14$ .

Enthalpies standard de formation à 25 °C :

espèce	$\text{H}_2\text{O}(\ell)$	$\text{Cd}(\text{OH})_2(\text{s})$	$\text{Ni}(\text{OH})_2(\text{s})$	$\text{Ni}_2\text{O}_3(\text{s})$
$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol <sup>-1</sup> )	-285,8	-560,7	-529,7	-489,0

## Annexe : diagramme E-pH du nickel et de l'eau

