

Physique des ondes (complément)

Modélisation d'un solide

1 — Modélisation discrète

On modélise une tige solide par une chaîne infinie d'oscillateurs, selon un axe Ox , constituée de masses m identiques, reliées deux à deux par un ressort de raideur k et de longueur au repos a . Les masses, qui modélisent les atomes d'un cristal, se déplacent sans frottement le long de l'axe Ox . Au repos, elles sont distantes de a . On a donc une description discrète du milieu; la masse numéro n a pour abscisse au repos $x_n^0 = na$. Lors de son mouvement, son abscisse est $x_n(t) = x_n^0 + \xi_n(t) = na + \xi_n(t)$, où $\xi_n(t)$ est l'écart à sa position d'équilibre (sur la figure 1, on a $\xi_n(t) > 0$ et $\xi_{n-1}(t) < 0$).

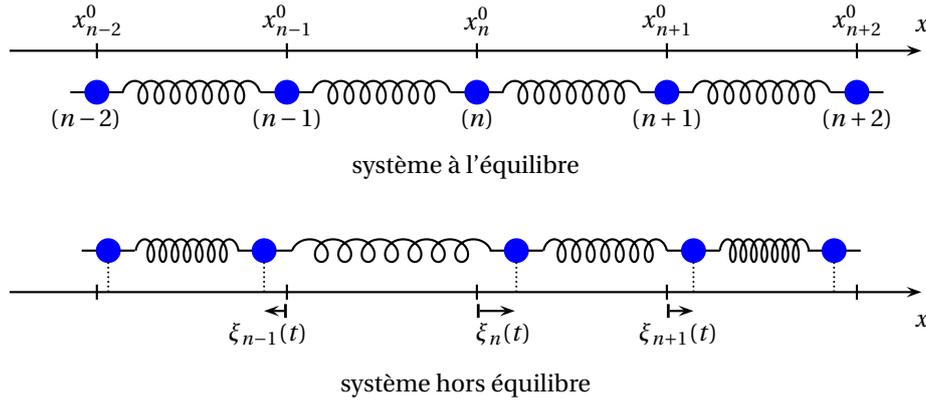


FIGURE 1 – Chaîne infinie d'oscillateurs.

La masse (n) est soumise d'une part à l'action du ressort « de droite ». Sa longueur étant :

$$L_d = x_{n+1}(t) - x_n(t) = x_{n+1}^0 + \xi_{n+1}(t) - x_n^0 - \xi_n(t) = a + \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)$$

cette action vaut $\vec{T}_d = k[L_d - a] \vec{e}_x = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] \vec{e}_x$. La même masse est soumise d'autre part à l'action du ressort « de gauche », de longueur :

$$L_g = x_n(t) - x_{n-1}(t) = x_n^0 + \xi_n(t) - x_{n-1}^0 - \xi_{n-1}(t) = a + \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t).$$

Cette action vaut donc $\vec{T}_g = -k[L_g - a] \vec{e}_x = -k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] \vec{e}_x$.

L'accélération de la masse (n) étant $\frac{d^2 x_n}{dt^2} \vec{u}_x = \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} \vec{u}_x$, appliquons à celle-ci le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe Ox :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)]. \tag{1}$$

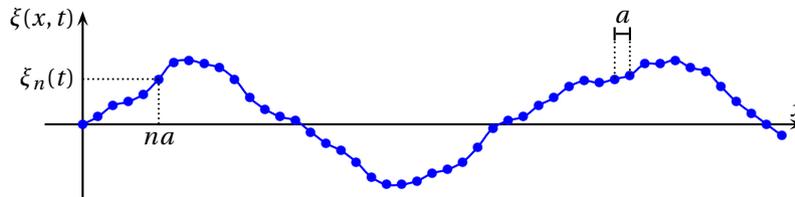


FIGURE 2 – Approximation des milieux continus.

La distance interatomique a est typiquement de l'ordre de l'angström (10^{-10} m); cette valeur étant très faible devant l'échelle de longueur caractérisant l'onde, il est justifié de passer à une description continue du milieu. Dans approximation des milieux continus des milieux continus (voir figure 2), on introduit une fonction continue des deux variables x et t , notée $\xi(x, t)$, de classe \mathcal{C}^2 , qui coïncide avec $\xi_n(t)$ quand $x = x_n^0 = na$:

$$\xi(x = na, t) = \xi_n(t).$$

Un développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de x_0^n permet d'écrire :

$$\xi_{n+1}(t) = \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t) + a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi_n(t) + a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

et

$$\xi_{n-1}(t) = \xi(x_n^0 - a, t) = \xi(x_n^0, t) - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi_n(t) - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

À l'ordre le plus bas non nul, il reste : $k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, et la relation (1) conduit à :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

2 — Lien avec les propriétés macroscopiques du milieu

L'équation (2) fait intervenir les constantes k , a et m , caractérisant une description à l'échelle microscopique du milieu. À l'échelle macroscopique, les propriétés élastiques d'une tige peuvent être caractérisées par le module de Young E du matériau.

Le module de Young d'un matériau relie la force F exercée sur une surface S à l'allongement relatif $\Delta L/L$:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}. \quad (3)$$

Une chaîne de longueur L contient $n = \frac{L}{a}$ ressorts ; si ΔL est l'allongement total de la chaîne, l'allongement de chaque ressort est $d\vec{\ell} = \frac{\Delta L}{n} = a \frac{\Delta L}{L}$. La force s'exerçant sur un atome de cette chaîne vaut alors $f = k d\vec{\ell} = ka \frac{\Delta L}{L}$. Considérons un réseau tridimensionnel cubique simple (voir figure 3), chaque nœud étant occupé par un atome de masse m . Une section S est traversée par $N = \frac{S}{a^2}$ chaînes. La force totale s'exerçant sur les atomes de cette surface vaut donc :

$$F = Nf = \frac{S}{a^2} ka \frac{\Delta L}{L} = S \frac{k\Delta L}{aL}.$$

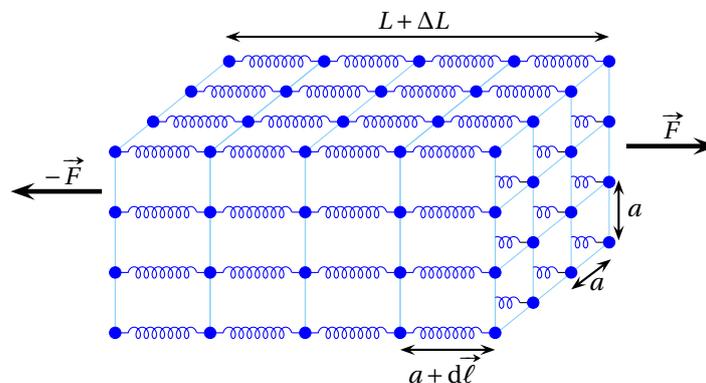


FIGURE 3 – Solide tridimensionnel.

La **contrainte**¹ correspondante vaut alors $\frac{F}{S} = \frac{k\Delta L}{aL}$. En identifiant avec l'équation (3), on en déduit le module de Young $E = k/a$.

Le volume d'une maille est a^3 ; le motif comprend un atome par maille, de masse m . La masse volumique du matériau vaut donc $\rho = m/a^3$. L'équation (2) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{k}{a} \frac{a^3}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Nous obtenons une équation aux dérivées partielles s'exprimant en fonction de paramètres macroscopiques caractéristiques du milieu :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

1. Une contrainte est une force surfacique. Elle a la dimension d'une pression.