

Fascicule d'exercices

Physique des ondes - I

Phénomènes de propagation non dispersifs

1 — Ondes progressives

Un onde progressive peut s'écrire comme une fonction de  $x \pm ct$ .

- 1.  $y(x, t) = A \sin(ax^2 - bt)$  n'est pas une onde progressive.
- 2.  $y(x, t) = A(\alpha x + \beta t)^2$  est une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants. On peut l'écrire

$$y(x, t) = A\alpha^2 \left(x + \frac{\beta}{\alpha} t\right)^2.$$

La célérité est  $c = \beta/\alpha$ .

- 3.  $y(x, t) = Ae^{-\alpha(ax-t)^2}$  est une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants. La célérité est  $c = 1/a$ .
- 4.  $y(x, t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\alpha x - bt)$  n'est pas une onde progressive.
- 5.  $y(x, t) = A \cos(\omega t + \phi) \sin(kx + \psi)$  n'est pas une onde progressive, c'est une onde stationnaire.

2 — Propagation d'une impulsion

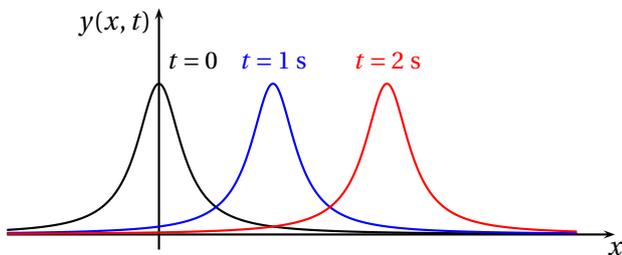
- 1. Une onde progressive dans le sens des  $x$  positifs s'écrit sous la forme

$$y(x, t) = f(x - ct).$$

On a donc avec  $c = 3$  :

$$y(x, t) = \frac{2,5}{0,5 + (x - 3t)^2}.$$

- 2. On représente l'onde à 3 instants différents.



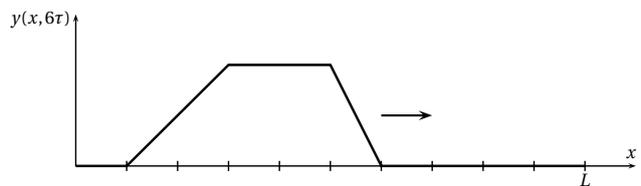
Dessiner l'impulsion à  $t = 0$ ,  $t = 1$  s et  $t = 2$  s.

3 — Oral Mines

On a une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants, à la célérité  $c = \frac{L}{10\tau}$ .

- Sur  $0 \leq t \leq \tau$ , l'élongation croît régulièrement de 0 à  $a$ , pendant que l'onde se propage sur une distance  $\tau c = 0,1L$ .
- Sur  $\tau \leq t \leq 3\tau$ , l'élongation reste constant, égale à  $a$ , pendant que l'onde se propage sur une distance  $2\tau c = 0,2L$ .
- Sur  $3\tau \leq t \leq 5\tau$ , l'élongation décroît régulièrement de  $a$  à 0, pendant que l'onde se propage sur une distance  $2\tau c = 0,2L$ .

À l'instant  $6\tau$ , l'onde s'est propagée sur une distance  $\frac{6L}{10} < L$ ; elle n'a donc pas atteint l'extrémité de la corde. On peut représenter le profil de la corde à cette date :

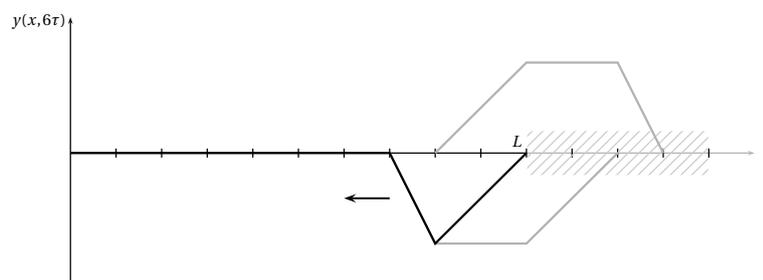


L'onde atteint l'extrémité de la corde au bout d'une durée  $10\tau$ .

L'extrémité de la corde étant fixe, l'onde progressive proposée ne peut pas satisfaire à la condition aux limites  $y(L, t) = 0, \forall t$ . Il y a alors nécessairement une onde réfléchie, l'onde totale sur la corde étant donnée par la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Cette somme devant être toujours nulle en  $x = L$ , on en déduit que la réflexion se fait avec une inversion de signe de l'amplitude. L'onde réfléchie est donc opposé à l'onde incidente, et se propage dans le sens des  $x$  décroissants avec la même célérité.

À l'instant  $13\tau$ , on représente l'onde incidente (son front avant serait à l'abscisse  $13\tau$ ), et l'onde réfléchie qui s'est propagée sur la distance  $\frac{3L}{10}$  (on représente la partie en  $x > L$  pour mieux comprendre, mais elle n'a aucune réalité physique!).

On effectue ensuite la somme algébrique des deux ondes.



## Complément

On peut mettre le problème en équation, ce qui permet de programmer la solution informatiquement.

L'excitation crée une onde incidente progressive dans le sens des  $x$  croissants, de la forme

$$y_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

L'extrémité fixée impose  $y(L, t) = 0, \forall t$ , soit  $f(t - L/c) = 0$  quel que soit  $t$ , ce qui ne peut être vérifié avec une onde incidente seule. Il existe donc nécessairement une onde réfléchie, progressive dans le sens des  $x$  décroissants, de la forme

$$y_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

L'onde totale sur la corde est

$$y(x, t) = y_i(x, t) + y_r(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

et la condition  $y(L, t) = 0$  conduit à

$$y_r(L, t) = -y_i(L, t).$$

La réflexion s'accompagne d'un changement de signe de l'amplitude (le coefficient de réflexion vaut  $-1$ ). On peut préciser les choses en exprimant l'onde réfléchie en fonction de l'onde incidente :

$$\begin{aligned} g\left(t + \frac{x}{c}\right) &= g\left(t + \frac{x-L+L}{c}\right) = g\left(t + \frac{x-L}{c} + \frac{L}{c}\right) \\ &= y_r\left(L, t - \frac{L-x}{c}\right) = -y_i\left(L, t + \frac{x-L}{c}\right) \\ &= -f\left(t - \frac{L-x}{c} - \frac{L}{c}\right) = -f\left(t - \frac{2L-x}{c}\right). \end{aligned}$$

Finalement l'onde sur la corde s'écrit

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{2L-x}{c}\right),$$

avec

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u < 0 \\ \frac{a}{\tau} u & \text{pour } 0 \leq u < \tau \\ a & \text{pour } \tau \leq u < 3\tau \\ -\frac{a}{2\tau} u & \text{pour } 3\tau \leq u < 5\tau \\ 0 & \text{pour } u > 5\tau \end{cases}$$

## 4 — Résonance sur une corde vibrante

1. Un élément de la corde  $d\vec{\ell}$  est soumis, en plus de la tension à chaque extrémité, à la force de Laplace  $d\vec{F}_L$ . Au premier ordre, on a  $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x$ , et

$$d\vec{F}_L = Idx \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_y = I_0 B_0 \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{L} dx \vec{e}_z.$$

Notons  $T$  la tension de la corde.

Le principe de la dynamique appliqué à cet élément de corde de masse  $dm = \mu dx$  s'écrit, en projection sur  $\vec{e}_z$  :

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = I_0 B_0 \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{L} dx + T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{I_0 B_0}{\mu}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos \omega t,$$

avec  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .

2. On remplace  $z(x, t)$  par l'expression proposée dans l'équation différentielle, et on obtient

$$C = \frac{I_0}{B_0} \mu \frac{1}{\frac{c^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2} \quad \text{pour } \omega \neq \frac{\pi c}{L}.$$

Lorsque  $\omega \rightarrow \frac{\pi c}{L}$ , qui est la pulsation du mode fondamental, on a  $C \rightarrow \infty$  : on observe un phénomène de résonance. Dans la pratique, l'amplitude n'est pas infinie!

## 5 — Corde vibrante

1. Notons  $T$  la tension de la corde, considérée comme uniforme (résultat obtenu en projetant le PFD selon  $Ox$ ).

Le principe fondamental de la dynamique pour un élément de corde compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  s'écrit

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t). \quad (1)$$

Projetons (1) selon  $\vec{e}_y$  :

$$\begin{aligned} \mu dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -T \sin \alpha(x, t) + T \sin \alpha(x + dx, t) \\ &\simeq -T \alpha(x, t) + T \alpha(x + dx, t) \end{aligned}$$

Comme  $dl \simeq dx$ , on a

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \quad \text{avec} \quad \alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

On en déduit

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

avec

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

L'équation (2) est appelée **équation de d'Alembert**.

2. Soit  $L$  la longueur de la corde d'une guitare. Le mode fondamental est tel que

$$\Lambda = 2L = \frac{c}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

La tension vaut donc  $T = 4L^2 f^2 \mu$ .

On donne  $\mu \approx 1 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ .

La longueur a pour ordre de grandeur  $L \approx 1 \text{ m}$ ; la fréquence a pour ordre de grandeur  $f \approx 10^2 \text{ Hz}$ . On en déduit  $T \approx 4 \times 1 \times 100^2 \times 10^{-3} = 400 \text{ N}$ .

En ordre de grandeur  $T \approx 10^2 \text{ N}$ .

3. Écrivons que  $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$  est solution de (2) :

$$c^2 f''(x) + \omega^2 f(x) = 0,$$

soit

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right).$$

La condition  $y(0, t) = 0, \forall t$  s'écrit  $f(0) = 0 = B$ . Finalement :

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right).$$

La condition  $y(L, t) = 0, \forall t$  s'écrit

$$A \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0.$$

Comme  $A \neq 0$ , on a  $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$ , d'où  $\frac{\omega L}{c} = n\pi$ .

Les seules pulsations possibles sont de la forme

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{c\pi}{L}.$$

4. La condition initiale se linéarise en

$$y(x, 0) = 3b \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - b \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right). \quad (3)$$

La solution générale du mouvement est une superposition des modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right),$$

la condition initiale s'écrivant alors

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En identifiant avec(3), on en déduit que seuls les harmoniques  $n = 1$  et  $n = 3$  sont présents :

$$A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) = 3b \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - b \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

valable  $\forall x$ , d'où  $A_1 = 3b$  et  $A_3 = -b$ . On en déduit

$$y(x, t) = 3b \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{c\pi t}{L}\right) - b \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{3c\pi t}{L}\right).$$

► Cette onde n'est ni stationnaire, ni progressive.

## 6 — Corde vibrante

1. Question de cours : établir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

2. Toutes les solutions sont harmoniques.

Dans l'ordre :

- (1) onde progressive dans le sens  $x$  croissants;
- (2) onde progressive dans le sens  $x$  décroissants;
- (3) onde stationnaire;
- (4) et (5) superposition de deux ondes progressives de sens opposés.

On remarquera que le 4<sup>e</sup> cas est en fait une onde stationnaire :

$$y_4(x, t) = A[\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx)] = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

Le cas (5) n'est ni une onde progressive, ni une onde stationnaire.

3. Les conditions aux limites sont

$$y(0, t) = y(L, t) = 0; \quad \forall t.$$

Elles ne peuvent être vérifiées que par une onde stationnaire (présence de deux nœuds de vibration); seules les solutions  $y_3$  et  $y_4$  peuvent donc *a priori* convenir.

Si on considère la solution  $y_4(x, t)$ , la condition en  $x = 0$  s'écrit  $2A \cos(\omega t) = 0, \forall t$ , d'où  $A = 0$  et  $y_4(x, t) = 0$ . Cette solution ne peut convenir.

La solution  $y_3(x, t)$  donne d'une part :

$$y_3(0, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] C = 0$$

d'où  $C = 0$ . D'autre part :

$$y_3(L, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] D \sin(kL) = 0.$$

On a donc soit  $D = 0$ , ce qui entraîne  $y_3(x, t) = 0$  qui est exclus, soit  $\sin(kL) = 0$ . On a donc  $kL = n\pi$ , avec  $n \in \mathbf{N}$ .

De la relation de dispersion  $\omega = kc$  avec  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ; on déduit :

$$\omega_n = n \frac{c\pi}{L}, \quad \text{avec } n \in \mathbf{N}.$$

4. D'après la question précédente,

$$y_3(x, t) = D[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \sin(kx).$$

La condition initiale s'écrit :

$$y_3(x, 0) = 0 = AD \sin(kx), \quad \forall x.$$

On a donc soit  $D = 0$ , soit  $A = 0$ .

Le premier cas est exclu car on aurait  $y_3(x, t) = 0$ .

On a donc  $A = 0$ , ce qui donne

$$y_3(x, t) = DB \sin(\omega t) \sin(kx).$$

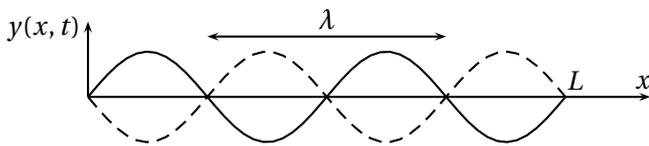
L'amplitude de la solution étant  $Y = DB$ , la solution de l'équation différentielle est donc

$$y_3(x, t) = Y \sin(\omega t) \sin(kx),$$

avec

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = n \frac{c\pi}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

5. L'observation de 5 nœuds de déplacement correspond à 4 fuseaux.



La longueur d'un fuseau étant  $\lambda/2$ , on a donc  $L = 2\lambda$ . Comme  $\lambda = \frac{c}{f}$ , où  $f$  est la fréquence, on en déduit, compte tenu de l'expression de la célérité  $c$  :

$$L = \frac{2}{f} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

d'où :

$$\mu = \frac{4T}{L^2 f^2} = \frac{4 \times 10}{2^2 \times 10^2} = 0,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

La corde a pour masse linéique  $\mu = 100 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## 7 — Corde lestée

1. On impose un nœud de vibration en  $x = 0$ ; on cherche donc une solution en onde stationnaire, telle que la partie spatiale soit nulle pour  $x = 0$ . On écrit donc

$$y_1(x, t) = Y_1 \sin(kx) \cos(\omega t + \psi_1).$$

On impose de même un nœud de vibration en  $x = L$ ; on cherche donc une solution en onde stationnaire, telle que la partie spatiale soit nulle pour  $x = L$ . On écrit donc

$$y_2(x, t) = Y_2 \sin[k(L-x)] \cos(\omega t + \psi_2).$$

2. On écrit d'une part la continuité de la corde en son milieu, soit

$$y_1\left(\frac{L}{2}, t\right) = y_2\left(\frac{L}{2}, t\right). \quad (4)$$

On écrit le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse  $m_0$ , en projection selon  $Oy$  :

$$m_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(L/2, t) = T_{2y} + T_{1y}$$

où la projection selon  $Oy$  de la force de tension exercée par la partie droite de la corde est

$$T_{2y} = T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2, t)$$

et celle exercée par la partie gauche

$$T_{1y} = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2, t).$$

On a donc

$$m_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(L/2, t) = T_0 \left[ \frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2, t) - \frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2, t) \right]. \quad (5)$$

3. Avec les expressions de  $y_1(x, t)$  et  $y_2(x, t)$  établies à la question 1, la relation (4) s'écrit

$$Y_1 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \cos(\omega t + \psi_1) = Y_2 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \cos(\omega t + \psi_2) \quad \forall t.$$

Cette relation peut être vérifiée si

$$\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$$

c'est-à-dire si  $\frac{kL}{2} = n\pi$ .

Les modes propres  $k_n = n \frac{2\pi}{L}$  conviennent.

Les modes propres de la corde non lestée sont  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ . Le sous-ensemble qui convient ici est constitué des **modes propres pairs de la corde non lestée**.

➤ Ces modes propres présentent un nœud de vibration au milieu, là où est présente la masse  $m_0$ . Cette masse restant immobile pour ces modes, elle ne perturbe pas le mouvement de la corde, et ces modes continuent de pouvoir être observés.

4. Si  $\sin(kL/2) \neq 0$ , la relation de continuité s'écrit

$$Y_1 \cos(\omega t + \psi_1) = Y_2 \cos(\omega t + \psi_2) \quad \forall t.$$

On a donc  $\psi_1 = \psi_2$  et  $Y_1 = Y_2$ . Notons  $\psi_0$  le déphasage commune et  $Y_0$  l'amplitude commune. On a donc

$$y_1(x, t) = Y_0 \sin(kx) \cos(\omega t + \psi_0)$$

et

$$y_2(x, t) = Y_0 \sin[k(L-x)] \cos(\omega t + \psi_0).$$

On a donc

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2) = k Y_0 \cos(kL/2) \cos(\omega t + \psi_0)$$

et

$$\frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2) = -k Y_0 \cos(kL/2) \cos(\omega t + \psi_0).$$

La relation (5) s'écrit, après simplification par  $\cos(\omega t + \psi_0)$  car la relation doit être vérifiée pour tout  $t$

$$-\omega^2 m_0 Y_0 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = -2k Y_0 T_0 \cos\left(\frac{kL}{2}\right),$$

soit

$$\omega^2 m_0 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 2k T_0 \cos\left(\frac{kL}{2}\right).$$

On en déduit avec  $c^2 = \frac{T_0}{\mu}$  et  $\omega = kc$

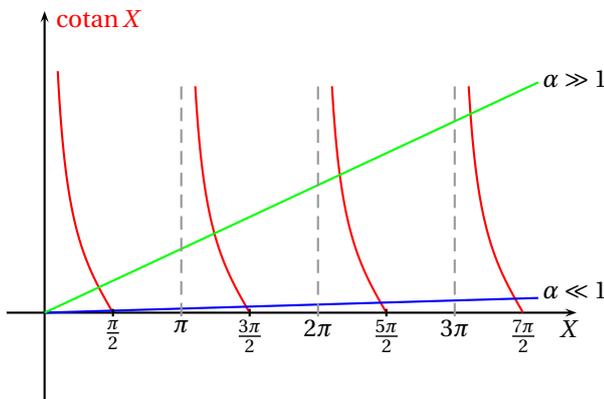
$$\begin{aligned} \cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) &= \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} = \frac{m_0 \omega^2}{2k T_0} = \frac{m_0 \omega c}{2T_0} = \frac{m_0 \omega c}{2\mu c^2} \\ &= \frac{m_0}{\mu L} \left(\frac{\omega L}{2c}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \alpha \left(\frac{\omega L}{2c}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{m_0}{\mu L}.$$

On remarque que  $\alpha = \frac{m_0}{m}$ , où  $m = \mu L$  est la masse de la corde.

En posant  $X = \frac{\omega L}{2c}$ , on se ramène à la résolution de  $\cotan X = \alpha X$ . Nous pouvons faire une résolution graphique, en cherchant les intersections des graphes de  $f(X) = \cotan X$  et  $g(x) = \alpha X$ .



On peut distinguer deux cas limites.

Pour  $\alpha \ll 1$ , soit  $m_0 \ll m$ , on obtient les solutions

$$X_n \approx \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \omega_n \approx (2n+1) \frac{c\pi}{L}.$$

On retrouve les modes impairs de la corde vibrante non lestée (la masse du lest est négligeable). Ces modes viennent en compléments des modes pairs  $\omega_n = 2n \frac{c\pi}{L}$  trouvés précédemment.

Pour  $\alpha \gg 1$ , soit  $m_0 \gg m$ , on obtient les solutions

$$X_n \approx n\pi \quad \text{soit} \quad \omega_n \approx 2n \frac{c\pi}{L}.$$

On retrouve les modes pairs de la corde vibrantes, déjà déterminés précédemment : si la masse du lest est très élevée, il impose un nœud de vibration du fait de inertie (la corde ne peut le mettre en mouvement).

## 8 — Corde vibrante dont l'extrémité est mobile

### Extrémité purement élastique

1. L'élongation vérifie l'équation de d'Alembert  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ , avec  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .

Avec  $y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t)$ , cette équation s'écrit  $-\omega^2 Y(x) \cos(\omega t) - c^2 Y''(x) \cos(\omega t) = 0$ , soit

$$Y''(x) + k^2 Y(x) = 0$$

où l'on a posé  $k = \omega/c$ .

2. La condition à la limite étant  $y(L) = 0$ , nous écrivons la solution générale de l'équation précédente sous la forme d'un sinus (un sinus étant nul quand son argument est nul, la prise en compte de la condition sera plus simple) :

$$Y(x) = A \sin(kx + \varphi).$$

La condition  $Y(L) = 0$  s'écrit alors  $Y(L) = A \sin(kL + \varphi) = 0$ ; on peut choisir  $\varphi = -kL$ , d'où

$$Y(x) = A \sin[k(x - L)].$$

3. La composante verticale de la tension de la corde à l'extrémité  $x = 0$  est donnée par

$$T_y(0, t) = T \sin \alpha(0, t) \approx T \alpha(0, t) = T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

Elle est d'autre part égale à la tension du ressort dont l'élongation est  $y(0, t)$ , d'où la relation

$$T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = K y(0, t).$$

On en déduit  $T Y'(0) \cos(\omega t) = K Y(0) \cos(\omega t)$ , d'où

$$T Y'(0) = K Y(0).$$

4. La condition précédente s'écrit

$$T k A \cos(kl) = -K A \sin(kL).$$

L'ensemble de ses solutions forme un ensemble discret. Cette équation peut s'écrire

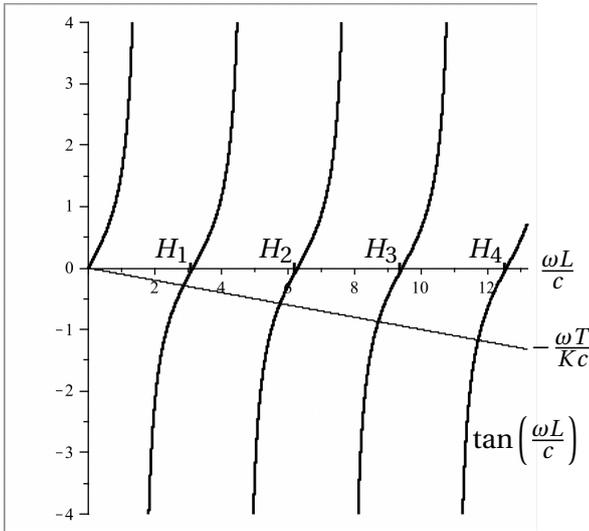
$$\tan(k_n L) = -\frac{k_n T}{K}.$$

Avec  $\omega_n = k_n c$ , on a de même

$$\tan\left(\frac{\omega_n L}{c}\right) = -\frac{\omega_n T}{K c}.$$

5. On représente sur le même graphe

$$f(\omega) = \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \text{et} \quad g(\omega) = -\frac{\omega T}{Kc} :$$



Les fréquences propres sont données par l'intersection des deux courbes. Les points correspondant aux harmoniques, de pulsations  $n\omega_1$  dans le cas de l'extrémité rigide, sont notés  $H_n$ . On voit sur le graphe que  $\omega_n < n\omega_1$  : l'effet d'une extrémité élastique est d'abaisser les fréquences propres.

**Extrémité purement massique**

6. La composante verticale de la tension de la corde en  $x = 0$  a été établie précédemment :  $T_y(0, t) \approx T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'extrémité de la corde de masse  $M_0$  s'écrit, en projection selon  $\vec{e}_y$

$$M_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0, t) = T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} .$$

7. Avec  $y(x, t) = A \sin[k(x - L)] \cos(\omega t)$ , on en déduit  $-\omega^2 M_0 \sin(-kL) = Tk \cos(kL)$ , d'où  $\tan(kL) = \frac{Tk}{M_0 \omega^2}$ .

Comme  $\omega = kc$ , on en déduit

$$\tan(k_n L) = \frac{T}{M_0 c^2 k_n} ,$$

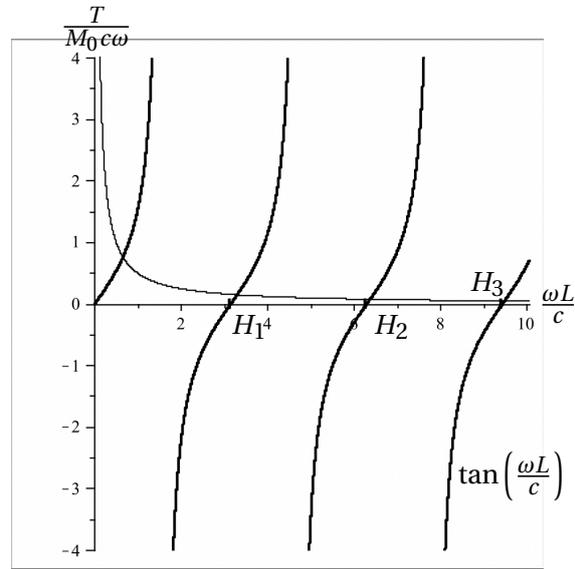
l'indice  $n$  précisant que les solutions forment un ensemble discret.

Comme  $\omega = kc$ , on a

$$\tan\left(\frac{\omega_n L}{c}\right) = \frac{T}{M_0 c \omega_n} .$$

8. On représente sur le même graphe

$$f(\omega) = \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \text{et} \quad g(\omega) = \frac{T}{M_0 c \omega} :$$



Les fréquences propres sont données par l'intersection des deux courbes. Les points correspondant aux harmoniques, de pulsations  $n\omega_1$  dans le cas de l'extrémité rigide, sont notés  $H_n$ . On voit sur le graphe que  $\omega_n > n\omega_1$  : l'effet d'une extrémité massique est d'élever les fréquences propres.

**9 — Étude d'une corde pincée**

1. La condition initiale portant sur la position de la corde s'écrit :

$$y(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{a} x & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ \frac{h(L-x)}{L-a} & \text{pour } a < x \leq L \end{cases} .$$

La condition initiale portant sur la vitesse s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 .$$

2. La vitesse de chaque point de la corde est donnée par :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \frac{n c \pi}{L} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n c \pi t}{L} + \psi_n\right) .$$

La condition initiale correspondante s'écrit alors :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \frac{n c \pi}{L} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \sin \psi_n = 0 \quad \forall x .$$

On en déduit  $\sin \psi_n = 0$ ; on peut donc choisir  $\psi_n = 0$ ,  $\forall n$ . On a alors :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n c \pi t}{L}\right) . \quad (6)$$

3. Le développement en série de Fourier d'une fonction impaire de période  $2L$  s'écrit :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2L} \int_{-L}^L F(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle  $[0, L]$ , la fonction  $F$  coïncide par définition à l'élongation initiale :  $F(x) = y(x, 0)$  ; on a donc :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \left[ \int_0^a \frac{h}{a} x \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_a^L \frac{h(L-x)}{L-a} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{2}{L} \left[ \frac{h}{a} \int_0^a x \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{L-a} \int_a^L (L-x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Posons  $k = \frac{n\pi}{L}$  ; les intégrales se calculent en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^a x \sin kx dx &= \left[ -\frac{x}{k} \cos(kx) \right]_0^a + \frac{1}{k} \int_0^a \cos(kx) dx \\ &= -\frac{a}{k} \cos(ka) + \frac{1}{k^2} [\sin(kx)]_0^a = -\frac{a}{k} \cos(ka) + \frac{1}{k^2} \sin(ka) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^L (L-x) \sin(kx) dx &= \left[ -\frac{L-x}{k} \cos(kx) \right]_a^L \\ &\quad - \frac{1}{k} \int_a^L \cos(kx) dx = \frac{L-a}{k} \cos(ka) - \frac{1}{k^2} [\sin(kx)]_a^L \\ &= \frac{L-a}{k} \cos(ka) + \frac{\sin(ka)}{k^2} \end{aligned}$$

car  $\sin(kL) = 0$  d'après les conditions aux limites. On a donc :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \left[ -\frac{h}{k} \cos(ka) + \frac{h}{ak^2} \sin(ka) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{k} \cos(ka) + \frac{h}{k^2(L-a)} \sin(ka) \right] \\ &= \frac{2h}{k^2 a(L-a)} \sin(ka) \end{aligned}$$

soit en remplaçant  $k$  par son expression :

$$b_n = \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 a(L-a)} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right).$$

La fonction  $F$  se décompose sur  $\mathbb{R}$  en :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right).$$

Comme  $y(x, 0) = F(x)$  sur  $[0, L]$ , on peut écrire :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right).$$

Or, d'après l'expression (6) établie à la question précédente :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En identifiant les deux dernières égalités, on peut en déduire  $y_{0n} = b_n$ . En remplaçant  $b_n$  par son expression, on en déduit le développement de la solution de l'équation d'onde :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 a(L-a)} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right).$$

4. L'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  est :

$$b_n = \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 a(L-a)} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right).$$

Les amplitudes des harmoniques décroissent donc en  $1/n^2$  ; elles sont rapidement très faibles quand  $n$  augmente. Le son ne sera pas très riche en harmoniques, c'est-à-dire pas très brillant à l'écoute.

5. L'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  est proportionnelle à  $\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)$ . Elle est nulle si le point d'excitation de la corde a une abscisse  $a$  telle que  $\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right) = 0$ , soit  $a = \frac{pL}{n}$ , avec  $p$  entier. L'endroit où l'on excite la corde influe donc sur le timbre du son émis.

6. Lorsque  $a$  est très petit ( $a \ll L$ ), on a  $\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \sim \frac{n\pi a}{L}$  et  $L-a \sim L$ , et l'expression de  $b_n$  se simplifie en

$$b_n \sim \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 aL} n\pi \frac{a}{L},$$

soit :

$$b_n = \frac{2h}{n\pi}.$$

L'amplitude des harmoniques ne décroît plus qu'en  $1/n$  : le son émis est plus riche en harmoniques.

7. L'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  varie comme

$$b_n = \frac{B}{n^2} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right).$$

On peut calculer le CGS pour les 30 premiers harmoniques avec Python par exemple, en utilisant l'expression

$$\frac{\sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{\sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}.$$

Pour une attaque de la corde à  $a = \frac{L}{4}$ , on trouve  $CGS = 1,18$  ; pour  $a = \frac{L}{20}$ , on obtient  $CGS = 3,37$ . Le son est plus brillant si on pince la corde en un point proche de son extrémité.

### 10 — Étude d'une corde frappée

1. La corde étant initialement au repos, on en déduit  $y(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in [0, L]$ .

Les vitesses des points de la corde sont donnés à  $t = 0$  par :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq x < a \\ u & \text{pour } a \leq x < a + e \\ 0 & \text{pour } a + e \leq x \leq L \end{cases}$$

2. La condition portant sur  $y(x, 0)$  s'écrit :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\psi_n) = 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

d'où  $\cos(\psi_n) = 0, \forall n$ . Le choix  $\psi_n = -\frac{\pi}{2}$  convient.

Comme  $\cos\left(\frac{n\pi t}{L} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ , la solution de l'équation de d'Alembert est cherchée sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \quad (7)$$

3. Le développement en série de Fourier d'une fonction impaire de période  $2L$  s'écrit :

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \quad (8)$$

avec :

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L V(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L V(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx.$$

Sur l'intervalle  $[0, L]$ , la fonction  $V$  coïncide par définition à la vitesse initiale :  $V(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$ ; on a donc :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{a-\frac{e}{2}}^{a+\frac{e}{2}} u \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx.$$

Comme  $e \ll L$ , la fonction  $\sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$ , de période  $2L$ , varie très peu sur un intervalle de largeur  $e$ ; on peut donc considérer que pour  $a - \frac{e}{2} \leq x \leq a + \frac{e}{2}$ , elle vaut  $\sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \approx \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$ . On en déduit :

$$b_n = \frac{2}{L} u e \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right).$$

D'après (7) :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} y_{0n} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Comme par construction  $V(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$ , en identifiant avec le développement (8) on obtient :

$$b_n = \frac{2ue}{L} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = \frac{n\pi}{L} y_{0n}$$

d'où l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  :

$$y_{0n} = \frac{2ue}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right).$$

La solution de l'équation de d'Alembert vérifiant les conditions initiales s'écrit alors :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ue}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Les amplitudes des harmoniques décroissent en  $1/n$ , plus lentement que dans le cas d'une corde pincée (se reporter à l'exercice précédent, où l'on a établi une décroissance en  $1/n^2$ ). **Le son d'un piano est plus riche en harmoniques que le son d'un clavecin (instrument à cordes pincées).**

4. L'amplitude de l'harmonique de rang  $n$ , donnée par

$$y_{0n} = \frac{2ue}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

est nulle si  $a$ , position du point d'impact du marteau sur la corde, est tel que  $\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = 0$ , soit  $\frac{n\pi a}{L} = p\pi$ , avec  $p$  entier. Il faut donc que

$$a_p = p \frac{L}{n} \quad \text{avec } p \text{ entier, } 1 \leq p \leq n - 1.$$

On supprimera l'harmonique de rang  $n = 7$  en choisissant  $\frac{7\pi a}{L} = p\pi$ , soit

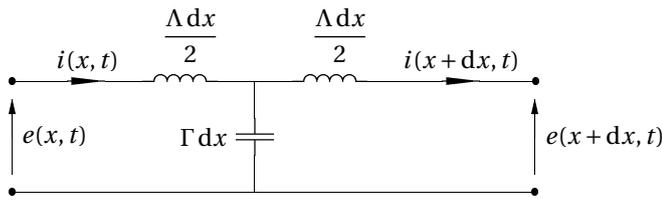
$$a = p \frac{L}{7}.$$

Comme  $0 < a < L$ , 6 positions conviennent, de  $p = 1$  à  $p = 6$ .

*Le modèle étudié ici est très simplifié. Le spectre du son ne dépend pas seulement de la position du point d'impact, mais aussi du poids et de la forme du marteau, du diamètre de la corde, de la durée du contact entre le marteau et la corde. Dans la pratique, la position du marteau n'est pas calculée de façon à éteindre des harmoniques, mais de façon à obtenir la sonorité voulue. En général,  $a/L$  varie de  $1/12$  à  $1/17$  pour un piano moderne.*

### 11 — Ligne électrique

On donne le schéma équivalent d'une portion de ligne de longueur  $dx$ .



1. Loi des mailles :

$$e(x, t) - e(x + dx, t) = \frac{\Lambda dx}{2} i(x, t) + \frac{\Lambda dx}{2} i(x + dx, t)$$

que l'on linéarise en

$$-\frac{\partial e}{\partial x} dx = \Lambda i(x, t) dt,$$

d'où

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = 0.$$

Loi des nœuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial e}{\partial t}$$

soit

$$\Gamma \frac{\partial e}{\partial t} dx = i(x, t) - i(x + dx, t) = -\frac{\partial i}{\partial x} dx$$

d'où

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial i}{\partial x} = 0.$$

2. On a

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Lambda \Gamma \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

et la tension vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0.$$

Considérons

$$\underline{e}(x, t) = \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} + \beta e^{j[\omega(t+x/v)]}.$$

On a

$$\frac{\partial^2 \underline{e}}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \underline{e}(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{e}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{e}(x, t).$$

En écrivant que  $\underline{e}(x, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert, on obtient

$$-\omega^2 + \frac{\omega^2}{v^2 \Gamma \Lambda} = 0$$

d'où

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}.$$

Le terme  $\alpha e^{j[\omega(t-x/v)]}$  correspond à une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants; le terme  $\beta e^{j[\omega(t+x/v)]}$  correspond à une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants.

On impose en  $x = 0$

$$\underline{e}(0, t) = E_0 e^{j\omega t} = \alpha e^{j\omega t} + \beta e^{j\omega t}$$

d'où

$$\alpha + \beta = E_0.$$

La première équation couplée s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial t} &= -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{1}{\Lambda} \left[ -j\frac{\omega}{v} \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} + j\frac{\omega}{v} \beta e^{j[\omega(t+x/v)]} \right] \\ &= j\frac{\omega}{\Lambda v} \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} - j\frac{\omega}{\Lambda v} \beta e^{j[\omega(t+x/v)]} \end{aligned}$$

d'où en intégrant par rapport au temps

$$\underline{i} = \frac{\alpha}{\Lambda v} e^{j[\omega(t-x/v)]} - \frac{\beta}{\Lambda v} e^{j[\omega(t+x/v)]} + C(x)$$

où la « constante » d'intégration  $C(x)$  est constante vis-à-vis de  $t$ , donc est *a priori* une fonction de  $x$ .

Le courant moyen (par rapport au temps) devant être nul, on a  $C(x) = 0$ , d'où en remplaçant  $v$  par son expression

$$\underline{i}(x, t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} - \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \beta e^{j[\omega(t+x/v)]}$$

La condition  $\underline{e}(L, t) = \underline{Z} \underline{i}(L, t)$  s'écrit alors, en simplifiant par  $e^{j\omega t}$ ,

$$\alpha e^{-j\omega L/v} + \beta e^{j\omega L/v} = \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} [\alpha e^{-j\omega L/v} - \beta e^{j\omega L/v}]$$

On a donc  $\alpha = E_0 - \beta$ , d'où

$$\begin{aligned} (E_0 - \beta) e^{-j\omega L/v} + \beta e^{j\omega L/v} &= \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} [(E_0 - \beta) e^{-j\omega L/v} - \beta e^{j\omega L/v}] \\ &= \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} [(E_0 - \beta) e^{-j\omega L/v} - \beta e^{j\omega L/v}] \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \beta \left[ e^{j\omega L/v} - e^{-j\omega L/v} + \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} (e^{-j\omega L/v} + e^{j\omega L/v}) \right] \\ = E_0 e^{-j\omega L/v} \left( \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} - 1 \right). \end{aligned}$$

On obtient

$$\beta = \left( \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} - 1 \right) \frac{E_0 e^{-j\omega L/v}}{2 \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \cos(\omega L/v) + 2j \sin(\omega L/v)}.$$

On a alors  $\alpha = E_0 - \beta$ .

3. On voit que si

$$\left( Z \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} - 1 \right) = 0$$

on a  $\beta = 0$  : il n'y a plus d'onde réfléchie, se déplaçant de  $x = L$  à  $x = 0$ ; on n'a alors qu'une onde dans le sens des  $x$  croissants, se déplaçant de  $x = 0$  à  $x = L$ .

Il faut donc

$$Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$

► On retrouve l'expression de l'impédance caractéristique du câble.

## 12 — Câble coaxial

1. La loi des mailles s'écrit

$$u(x + dx, t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} - u(x, t) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}.$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}.$$

En écrivant la loi des nœuds et la loi des mailles, puis en les linéarisant, établir deux équations aux dérivées partielles vérifiées par  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$ .

2. D'après la question précédente, on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.$$

De même

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0.$$

Les grandeurs  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$  vérifient la même équation de d'Alembert.

L'inductance linéique d'un câble de longueur  $L$  est

$$\Lambda = \frac{L_c}{L} = \frac{33,4 \times 10^{-6}}{100} = 3,34 \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Sa capacité linéique est

$$\Gamma = \frac{C_c}{L} = \frac{7,46 \times 10^{-9}}{100} = 7,46 \times 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On en déduit

$$c = 2,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Avec  $u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ , on a

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda c} f'(t - x/c),$$

d'où

$$i(x, t) = \frac{1}{\Lambda c} f(t - x/c) = \sqrt{\Gamma \Lambda} u(x, t).$$

On a donc

$$u(x, t) = Z_c i(x, t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$

Une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants est donnée par  $u(x, t) = g(t + x/c)$ . Un calcul similaire mène à

$$u(x, t) = -Z_c i(x, t).$$

4. Avec les valeurs de  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  précédemment calculées, on obtient  $Z_c = 67 \Omega$ .

5. Soit

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

D'après les relations courant-tension précédentes, on a

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} \left[ f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t - \frac{x}{c}\right) \right].$$

Quelle est alors l'expression du courant  $i(x, t)$  le long du câble?

6. On n'a plus proportionnalité entre  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$  dans le cas général.

7. L'onde de courant associée à

$$u_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

est

$$i_i(x, t) = \frac{1}{Z_c} f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

8. Dans le cas où la ligne est en sortie ouverte, on doit avoir

$$i(L, t) = 0 \quad \forall t,$$

soit

$$f(t - L/c) = 0 \quad \forall t$$

ce qui correspondrait à  $f = 0$  (fonction identiquement nulle).

L'onde décrite par  $u_i(x, t)$  et  $i_i(x, t)$  ne peut donc pas convenir.

Il doit donc exister une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants, appelée onde réfléchie, décrite par

$$u_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

l'onde de courant associée ayant comme expression

$$i_r(x, t) = -\frac{1}{Z_c} g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

L'onde résultante de tension dans le câble est alors

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

et l'onde de courant

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} \left[ f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right].$$

**9.** Interprétation des coefficients :

$r_I$  : coefficient de réflexion en intensité;

$r_V$  : coefficient de réflexion en tension.

Dans le cas où la ligne est ouverte, on a

$$i(L, t) = i_i(L, t) + i_r(L, t) = 0$$

d'où

$$r_I = -1.$$

Comme  $u_i(L, t) = Z_c i_i(L, t)$  et  $u_r(L, t) = -Z_c i_r(L, t)$ , on a

$$r_V = -1.$$

**10.** Le premier pic correspond au passage de l'onde incidente en  $x = 0$ ; le second correspond au passage de l'onde réfléchie.

L'onde parcourt la longueur  $2L = 200$  m lors de son aller-retour, pendant une durée mesurée à l'oscilloscope  $\Delta t = 1 \mu s$ . La célérité correspondante est

$$c = \frac{2L}{\Delta t}$$

soit  $c = 2,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Cette valeur est tout à fait en accord avec la valeur déterminée à partir de l'inductance et de la capacité du câble.

**11.** Dans le cas où la ligne est fermée, on a

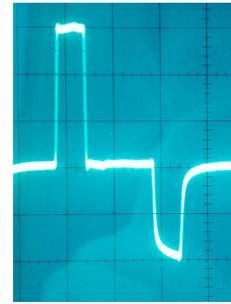
$$u(L, t) = u_i(L, t) + u_r(L, t) = 0.$$

On en déduit

$$r_V = -1 \quad \text{et} \quad r_I = 1.$$

La réflexion de la tension s'accompagne d'un changement de signe.

Allure de la courbe à l'oscilloscope :



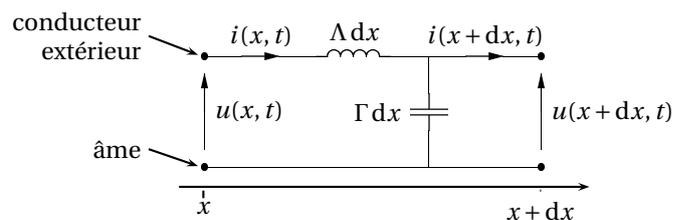
**12.** On remarque que l'amplitude de la tension réfléchie est plus faible que l'amplitude de la tension incidente, ce que le modèle considéré n'explique pas.

Il faudrait prendre en compte la résistance linéique des conducteurs du câble.

### 13 — Câble coaxial et impédance itérative

On considère un câble coaxial modélisé comme un milieu continu, caractérisé par une inductance linéique  $\Lambda$  (en  $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ ) et une capacité linéique  $\Gamma$  (en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ ) : on parle de modèle à constantes réparties.

Le schéma électrique modélisant une longueur élémentaire  $dx$  du câble est :



**1.** La loi des maille s'écrit

$$u(x + dx, t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} - u(x, t) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}.$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}.$$

**2.** On déduit des équations précédentes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.$$

De même

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0 .$$

Les grandeurs  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$  vérifient la même équation de d'Alembert.

3. Le terme  $u_i(x, t)$  correspond à une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants : c'est l'onde incidente émise par le générateur.

Le terme  $u_r(x, t)$  correspond à une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants : c'est l'onde issue de la réflexion de l'onde incidente à l'extrémité de la ligne.

4. Avec  $u_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ , on a

$$\frac{\partial i_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda c} f'(t - x/c),$$

d'où

$$i_i(x, t) = \frac{1}{\Lambda c} f(t - x/c) = \sqrt{\Gamma} \Lambda u(x, t).$$

On a donc

$$u_i(x, t) = Z_c i_i(x, t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} .$$

Avec  $u_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ , on a

$$\frac{\partial i_r}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u_r}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda c} g'(t + x/c),$$

d'où

$$i_r(x, t) = -\frac{1}{\Lambda c} g(t + x/c) = \sqrt{\Gamma} \Lambda u_r(x, t).$$

On a donc

$$u_r(x, t) = -Z_c i_r(x, t).$$

Finalement

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} \left[ f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] .$$

5. La résistance en  $x = L$  impose la condition

$$u(L, t) = R i(L, t)$$

soit

$$u_i(L, t) + u_r(L, t) = \frac{R}{Z_c} [u_i(L, t) - u_r(L, t)] .$$

On a donc

$$Z_c u_i(L, t) + Z_c u_r(L, t) = R u_i(L, t) - R u_r(L, t)$$

On en déduit

$$r_V = \frac{u_r(L, t)}{u_i(L, t)} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c} .$$

Compte tenu des relations précédentes, on a

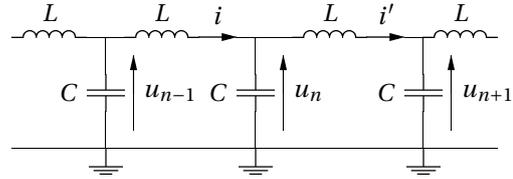
$$r_I = \frac{i_r(L, t)}{i_i(L, t)} = -r_V .$$

6. Il n'y a pas d'onde réfléchi si  $r_V = 0$  et  $r_I = 0$ ; c'est le cas si on prend

$$R = Z_c .$$

## 14 — Ligne LC discrète dans l'approximation continue

1. On considère l'élément de ligne suivant :



On écrit la relation courant-tension pour chaque bobine :

$$u_{n-1}(t) - u_n(t) = L \frac{di}{dt}$$

et

$$u_n(t) - u_{n+1}(t) = L \frac{di'}{dt} .$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i - i' = C \frac{du_n}{dt} .$$

Dérivons-là :

$$\frac{di}{dt} - \frac{di'}{dt} = C \frac{d^2 u_n}{dt^2}$$

soit

$$\frac{u_{n-1}(t) - u_n(t)}{L} - \frac{u_n(t) - u_{n+1}(t)}{L} = C \frac{d^2 u_n}{dt^2} .$$

On a donc

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

On calcule  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , soit  $f_0 = 8,0 \times 10^5$  Hz .

L'approximation continue consiste à ne considérer que les variations spatiales des tensions  $u_n$  ne se font que su de « grandes distances ». On suppose ainsi que la distance caractéristique sur laquelle varie  $u_n(t)$  est très supérieure à la taille  $a$  d'une cellule. On peut alors introduire la fonction continue des deux variables continues  $x$  et  $t$ , définie par  $u(x = na, t) = u_n(t)$ .

2. On effectue un développement limité à l'ordre 2 de  $u(x+a, t)$  :

$$u(x+a, t) = u(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En  $x = na$ , cette relation donne

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + a \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

De même

$$u(x-a, t) = u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

soit en  $x = na$

$$u_{n-1}(t) = u_n(t) - a \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Additionnons les relations (9) et (10) :

$$u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) = 2u_n(t) + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En considérant  $u(x, t) = u_n(t)$  en  $x = na$ , l'équation de récurrence s'écrit alors

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On obtient donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad v = a\omega_0.$$

► Il a fallu pousser les développements limités à l'ordre 2, les termes d'ordre 1 se simplifiant lors de l'addition des deux expressions.

On applique une tension sinusoïdale  $u_0(t) = U \cos(\omega t)$  à l'entrée de la ligne, et on se place en régime sinusoïdal forcé. On considère une solution en onde progressive harmonique de la forme

$$\underline{u}(x, t) = \underline{U} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i}(x, t) = \underline{I} e^{j(\omega t - kx)}$$

pour l'onde de tension et l'onde de courant se propageant le long de la ligne.

3. Dans la limite continue, on a

$$u_{n-1}(t) = u(x-a, t) = u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial t} = u_n(t) - a \frac{\partial u}{\partial t}$$

et la relation courant tension pour la bobine considérée devient

$$-a \frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Avec l'onde harmonique progressive considérée, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk \underline{u}(x, t),$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{jka}{L} \underline{u}.$$

On en déduit

$$\underline{i} = \frac{jka}{j\omega L} \underline{u} = \frac{ka}{\omega L} \underline{u}.$$

La relation de dispersion s'écrit  $\omega = kv$ , d'où

$$\underline{i} = \frac{a}{Lv} \underline{u} = \frac{1}{\omega_0 L} \underline{u} = \frac{\sqrt{LC}}{L} \underline{u}.$$

On a donc  $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$  avec

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La grandeur  $\underline{Z}$  a la dimension d'une impédance; son module s'exprime en ohm.

Si on considère deux ondes de tension et de courant progressives vers les  $x$  décroissants, on a par un calcul similaire

$$\underline{u} = -\underline{Z} \underline{i}.$$

La ligne est en réalité de taille finie et est constituée de 16 cellules  $LC$ . On s'intéresse ici à la propagation d'un train d'impulsions périodiques de tension le long de la ligne.

4. On a vu que  $\sqrt{LC}$  est homogène à une temps (question 1). On pose donc  $\tau \approx \sqrt{LC}$ .

Entre l'entrée et la sortie de la ligne, le temps de propagation est de l'ordre de  $T = 16\tau$  soit  $T = 0,10 \text{ ms}$ .

Si on ne veut pas que les impulsions se recouvrent, il faut qu'une impulsion ait fait un aller-retour sur la ligne avant d'envoyer l'impulsion suivante; la durée entre deux impulsions successives doit donc être inférieure à  $2T$ , soit une fréquence

$$f < \frac{1}{16\tau} = 5 \text{ kHz}.$$

### 5. Extrémité en circuit ouvert

En  $u_0$ , on observe l'impulsion  $u(t)$  envoyée par le générateur. En sortie ouverte, on a  $r_u = 1$  : l'onde réfléchie a même amplitude que l'onde incidente. On observe donc en  $u_{16}$  la superposition des ondes incidente et réfléchie, soit  $2u(t)$ .

### Extrémité en court-circuit

On impose  $u_{16} = 0$  à la sortie en court-circuit.

6. Il n'y pas de signal réfléchi si l'onde incidente vérifie la condition à la limite, soit  $u_{16}(t) = Zi_{16}(t)$ .

Comme la résistance impose  $u_{16}(t) = Ri_{16}(t)$ , c'est le cas si  $R = Z$ , impédance caractéristique de la ligne.

On calcule  $R = 50 \Omega$ .

► Le GBF ayant une impédance de  $50 \Omega$  égale à  $Z$ , il n'y a pas réflexion au niveau du GBF. Quand  $R \neq Z$ , l'onde incidente se réfléchit en bout de ligne, mais l'onde réfléchie ne se réfléchit ensuite pas au niveau du GBF. Elle ne fait donc pas d'allers-retours avec des réflexions successives entre les deux extrémités.

### 15 — Chaîne d'atomes

1. La masse ( $n$ ) est soumise d'une part à l'action du ressort « de droite ». Sa longueur étant :

$$L_d = x_{n+1}(t) - x_n(t) = x_{n+1}^0 + \xi_{n+1}(t) - x_n^0 - \xi_n(t) = a + \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)$$

cette action vaut

$$\vec{T}_d = k[L_d - a] \vec{e}_x = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] \vec{e}_x.$$

La même masse est soumise d'autre part à l'action du ressort « de gauche », de longueur :

$$L_g = x_n(t) - x_{n-1}(t) = x_n^0 + \xi_n(t) - x_{n-1}^0 - \xi_{n-1}(t) = a + \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t).$$

Cette action vaut donc

$$\vec{T}_g = -k[L_g - a] \vec{e}_x = -k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] \vec{e}_x.$$

L'accélération de la masse ( $n$ ) étant

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} \vec{u}_x = \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} \vec{u}_x,$$

appliquons à celle-ci le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe  $Ox$  :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)].$$

2. Un développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de  $x_n^0$  permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}(t) &= \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t) + a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &= \xi_n(t) + a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_{n-1}(t) &= \xi(x_n^0 - a, t) = \xi(x_n^0, t) - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &= \xi_n(t) - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

À l'ordre le plus bas non nul, il reste

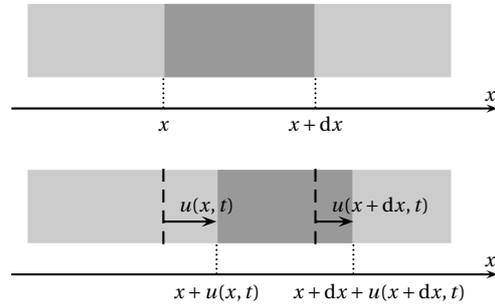
$$k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

### 16 — Onde sur une barre

On considère la tranche comprise au repos entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , de masse  $dm = \rho S dx$ . En présence de l'onde, elle se trouve située entre les abscisses  $x + u(x, t)$  et  $x + dx + u(x + dx, t)$ .



L'allongement de la tranche considérée est

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx.$$

Sa longueur au repos étant  $dx$ , son allongement relatif est

$$\frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

À une force de traction  $F > 0$  correspond un allongement relatif  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ; la force de traction s'écrit alors :

$$dF(x, t) = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

La tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est soumise à :

$$dF(x + dx, t) - dF(x, t) = \frac{\partial dF}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx.$$

L'abscisse du centre de gravité de la tranche est

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{[x + dx + u(x, t)] + [x + u(x, t)]}{2} \\ &= x + \frac{dx}{2} + \frac{u(x, t) + u(x + dx, t)}{2} \\ &= x + \frac{dx}{2} + u(x, t) \end{aligned}$$

au premier ordre.

Son accélération vaut donc  $\ddot{x}_G = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  et le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tranche considérée s'écrit :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx,$$

soit :

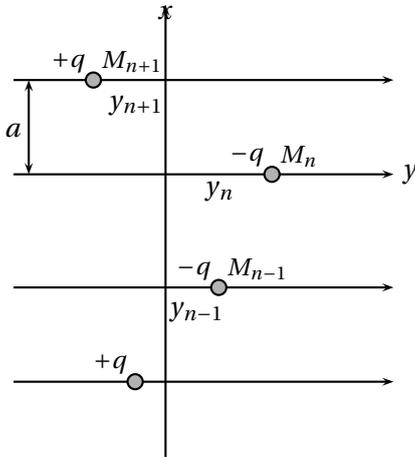
$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert, dont la solution peut s'écrire  $u(x, t) = Af(c - xt) + Bg(x + ct)$ , la célérité des ondes progressives étant donnée par

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

### 17 — Boules chargées

On considère une chaîne infinie de boules chargées qui ne peuvent se déplacer que sur les fils horizontaux. Dans un premier temps, il faut paramétrer le système pour décrire les mouvement des boules :



On repère par  $y_n(t)$  la position horizontale de la boule de rang  $n$  à l'instant  $t$ . Sur la figure, on a  $y_{n-1}(t) < 0$ ,  $y_n(t) > 0$  et  $y_{n+1}(t) > 0$ .

**1<sup>er</sup> cas : chaque boule n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisines**

La boule en  $M_n$  subit de la part de la boule en  $M_{n+1}$  la force électrostatique

$$\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_{n+1}M_n}{(M_{n+1}M_n)^3},$$

et de la part de la boule en  $M_{n-1}$  la force

$$\vec{F}_{n-1 \rightarrow n} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_{n-1}M_n}{(M_{n-1}M_n)^3},$$

En notant  $\vec{R}$  la réaction du fil sur la boule de rang  $n$  (normale à  $\vec{e}_x$  en considérant qu'il n'y a pas de frottement) et  $m$  sa masse, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} \vec{e}_x = \vec{F}_{n+1 \rightarrow n} + \vec{F}_{n-1 \rightarrow n} + \vec{R}.$$

En projetant selon  $\vec{e}_x$ , on obtient

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_n - y_{n+1}}{(M_{n+1}M_n)^3} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_n - y_{n-1}}{(M_{n-1}M_n)^3}$$

Afin de simplifier l'étude, nous allons envisager des mouvements de faible amplitude, soit  $|x_n| \ll a$ . On a alors

$$M_{n+1}M_n \approx a \quad \text{et} \quad M_{n-1}M_n \approx a$$

et l'équation du mouvement devient

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} [y_n(t) - y_{n+1}(t) + y_n(t) - y_{n-1}(t)]$$

soit

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} [2y_n(t) - y_{n+1}(t) - y_{n-1}(t)].$$

Nous allons considérer que la longueur d'onde  $\lambda$  du phénomène est grande devant  $a$ , ce qui fait que  $y_n$  varie faiblement entre deux boules voisines.

Cela permet de passer à la limite continue, en introduisant une fonction  $y(x, t)$ , de classe  $C^2$ , qui coïncide avec  $y_n(t)$  pour  $x = na$ .

En développant à l'ordre deux, on a

$$y(x + a, t) = y(x, t) + a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

soit en  $x = na$

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

De même

$$y(x - a, t) = y(x, t) - a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

soit en  $x = na$

$$y_{n-1}(t) = y_n(t) - a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On en déduit

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) = 2y_n(t) + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left[ -a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]$$

soit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On obtient l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a}}.$$

**2<sup>e</sup> cas : chaque boule n'interagit avec toutes les autres**

Compte tenu de l'alternance des signes des charges, on a

$$\vec{F}_{n+2 \rightarrow n} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_{n+2}M_n}{(M_{n+2}M_n)^3}.$$

On peut généraliser pour une boule de rang  $n + p$  :

$$\vec{F}_{n+p \rightarrow n} = (-1)^p \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_{n+p}M_n}{(M_{n+p}M_n)^3}.$$

Dans le cas de mouvements de faible amplitude, on a  $M_{n+p}M_n \approx pa$ ; la projection de la force précédente selon  $\vec{e}_x$  s'écrit

$$F_{x, n+p \rightarrow n} = (-1)^p \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 p^3} (y_n - y_{n+p}).$$

La résultante des forces subie par la boule  $n$  selon  $\vec{e}_x$  s'écrit alors

$$F_x = \sum_{p=1}^{\infty} F_{x,n+p \rightarrow n} + F_{x,n-p \rightarrow n} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{2y_n - y_{n+p} - y_{n-p}}{p^3}.$$

Comme précédemment, on peut développer

$$y(x+ap, t) = y(x, t) + ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit en  $x = na$

$$y_{n+p}(t) = y_n(t) + ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

De même

$$y(x-ap, t) = y(x, t) - ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit en  $x = na$

$$y_{n-p}(t) = y_n(t) - ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$y_{n+p}(t) + y_{n-p}(t) = 2y_n(t) + a^2 p^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

d'où

$$F_x = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{a^2 p^2}{p^3} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (-1) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}$$

On reconnaît la série harmonique alternée

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln 2,$$

d'où

$$F_x = \frac{q^2 \ln 2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Le principe de la dynamique appliqué à la boule de rang  $n$  s'écrit

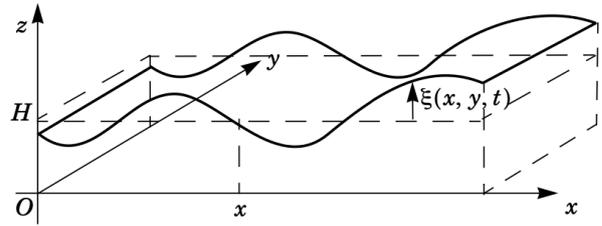
$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q^2 \ln 2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On obtient l'équation de d'Alembert avec une célérité différente du cas précédent :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c'^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c' = \frac{c \ln 2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a}} = c \ln 2.$$

## 18 — Ondes de gravité en eau peu profonde

Représentons la situation schématiquement :



On considère un bassin de largeur  $L$  selon  $Oy$ , de profondeur moyenne  $H$  selon  $Oz$  et de longueur infinie selon  $Ox$ , rempli d'eau. Le bassin est le siège de vagues (ondes de gravité) caractérisées par un champ de vitesse  $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$  et un champ de pression  $P(x, z, t)$ . À l'instant  $t$  et à l'abscisse  $x$ , la hauteur d'eau est notée

$$h(x, t) = H + \zeta(x, t) \quad \text{où} \quad |\zeta(x, t)| \ll H.$$

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide de volume  $d\tau$  s'écrit

$$\mu d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau + \mu d\tau \vec{g}$$

soit

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \vec{g}.$$

Le terme de dérivée convective étant du deuxième ordre en  $v(x, t)$ , on peut le négliger, d'où

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \vec{g}.$$

2. Projétons la relation précédente selon  $Ox$  :

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad \text{(PV)}$$

Projétons l'équation précédente selon  $Oz$  :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g.$$

Intégrons par rapport à  $z$  :

$$P(x, z, t) = -\mu g z + C(x, t)$$

où la « constante d'intégration » est constante par rapport à la variable d'intégration  $z$ , c'est-à-dire est *a priori* une fonction de  $x$  et de  $t$ .

Écrivons la pression à la surface libre, le cote  $z = H + \zeta(x, t)$  :

$$P_0 = -\mu g [H + \zeta(x, t)] + C(x, t).$$

On a donc  $C(x, t) = P_0 + \mu g [H + \zeta(x, t)]$ , d'où

$$P(x, z, t) = P_0 + \mu g [H + \zeta(x, t) - z]. \quad \text{(PZ)}$$

3. Dérivons (PZ) par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

L'équation (PV) s'écrit alors

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu g \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

d'où l'équation de couplage demandée;

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1)$$

4. La tranche d'eau entre  $x$  et  $x + dx$  a pour hauteur  $H + \zeta(x, t)$ , et donc pour volume

$$d\tau = (H + \zeta(x, t))Ldx.$$

Sa masse est donc

$$\delta m_x(t) = \mu L[H + \zeta(x, t)] dx.$$

Le bilan de masse entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit

$$d(\delta m) = \delta m_{\text{reçu}}.$$

La variation est

$$\begin{aligned} d(\delta m) &= \delta m_x(t + dt) - \delta m_x(t) \\ &= \mu L[\zeta(x, t + dt) - \zeta(x, t)] dx = \mu L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt dx. \end{aligned}$$

Le terme de masse reçue se calcule à partir du débit massique en fluide à travers la section en  $x$  et du débit massique sortant à travers la section en  $x + dx$  :

$$\begin{aligned} \delta m_{\text{reçu}} &= \mu v(x, t)L[H + \zeta(x, t)] dt \\ &\quad - \mu v(x + dx, t)L[H + \zeta(x + dx, t)] dt. \end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre, les termes  $v(x, t)\zeta(x, t)$  (et en  $x + dx$ ), d'ordre deux, ne sont pas pris en compte; il reste

$$\begin{aligned} \delta m_{\text{reçu}} &= \mu v(x, t)LH dt - \mu v(x + dx, t)LH dt \\ &= -\mu \frac{\partial v}{\partial x} LH dt dx, dt. \end{aligned}$$

Le bilan de masse s'écrit alors

$$\mu L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx, dt = -\mu \frac{\partial v}{\partial x} LH dx dt$$

soit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

5. Dérivons (2) par rapport à  $t$  :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -H \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = gH \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

en utilisant (2).

La surélévation  $\zeta(x, t)$  vérifie donc l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{gH}.$$

6. Quand les vagues s'approchent du rivage, leur vitesse  $c$  diminue car la profondeur  $H$  diminue vers le rivage.

Quand une vague est en biais par rapport au rivage, sa partie la plus éloignée va plus vite que sa partie plus proche (car le fond  $H$  est plus grand quand on est plus loin du rivage); elle tend donc à la rattraper, et la vague arrive parallèlement au rivage.

7. La vitesse d'une vague de la vague varie comme  $\sqrt{H}$  où  $H$  est la profondeur de l'eau. Cette dernière étant plus élevée au sommet de la vague, ce sommet se déplace plus vite que la base de la vague, ce qui entraîne un déferlement.

## 19 — Ordres de grandeur en acoustique

Un niveau acoustique de 60 dB correspond à une intensité  $I = I_0 \times 10^6 = 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Avec

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{\langle p_1^2 \rangle}{\mu_0 c} = \frac{p_m^2}{2\mu_0 c},$$

on en déduit  $p_m = \sqrt{2\mu_0 c I}$ .

D'après l'équation d'état du gaz parfait, on a

$$\mu_0 = \frac{MP_0}{RT_0} = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

et

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

d'où  $\mu_0 c = 408 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On en déduit  $p_m = 2,9 \times 10^{-2} \text{ Pa}$ .

L'amplitude de la vitesse se déduit de  $v_m = \frac{p_m}{\mu_0 c}$ , soit

$$v_m = 7,0 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pour un signal sinusoïdal de fréquence  $f$ , on a  $v_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ,

la vitesse vaut  $v_m = \omega \xi_m = 2\pi f \xi_m$ , d'où  $\xi_m = 11 \text{ nm}$ .

Pour une évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait, la température et la pression vérifient la loi de Laplace  $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$ , soit en différentielle logarithmique

$$(1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0.$$

Les variations de pression et de température étant très faibles, nous les assimilons aux différentielles; d'où

$$\Delta T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_0}{P_0} \Delta P.$$

Comme en amplitude  $\Delta P = p_m$ , on a  $\Delta T = 2,4 \times 10^{-5} \text{ K}$

On vérifie que  $p_m \ll P_0$  et  $\Delta T \ll T_0$ , ainsi que  $v_m \ll c$  et  $\xi_m \ll \lambda$  où la longueur d'onde est  $\lambda = c/f = 0,34 \text{ m}$ . On est tout à fait dans le cadre de l'approximation acoustique.

## 20 — Évolution isotherme ou adiabatique?

1. L'équation d'Euler et l'équation de conservation de la masse ne dépendent pas de la nature de l'évolution du fluide; elles sont inchangées :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0.$$

L'évolution du fluide n'étant plus adiabatique, il est évidemment exclu d'utiliser la relation traduisant l'adiabaticité de cette évolution. Il faut utiliser le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T.$$

En suivant le même raisonnement qu'en cours, on établit la relation linéarisée :

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_T p_1.$$

2. On établit l'équation d'onde vérifiée par la surpression de la même façon qu'en cours :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \chi_T} \Delta p_1 = 0.$$

La célérité des ondes acoustiques vaut alors :

$$c_T = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_T}}.$$

Dans le cas du gaz parfait, le coefficient de compressibilité isotherme à la température  $T_0$  vaut :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{nRT_0}{P} \right)_{P_0} = \frac{nRT_0}{VP_0^2} = \frac{1}{P_0}.$$

On a donc :

$$\mu_0 \chi_T = \frac{\mu_0}{P_0} = \frac{M}{RT_0}$$

en utilisant l'équation d'état  $\frac{P_0}{\mu} = \frac{RT_0}{M}$ .

On en déduit l'expression de la célérité :

$$c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}.$$

L'expression de la célérité peut être établie plus directement dans le cas du gaz parfait. L'équation d'état du gaz parfait permet d'écrire  $\mu_0 = \frac{M}{RT_0} P_0$  en l'absence d'onde sonore. En présence de l'onde, la température restant égale à  $T_0$ , on obtient :

$$\mu_0 + \mu_1 = \frac{M}{RT_0} (P_0 + p_1)$$

d'où :

$$\mu_1 = \frac{M}{RT_0} p_1.$$

Les équations d'Euler et de la conservation de la masse permettent d'écrire :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} p_1) = \Delta p_1 = -\frac{\partial(\mu_0 \text{div} \vec{v}_1)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

d'où

$$\Delta p_1 = \frac{M}{RT_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}.$$

On retrouve l'expression de la célérité  $c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$ .

3. On calcule  $c_T = 293 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette valeur n'est pas en accord avec les résultats expérimentaux.

4.a) Il s'agit de la longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{f}$ .

4.b) Pendant une période  $T = 1/f$ , la diffusion thermique se fait sur une longueur caractéristique

$$L_{\text{th}} \approx \sqrt{D_{\text{th}} T} = \sqrt{\frac{D_{\text{th}}}{f}}.$$

L'évolution peut être considérée comme adiabatique si on peut négliger la diffusion thermique, c'est-à-dire si, pendant une période, elle se fait sur une longueur  $L_{\text{th}} \ll \lambda$ . Il faut donc

$$\sqrt{\frac{D_{\text{th}}}{f}} \ll \frac{c}{f} \quad \text{soit} \quad f \ll \frac{c^2}{D_{\text{th}}}.$$

Pour l'air, il faut  $f \ll 6 \times 10^9 \text{ Hz} = 6 \text{ GHz}$ . Cette condition est largement vérifiée dans le domaine des ondes acoustiques.

## 21 — Propagation dans un tuyau élastique

1. Considérons la tranche de fluide comprise entre les abscisses  $x$  et les abscisses  $x+dx$ . Nous allons effectuer un bilan de masse sur ce système.

La masse de fluide vaut  $dm(x, t) = \mu(x, t) S(x, t) dx$ . Pendant  $dt$ , elle varie de

$$\begin{aligned} d^2 m &= dm(x, t+dt) - dm(x, t) = \frac{\partial(dm(x, t))}{\partial t} dt \\ &= \left[ \mu(x, t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + S(x, t) \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} \right] dx dt. \end{aligned}$$

La masse échangée à travers les frontières pendant  $dt$  vaut (on compte positivement la masse reçue par le système)

$$\begin{aligned} \delta^2 m_{\text{éch}} &= \mu(x, t) S(x, t) v(x, t) dt \\ &\quad - \mu(x + dx, t) S(x + dx, t) v(x + dx, t) dt \\ &= -\frac{\partial(\mu S v)}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

Le bilan de masse s'écrit  $d^2 m = \delta^2 m_{\text{éch}}$ , soit après simplification par  $dx dt$  :

$$\frac{\partial(\mu S)}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu S v)}{\partial x}.$$

Comme  $S(x, t) = S_0 + S_1(x, t)$ ,  $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$  et  $v(x, t) = v_1(x, t)$ , en notant avec l'indice 1 les grandeurs infiniment petites d'ordre 1, le bilan s'écrit

$$\mu \frac{\partial S_1}{\partial t} + S \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu S \frac{\partial v}{\partial x} - \mu v \frac{\partial S}{\partial x} - S v \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

soit en explicitant chaque grandeur

$$\begin{aligned} (\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial S_1}{\partial t} + (S_0 + S_1) \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \\ = -(\mu_0 + \mu_1)(S_0 + S_1) \frac{\partial v_1}{\partial x} - (\mu_0 + \mu_1) v_1 \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ - (S_0 + S_1) v_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x}. \end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre vis-à-vis des termes d'indice 1, on obtient

$$\mu_0 \frac{\partial S_1}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 S_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

2. La relation traduisant l'adiabaticité de l'évolution du fluide s'écrit

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

La section du tuyau dépend de la pression  $P$ . En l'absence d'onde, elle vaut  $S(P_0) = S_0$ . En présence de l'onde sonore, elle vaut

$$\begin{aligned} S(P) = S(P_0 + p_1) &= S(P_0) + p_1 \left( \frac{dS}{dP} \right)_{P_0} \\ &= S_0 + p_1 S(P_0) D = S_0 + p_1 S_0 D \end{aligned}$$

d'après la définition de  $D$ . On en déduit

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_1}{dt} = S_0 D \frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

Le bilan de masse s'écrit alors

$$\mu_0 S_0 D \frac{\partial p_1}{\partial t} + S_0 \mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 S_0 \frac{\partial v_1}{\partial x},$$

$$\text{soit } (D + \chi_S) \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

En utilisant le théorème de Schwarz entre cette équation et le bilan de masse, on obtient

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -(D + \chi_S) \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}.$$

La surpression vérifie donc l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0(D + \chi_S)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0.$$

La célérité des ondes vaut

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(D + \chi_S)}}.$$

3. On calcule pour le tuyau métallique

$$c_m = 1390 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et pour le tuyau souple

$$c_{\text{el}} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La célérité est considérablement réduite dans un tuyau souple.

## 22 — Puissance sonore du violon

1. On considère un violon avec une corde de longueur  $\ell$ , fixée à ses deux extrémités, selon l'axe des  $x$ . Un musicien pince la corde donnant naissance à une onde de célérité  $c$ . Donner l'expression de l'élongation  $y(x, t)$ , ainsi que la relation liant la fréquence et le mode.

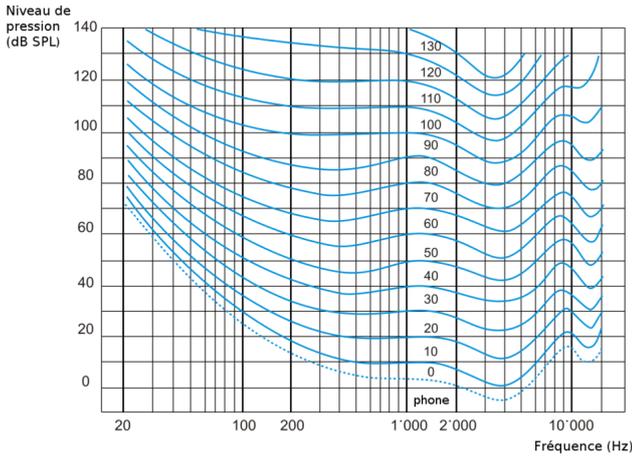
2. On donne  $\ell = 33 \text{ cm}$ . Un musicien pince la corde en son centre. Quelle est la fréquence du son émis. Quel est l'utilité d'un archet?

3. le niveau d'intensité sonore est défini par

$$L(\text{dB}) = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right),$$

où  $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  est le seuil d'audibilité, ou seuil de perception. À  $a = 1,0 \text{ m}$  du violon, on mesure  $L = 70 \text{ dB}$ . Jusqu'à quelle distance  $d$  peut-on entendre le violon? Utiliser les approximations qui vous semblent pertinentes.

On donne les courbes d'égalité sensation auditive.



### 23 — Onde sonore dans un gaz

1. Le déplacement de la tranche de fluide est, en pratique, très inférieur à la longueur d'onde d'une onde sonore harmonique se propageant dans le tuyau :  $|\xi| \ll \lambda$ . On a donc  $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\xi}{x} \right| \ll 1$ .

2. La masse de la tranche de fluide au repos est  $dm = \mu_0 S dx$ . La conservation de sa masse s'écrit :

$$\begin{aligned} \mu_0 S dx &= \mu S [dx + \xi(x + dx, t) - \xi(x, t)] \\ &\approx \mu S \left[ dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right] \end{aligned}$$

avec  $\mu = \mu_0 + \mu_1$ , soit :

$$\mu_0 = (\mu_0 + \mu_1) \left[ 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \approx \mu_0 + \mu_1 + \mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

en négligeant le terme du second ordre. On a donc :

$$\mu_1 = -\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

3. Appliquons le principe de la dynamique à la tranche de masse  $dm = \mu_0 S dx$  :

$$\mu_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = [P(x) - P(x + dx, t)] S$$

au premier ordre, soit avec  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$  :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

4.a) Pour le fluide au repos, l'équation d'état s'écrit

$$P_0 = \frac{RT_0}{M} \mu_0.$$

Pour le fluide perturbé, elle s'écrit

$$P_0 + p(x, t) = \frac{RT_0}{M} (\mu_0 + \mu_1(x, t)),$$

d'où :

$$p = \frac{RT_0}{M} \mu_1.$$

On a donc :

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{RT_0}{M} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} = \mu_0 \frac{RT_0}{M} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}.$$

4.b) Un gaz parfait subissant une évolution adiabatique réversible obéit à la loi de Laplace  $P\mu^{-\gamma} = \text{cte}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} P_0 \mu_0^{-\gamma} &= (P_0 + p)(\mu_0 + \mu_1)^{-\gamma} \\ &= P_0 \mu_0^{-\gamma} \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^{-\gamma} \end{aligned}$$

soit :

$$1 = \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^{-\gamma} \approx \left( 1 + \frac{p}{P_0} \right) \left( 1 - \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0} \right).$$

En se limitant au premier ordre, on a donc :

$$p = -\frac{\gamma P_0}{\mu_0} \mu_1 = -\frac{\gamma RT_0}{M} \mu_1.$$

On en déduit donc comme précédemment

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}.$$

4.c) On calcule  $c_T = 290 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La seconde valeur est en accord avec l'expérience, et c'est l'hypothèse d'adiabaticité qui est à retenir.

### 24 — Bruit d'explosion

1. La vitesse du son dans un gaz parfait est donnée par

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}.$$

Le temps mis pour parcourir la distance  $D$  vaut donc

$$\tau_h = \frac{D}{c_0} = D \sqrt{\frac{M}{\gamma RT_0}}.$$

2. La célérité du son est donnée ici par

$$c(z) = \sqrt{\frac{\gamma RT(z)}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma R(T_0 - Bz)}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} \sqrt{1 - \frac{Bz}{T_0}}$$

soit

$$c(z) = c_0 \sqrt{1 - \frac{B}{T_0} z}.$$

La durée mise pour parcourir une distance  $dz$  vaut donc

$$dt = \frac{dz}{c(z)} = \frac{1}{c_0} \left( 1 - \frac{B}{T_0} z \right)^{-1/2} dz.$$

La durée mise pour aller de  $z = 0$  à  $z = D$  vaut donc

$$\begin{aligned}\tau_v &= \frac{1}{c_0} \int_0^D \left(1 - \frac{B}{T_0} z\right)^{-1/2} dz \\ &= -\frac{T_0}{Bc_0} \int_1^{1-\frac{BD}{T_0}} u^{-1/2} du = -\frac{2T_0}{Bc_0} \sqrt{u} \Big|_1^{1-\frac{BD}{T_0}} \\ &= -\frac{2T_0}{Bc_0} \left( \sqrt{1 - \frac{BD}{T_0}} - 1 \right)\end{aligned}$$

soit

$$\tau_v = \frac{2T_0}{Bc_0} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{BD}{T_0}} \right).$$

3. Avec les valeurs numériques données, on a  $\frac{B}{T_0} \approx 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ .

Nous allons donc faire l'hypothèse (dont il faudra vérifier la validité *a posteriori*) que  $\frac{BD}{T_0} \ll 1$ , soit

$$1 - \sqrt{1 - \frac{BD}{T_0}} \approx 1 - \frac{BD}{2T_0} + \frac{3}{8} \left( \frac{BD}{T_0} \right)^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\tau_h - \tau_v &= \frac{D}{c_0} - \frac{2T_0}{Bc_0} \left[ 1 - 1 + \frac{BD}{2T_0} - \frac{3}{8} \left( \frac{BD}{T_0} \right)^2 \right] \\ &= \frac{D}{c_0} - \frac{D}{c_0} + \frac{2T_0}{Bc_0} \frac{3B^2D^2}{8T_0^2} \\ &= \frac{3BD^2}{4c_0T_0} = \frac{3}{4} \tau_h \frac{BD}{T_0}.\end{aligned}$$

On en déduit l'écart relatif

$$\frac{\tau_h - \tau_v}{\tau_h} = \frac{3BD}{4T_0}.$$

On en déduit que  $\frac{\tau_h - \tau_v}{\tau_h} > 0,01$  pour

$$D > \frac{0,04}{3} \frac{T_0}{B} \quad \text{soit} \quad D > 7,7 \times 10^2 \text{ m}.$$

► On vérifie  $\frac{BD}{T_0} = 1,3 \times 10^{-2} \ll 1$ , l'approximation faite pour utiliser un développement limité est donc justifiée.

## 25 — Trompette

1. L'extrémité de la trompette est ouverte sur l'atmosphère, qui impose la pression  $P(L, t) = P_0$ . En notant  $P(x, t) = P_0 + p_1(x, t)$ , on a bien  $p_1(L, t) = 0$ .

2. La situation est similaire aux oscillations forcées de la corde de Melde : on a un nœud de vibration en  $x = L$ , et on impose une excitation sinusoïdale à l'autre extrémité.

Le nœud en  $x = L$  conduit à écrire la solution de l'équation de d'Alembert en onde stationnaire :

$$p_1(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi).$$

On a

$$p_1(L, t) = A \cos(kL + \varphi) \cos(\omega t + \psi) \quad \forall t$$

ce qui impose  $\cos(kL + \varphi) = 0$ , d'où

$$kL + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

On remplace donc  $\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi - kL$ , d'où

$$\begin{aligned}p_1(x, t) &= A \cos\left(kx - kL + \frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cos(\omega t + \psi) \\ &= (-1)^n A \cos\left(\frac{\pi}{2} - k(L - x)\right) \cos(\omega t + \psi) \\ &= (-1)^n A \sin[k(L - x)] \cos(\omega t + \psi).\end{aligned}$$

La condition en  $x = 0$  s'écrit alors

$$p_0 \cos \omega t = (-1)^n A \sin(kL) \cos(\omega t + \psi) \quad \forall t.$$

On peut choisir  $\psi = 0$ , d'où

$$A = \frac{p_0}{(-1)^n \sin(kL)}.$$

On a finalement

$$p_1(x, t) = p_0 \frac{\sin[k(L - x)]}{\sin(kL)} \cos(\omega t).$$

3. L'expression de  $p_1(x, t)$  fait apparaître des résonances quand le dénominateur s'annule, c'est-à-dire quand  $\sin(kL) = 0$ .

On a alors avec la relation de dispersion  $\omega = kc$

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = n \frac{c\pi}{L}.$$

Les fréquences constituants le son ne peuvent donc être que de la forme

$$f_n = n f_1 \quad \text{avec} \quad f_1 = \frac{c}{2L}.$$

Les fréquences données sont compatibles avec un fondamental de fréquence  $f_1 = 250 \text{ Hz}$ , le son étant alors constitué des harmoniques  $f_2$  et  $f_4$ .

Avec  $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , on obtient  $L = 69 \text{ cm}$ .

Ces résultats sont compatibles avec le modèle linéaire adopté.

4. L'expression  $\vec{\Pi} = P_0 \vec{v}_1(x, t)$  conduirait à une intensité sonore

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = P_0 \langle v_1 \rangle = 0$$

car  $\langle v_1 \rangle = 0$ , ce qui n'est pas possible.

La bonne expression est bien sûr  $\vec{\Pi} = p_1(x, t) \vec{v}_1(x, t)$ .

En  $x = L$ , on a  $p_1(L, t) = 0$ , d'où  $\vec{\Pi}(x = L, t) = \vec{0}$ .

Ce résultat est paradoxal, car il implique d'aucune puissance sonore ne sort de l'instrument; on ne pourrait donc pas l'entendre!

► Les conditions aux limites sont plus subtiles pour un tuyau ouvert; la condition  $p_1(L, t) = 0$  est approchée : elle donne des résultats corrects pour les fréquences propres mais conduit à un paradoxe.

Le fondamental a pour pulsation  $\omega_1 = \frac{c\pi}{2L}$ , soit la fréquence

$$f_1 = \frac{c\pi}{4L}.$$

On remarque que

$$\omega_n = [2(n-1) + 1] \frac{c\pi}{2L}.$$

On peut donc écrire

$$f_p = (2p + 1) f_1 \quad \text{avec } p \in \mathbf{N}.$$

Le son ne comporte que les harmoniques de rang impair.

5. La fréquence du fondamental pour une flûte est donc

$$f_{1,fl} = \frac{c}{2L}.$$

Pour une clarinette, elle vaut

$$f_{1,cl} = \frac{c}{4L} = \frac{f_{1,fl}}{2}.$$

À longueur de tuyau égale, le son émis par une clarinette est plus grave (une octave plus grave) que le son émis par une flûte.

6. Avec  $L = 65 \text{ cm}$  et  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , la fréquence du fondamental est  $f_1 = 130,8 \text{ Hz}$ .

Si on ouvre le trou central, on force un nœud de pression à se former aux environs du milieu du tuyau. Dans la pratique, cela force l'émission de l'harmonique suivant, c'est-à-dire  $f_3 = 3f_1 = 392,3 \text{ Hz}$ .

7. Le fondamental  $f_1 = 130,8 \text{ Hz}$  correspond à un  $do_3$ . Le troisième harmonique  $f_3 = 392,3 \text{ Hz}$  correspond au  $sol_4$ , situé à un intervalle de douzième (une octave plus une quinte) du fondamental.

Le timbre est la « couleur » du son, défini en première approximation par les amplitudes des harmoniques qui le constituent.

## 26 — Clarinette

On considère une clarinette comme étant un tube de longueur  $L$  et de section  $S$ . Son extrémité en  $x = 0$  est fermée et on impose une pression  $P_0$  en  $x = L$ . Au repos, la pression dans le tube est  $P_0$ , la masse volumique  $\mu_0$  et on note  $c$  la célérité d'une onde sonore dans l'air. Le musicien lance une onde sonore dans le tube en  $x = 0$  :

$$P(x, t) = p_{10} \cos(\omega t) \cos(kx).$$

1. Les extrémités imposent des conditions aux limites de type « nœud » de surpression (extrémité fermée) ou « ventre » de surpression (extrémité ouverte).

Elles justifient donc de chercher une solution de l'équation de d'Alembert sous forme d'une onde stationnaire.

2. Équation de la dynamique linéarisée en projection selon  $Ox$  :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} = p_{10} k \cos(\omega t) \sin(kx)$$

d'où

$$v_1(x, t) = \frac{p_{10} k}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

soit comme  $\omega = kc$

$$v_1(x, t) = \frac{p_{10}}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx).$$

3. Les conditions aux limites sont :

$$p_1(L, t) = 0 \quad \text{et} \quad v_1(0, t) = 0.$$

La paroi en  $x = 0$  impose  $v_1 = 0$ , car la vitesse est normale à la paroi (condition de cinématique des fluides).

4. La condition  $v_1(0, t) = 0$  est déjà vérifiée par le champ des vitesses obtenu.

En  $x = L$ , on doit avoir

$$p_1(L, t) = P_{10} \cos(\omega t) \cos(kL) = 0 \quad \forall t$$

Cette condition impose  $\cos(kL) = 0$ , soit

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

Avec  $\omega_n = k_n c$ , on obtient les pulsations propres

$$\omega_n = \frac{c\pi}{2L} + (n-1) \frac{c\pi}{L} \quad \text{avec } n \in \mathbf{N}^*.$$

Le fondamental a pour pulsation

$$\omega_1 = \frac{c\pi}{2L}.$$

## 28 — Fréquences propres d'une sphère rigide

1. Le premier terme correspond à une onde divergente (après passage au centre de la sphère); le second à une onde convergente (après réflexion sur la paroi de la sphère).

L'équation d'Euler conduit à

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = - \underline{A} \left( - \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_r \\ &\quad - \underline{B} \left( - \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t + kr)} \vec{e}_r \\ &= \left[ \frac{A}{r^2} (1 + ikr) e^{i(\omega t - kr)} + \frac{B}{r^2} (1 - ikr) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r \end{aligned}$$

d'où

$$\underline{v} = \frac{1}{i\omega\mu_0 r^2} \left[ \underline{A}(1 + ikr) e^{i(\omega t - kr)} + \underline{B}(1 - ikr) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r$$

soit

$$\underline{v} = \frac{1}{\mu_0\omega r^2} \left[ \underline{A}(kr - i) e^{i(\omega t - kr)} - \underline{B}(kr + i) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r.$$

2. On doit avoir

$$\lim_{r \rightarrow 0} D_v = 0.$$

Le débit volumique est donné par

$$D_v = 4\pi r^2 v(r, t).$$

On a donc en notation complexe

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \underline{D}_v &= \frac{4\pi}{\mu_0\omega} [-i\underline{A}e^{i\omega t} - i\underline{B}e^{i\omega t}] \\ &= -\frac{4\pi i}{\mu_0\omega} [\underline{A} + \underline{B}] e^{i\omega t} = 0, \end{aligned}$$

d'où  $\underline{B} = -\underline{A}$ .

Le champ des vitesses s'écrit alors

$$\vec{v} = \frac{\underline{A}}{\mu_0\omega r^2} \left[ (kr - i) e^{i(\omega t - kr)} + (kr + i) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r$$

La composante radiale de la vitesse doit être nulle sur la paroi :  $v(R, t) = 0, \forall t$ , soit après simplification

$$\underline{A}(kR - i) e^{ikR} + \underline{A}(kR + i) e^{ikR} = 0.$$

Comme  $\underline{A} \neq 0$ , on en déduit

$$(kR - i) e^{-ikR} + (kR + i) e^{ikR} = 0,$$

soit

$$kR \left( e^{ikR} + e^{-ikR} \right) + i \left( e^{ikR} - e^{-ikR} \right) = 0,$$

qui s'écrit

$$kR \cos(kR) - \sin(kR) = 0.$$

Les modes propres vérifient donc

$$\tan(kR) = kR.$$

Avec la relation de dispersion  $\omega = 2\pi f = kc$ , on en déduit la relation vérifiée par les fréquences propres :

$$\tan\left(\frac{2\pi f R}{c}\right) = \frac{2\pi f R}{c}.$$

3. La plus basse de ces fréquences est donc la plus petite racine positive de  $\tan x = x$ .

Une résolution numérique conduit à  $x \approx 4,5$ . Avec  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , on calcule  $f = \frac{4,5c}{2\pi R}$ , soit  $f = 4,9 \text{ kHz}$ .

## 31 — Tuyau d'orgue

*Commentaire préliminaire : l'onde sonore obéit à l'équation de d'Alembert. Nous cherchons ici une solution sous forme d'onde stationnaire. Le milieu étant borné, seuls des modes propres peuvent exister.*

1. On écrit que  $p_1(x, y, z, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

soit

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

On a donc  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ .

2. ► On ne peut pas utiliser la relation  $p_1 = \mu_0 c v_1$  faisant intervenir l'impédance acoustique  $Z_a = \mu_0 c$ , car cette dernière n'est valable que pour une onde progressive; nous avons ici une onde stationnaire.

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1.$$

La projection sur les trois axes donne

$$\mu_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = -k_x p_m \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t)$$

$$\mu_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = -k_y p_m \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t)$$

$$\mu_0 \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} = -k_z p_m \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t)$$

En intégrant par rapport au temps, on en déduit

$$v_{1x} = \frac{p_m k_x}{\mu_0 \omega} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(\omega t)$$

$$v_{1y} = \frac{p_m k_y}{\mu_0 \omega} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(\omega t)$$

$$v_{1z} = \frac{p_m k_z}{\mu_0 \omega} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t)$$

La vitesse normale aux parois étant nulle sur chaque paroi, les conditions aux limites s'écrivent

$$v_{1x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = L$$

$$v_{1y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } y = D$$

$$v_{1z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = D$$

Les conditions en  $x = 0, y = 0$  et  $z = 0$  sont vérifiées.

La condition en  $x = L$  s'écrit  $\sin(k_x L) = 0$ , soit  $k_x L = n_1 \pi$ ,

la condition en  $y = D$  s'écrit  $\sin(k_y D) = 0$ , soit  $k_y D = n_2 \pi$ ,

la condition en  $z = D$  s'écrit  $\sin(k_z D) = 0$ , soit  $k_z D = n_3 \pi$ , où  $n_1$  et  $n_2$  et  $n_3$  sont trois entiers.

On a donc

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{L} ; \quad k_y = \frac{n_2 \pi}{D} ; \quad k_z = \frac{n_3 \pi}{D} .$$

3. La relation de dispersion s'écrit donc, avec  $\omega = 2\pi f$  :

$$\frac{n_1^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n_2^2 \pi^2}{D^2} + \frac{n_3^2 \pi^2}{D^2} = \frac{4\pi^2 f^2}{c^2}$$

d'où

$$f_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{n_1^2 \frac{c^2}{4L^2} + n_2^2 \frac{c^2}{4D^2} + n_3^2 \frac{c^2}{4D^2}}$$

4. Les modes propres sont caractérisés par les triplets  $(n_1, n_2, n_3)$ . Comme  $D \gg L$ , la plus basse fréquence,

qui correspond au mode fondamental, est donnée par  $n_1 = 1$  et  $n_2 = n_3 = 0$ , soit

$$f_{100} = \frac{c}{2L}$$

Les modes correspondant à  $n_2 = n_3 = 0$  correspondent aux harmoniques de fréquence multiple de celle du fondamental :

$$f_{n_1 0 0} = n_1 \frac{c}{2L} = n_1 f_{100}$$

donnant un son harmonieux.

La fréquence minimale non multiple du fondamental  $f_{100}$  correspond à  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$  et  $n_3 = 0$  (ou  $n_2 = 0$  et  $n_3 = 1$ ), soit

$$f_m = f_{010} = \frac{c}{2D}$$

On calcule  $f_m = 17 \text{ kHz}$ . Cette valeur est à la limite supérieure de la bande passante de l'oreille; les sons non harmonieux sont alors inaudibles.