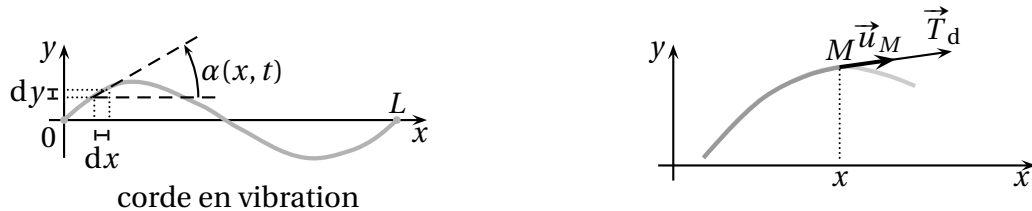


Physique des ondes (complément)

La corde vibrante

1 — Équation d'onde

On considère une corde de longueur L , de masse linéique μ , soumise à une tension T_0 au repos.



L'élément de corde est soumis aux deux forces de tension $\vec{T}_d$ et $\vec{T}_g$ de la part du reste de la corde. Le principe de la dynamique, appliqué dans le référentiel terrestre galiléen, s'écrit :

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}_d + \vec{T}_g \quad (1)$$

avec $\vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y$ et avec l'hypothèse d'un déplacement purement transversal.

La projection de (1) sur $\vec{e}_x$ conduit à :

$$0 = T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t).$$

Comme $\cos \alpha \approx 1$, on a $T(x+dx, t) - T(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0$, soit $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. La tension est donc uniforme le long de la corde et ne dépend que du temps : $T(t)$.

La projection de (1) sur $\vec{e}_y$ conduit à :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t) \sin \alpha(x+dx, t) - T(t) \sin \alpha(x, t) \approx T(t) [\alpha(x+dx, t) - \alpha(x, t)] = T(t) \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx.$$

Comme $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, on en déduit :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Notons T_0 la tension uniforme de la corde quand celle-ci est au repos. Lors des petits mouvements, la tension subit de faibles variations autour de sa valeur au repos : $T(t) = T_0 + T_1(t)$, avec $T_1(t) \ll T_0$. En se limitant au premier ordre, on peut écrire :

$$T(t) \frac{\partial y}{\partial x} = [T_0 + T_1(t)] \frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \left[1 + \frac{T_1(t)}{T_0} \right] \frac{\partial y}{\partial x}$$

Le terme $\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha$ est un infiniment petit du premier ordre, ainsi que le terme $\frac{T_1(t)}{T_0}$. En ne retenant pas le produit de ces deux termes, qui est donc un infiniment petit du second ordre, on obtient

$$T(t) \frac{\partial y}{\partial x} \approx T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

En dérivant par rapport à x , on en déduit $T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. L'équation (2) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

2 — Impédance

2.1 Expression générale pour une progressive

La corde située « à droite » du point x exerce sur la partie située « à gauche » de ce point la force $\vec{T}_d$. La composante transversale de cette force est

$$T_y(x, t) = \vec{T}_d \cdot \vec{e}_y = T_0 \sin \alpha(x, t) \approx T_0 \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Considérons une onde progressive dans le sens des x croissants, de la forme

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = f(u) \quad \text{avec} \quad u = t - \frac{x}{c}.$$

L'élément de corde situé à droite de l'abscisse x se met en mouvement sous l'effet de l'onde; il est soumis de la part de la corde située à gauche (là « d'où vient l'onde ») à la force $-\vec{T}_d$. Le mouvement transversale est donc dû à la composante transversale $T_{y,g}(x, t) = -T_y(x, t)$. La réponse de la corde à cette force est caractérisée par la vitesse transverse $\frac{\partial y}{\partial t}$. On peut donc définir une **impédance**¹ de la corde

$$Z = \frac{\text{cause}}{\text{réponse}} \quad \text{soit} \quad Z = -\frac{T_y}{v_y}.$$

Dans le cas de l'onde progressive considérée, on a

$$T_y = T_0 \frac{dy}{dx} = -\frac{T_0}{c} f'(u) \quad \text{et} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = f'(u).$$

L'impédance a donc pour expression

$$Z = \frac{T_0}{c} = \sqrt{\mu T_0}.$$

- L'impédance ne dépend que des caractéristiques de la corde, et a même valeur en tout point.
- En considérant une onde progressive dans le sens des x décroissant, $y(x, t) = g(t + x/c)$, on montre facilement que

$$Z_- = -\frac{T_0}{c} = -\sqrt{\mu T_0}.$$

- Dans le cas général d'une onde $y(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$, le rapport $-T_y/v_y$ n'est plus constant.

2.2 Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux différents

On considère le cas de la corde constituée de deux parties : pour $x < 0$, sa masse linéique est μ_1 , pour $x > 0$, sa masse linéique est μ_2 .

En $x < 0$, on observe une onde incidente $y_i(x, t) = f(x - c_1 t)$, une onde réfléchie $y_r(x, t) = g(x + c_1 t)$ où $c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$ est la célérité dans la partie $x < 0$.

En $x > 0$, on observe une onde transmise $y_t(x, t) = h(x - c_2 t)$ où $c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$ est la célérité dans la partie $x > 0$.

Pour une onde progressive dans le sens des x croissants, l'impédance de la corde vaut $Z_1 = \frac{T}{c_1}$ pour $x < 0$ et $Z_2 = \frac{T}{c_2}$ pour $x > 0$.

1. Le terme impédance représente un emprunt (1892) à l'anglais *impedance* (1886), terme d'électricité créé par Heaviside à partir de *to impede* « empêcher, retenir ». Le verbe anglais est un emprunt au latin *impedire* « entraver », « empêcher de marcher », de la même famille que *pes*, *pedis*, (pied). Plus l'impédance du système est grande, plus sa réponse à une cause est petite.

L'élongation de la corde est donc donnée par

$$y(x, t) = \begin{cases} f(x - c_1 t) + g(x + c_1 t) & \text{pour } x < 0 \\ h(x - c_2 t) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, l'élongation doit être continue :

$$f(-c_1 t) + g(c_1 t) = h(-c_2 t).$$

En $x = 0$, la tangente à la corde doit être continue :

$$f'(-c_1 t) + g'(c_1 t) = h'(-c_2 t).$$

Intégrons cette dernière relation :

$$-\frac{1}{c_1} f(-c_1 t) + \frac{1}{c_1} g(c_1 t) = -\frac{1}{c_2} h(-c_2 t).$$

On a donc le système

$$\begin{cases} f(-c_1 t) + g(c_1 t) = h(-c_2 t) \\ -\frac{1}{c_1} f(-c_1 t) + \frac{1}{c_1} g(c_1 t) = -\frac{1}{c_2} h(-c_2 t) \end{cases}$$

Le coefficient de réflexion est défini par

$$r = \frac{y_r(0, t)}{y_i(0, t)} = \frac{g(c_1 t)}{f(-c_1 t)} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}.$$

Le coefficient de transmission est défini par Le coefficient de réflexion est défini par

$$t = \frac{y_t(0, t)}{y_i(0, t)} = \frac{h(-c_2 t)}{f(-c_1 t)} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}.$$

On peut exprimer les coefficients en fonction des impédances de chaque partie de la corde :

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

- On retrouve le résultat usuel : il n'y a pas d'onde réfléchie si $Z_1 = Z_2$, situation qui correspond à l'**adaptation d'impédance**.

3 — Énergie d'une corde vibrante

Considérons une onde progressive dans le sens des x croissants : $y(x, t) = f(x/c)$.

3.1 Puissance transmise

La partie de la corde à gauche de l'abscisse x exerce sur la partie à droite la force $\vec{T}_g = -\vec{T}_d$. Elle lui transmet la puissance

$$\mathcal{P}(x, t) = \vec{T}_g \cdot \vec{v} = -T_y(x, t) \cdot \frac{\partial y}{\partial t},$$

soit

$$\mathcal{P}(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

- La partie à droite transmet à la partie à gauche la puissance $-\mathcal{P}(x, t)$.

3.2 Bilan local d'énergie

Sous l'effet de l'onde, un élément dx de corde possède :

- une énergie cinétique du fait de son mouvement;
- une énergie potentielle du fait du travail des forces de tension.

Le bilan d'énergie s'écrit sous la forme générale

$$d(\delta\mathcal{E}) = \delta^2\mathcal{E}_{\text{éch}}.$$

On peut définir une énergie mécanique linéique $e(x, t)$ portée par la corde ; l'élément de longueur dx porte l'énergie

$$\delta\mathcal{E} = e(x, t) dx$$

et sa variation pendant dt est donnée par

$$d(\delta\mathcal{E}) = [e(x, t + dt) - e(x, t)] dx = \frac{\partial e}{\partial t} dx dt.$$

L'énergie échangée est l'énergie reçue de la part des forces de tension en x et en $x + dx$, soit

$$\delta^2\mathcal{E}_{\text{éch}} = \mathcal{P}(x, t) dt - \mathcal{P}(x + dx, t) dt = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx dt$$

Le bilan local s'écrit alors

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0.$$

On calcule

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}.$$

On a d'une part

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]$$

et d'autre part

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right].$$

On en déduit

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_0}{2c^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

soit avec $T_0 = \mu c^2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0.$$

On retrouve la formulation du bilan local d'énergie, la densité linéique d'énergie s'exprimant

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

- Le terme $e_c(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$ s'interprète comme l'énergie cinétique linéique.
- Le terme $e_p(x, t) = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$ s'interprète comme l'énergie potentielle linéique.
- Pour cette onde progressive selon $\vec{e}_x$, on peut définir un vecteur densité de courant de puissance $\vec{R} = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_x$, et le bilan local s'écrit sous la forme habituelle

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div } \vec{R} = 0.$$