

## Partie I — Physique des vagues (Mines-Ponts PSI 2023)

## 1 — Les équations de la vague linéaire

□ 1 — Le volume  $d\tau = dx dy dz$  contient la masse

$$\delta m = \rho(x, z, t) dx dy dz.$$

Entre  $t$  et  $t + dt$ , elle varie de

$$\begin{aligned} d(\delta m) &= (\rho(x, z, t + dt) - \rho(x, z, t)) dx dy dz \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz. \end{aligned}$$

La masse qui franchit une section par unité de temps est donnée par le flux de vecteur densité de courant de masse

$$\vec{j}_m = \rho \vec{u}.$$

La masse reçue par le volume  $d\tau$  pendant  $dt$  est donc

$$\begin{aligned} \delta m_{\text{reçue}} &= j_{m,x}(x, z, t) dy dz dt - j_{m,x}(x dx, z, t) dy dz dt \\ &\quad + j_{m,z}(x, z, t) dx dy dt - j_{m,z}(x, z + dz, t) dx dy dt \\ &\quad - \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} dx dy dz dt - \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} dx dy dz dt. \end{aligned}$$

Le bilan de matière s'écrit donc, après simplification

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}}.$$

□ 2 — Dans le cas où le fluide est incompressible, sa masse volumique est constante. On a donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

et

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

La relation précédente donne alors

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0}.$$

□ 3 — Le champ des vitesses s'écrivant  $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ , on a

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

La relation de la question précédente s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0,$$

soit

$$\boxed{\Delta \phi = 0}.$$

□ 4 — Avec  $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ , la relation d'Euler s'écrit

$$\rho \left[ \frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} \phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u} \cdot \vec{u}) \right] + \rho g \hat{e}_z + \overrightarrow{\text{grad}}(p) = \vec{0}$$

Les variables de temps et d'espace étant indépendantes, le théorème de Schwarz permet d'écrire

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} \phi)}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right).$$

D'autre part, on peut écrire

$$\rho g \hat{e}_z = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z).$$

On a donc

$$\rho \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z + p) = \vec{0}.$$

Le fluide étant incompressible, la masse volumique  $\rho$  est uniforme et on peut écrire

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z + p) = \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left( g z + \frac{p}{\rho} \right)$$

d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + g z + \frac{p}{\rho} \right] = \vec{0}.$$

Une expression de gradient nul est uniforme : elle ne dépend pas des coordonnées d'espace, mais dépend *a priori* du temps. On a donc

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + g z + \frac{p}{\rho} = f(t)}.$$

Dans le cas où l'écoulement est stationnaire, on a  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ , et  $f(t) = C$  constante. La relation précédente devient alors

$$\boxed{\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + g z + \frac{p}{\rho} = C}.$$

On retrouve la **relation de Bernoulli**.

□ 5 — Considérons une particule de fluide à la surface libre. La composante verticale de sa vitesse est  $u_z$ , soit avec  $\vec{u} = \text{grad } \phi$ ,

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (1)$$

La composante verticale de sa vitesse est aussi donnée par la dérivée temporelle de sa cote, dérivée calculée *en suivant la particule de fluide*, c'est-à-dire avec la dérivée particulaire.

$$u_z(x, z = \eta(x, t), t) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\eta(x, t).$$

Comme  $\eta$  ne dépend que la variable d'espace  $x$ , on a

$$(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\eta(x, t) = u_x \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

d'où

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Avec  $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$  on a  $u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ , d'où

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

En utilisant (1) on en déduit

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2)$$

□ 6 — La pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique par continuité, soit

$$p(x, z = \eta, t) = p_0.$$

On a établi à la question 4 la relation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}.$$

Écrivons cette relation en un point de la surface libre de cote  $z = \eta$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \Big|_{z=\eta} + g\eta + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho},$$

d'où

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g} \Big|_{z=\eta}. \quad (3)$$

□ 7 — L'équation de Laplace s'écrit

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Avec  $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$ , elle devient

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Z(z) + X(x, t) \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0,$$

soit

$$\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Le membre de gauche ne dépend pas de  $z$ , tandis que le membre de droite ne dépend ni de  $x$  ni de  $t$ . Ces deux termes étant égaux, ils sont donc constants, soit en introduisant une constante  $\mu$  :

$$\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mu.$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z \end{cases}$$

□ 8 — On a la condition aux limites

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Avec  $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t).$$

Avec  $\phi(x, z) = X(x, t)Z(z)$ , on a de plus

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = X(x, t) \frac{\partial Z}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

On obtient alors

$$\omega A \sin(kx - \omega t) = X(x, t) \frac{\partial Z}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

En identifiant le terme fonction de  $x$  et  $t$  on peut écrire

$$X(x, t) = \sin(kx - \omega t)$$

et

$$\frac{\partial Z}{\partial z} \Big|_{z=0} = A\omega,$$

soit les expressions demandées avec  $\gamma = A\omega$ .

□ 9 — Avec  $X(x, t) = \sin(kx - \omega t)$ , on a

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 X.$$

En identifiant avec l'équation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X,$$

on obtient  $\mu = k^2$ .

L'équation différentielle vérifiée par  $Z(z)$  s'écrit alors

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0.$$

La solution générale est de la forme

$$Z(z) = \alpha \cosh(kz) + \beta \sinh(kz).$$

On a

$$\frac{dZ}{dz} = \alpha k \sinh(kz) + \beta k \cosh(kz)$$

soit en  $z = 0$

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta k = A\omega,$$

d'où

$$\beta = \frac{A\omega}{k}.$$

On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \sin(kx - \omega t) \frac{dZ}{dz}.$$

La condition sur le fond

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0$$

s'écrit alors

$$\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=-H} = 0$$

soit

$$\alpha k \sinh(-kH) + \frac{A\omega}{k} \cosh(-kH) = 0.$$

La fonction  $\sinh$  étant impaire et la fonction  $\cosh$  paire, on a donc

$$\frac{A\omega}{k} \cosh(kH) = \alpha k \sinh(kH)$$

d'où

$$\alpha = \frac{A\omega \cosh(kH)}{k \sinh(kH)} = \frac{A\omega}{k \tanh(kH)}.$$

On a alors

$$Z(z) = \frac{A\omega}{g} \left[ \sinh(kz) + \frac{\cosh(kz)}{\tanh(kH)} \right].$$

En l'absence de formulaire de trigonométrie hyperbolique, on pouvait conclure avec cette expression.

On peut écrire

$$Z(z) = \frac{A\omega}{k} \left[ \frac{\sinh(kz) \sinh(kH) \cosh(kz) \cosh(kH)}{\sinh(kH)} \right].$$

Avec

$$\sinh(a) \sinh(b) + \cosh(a) \cosh(b) = \cosh(a + b)$$

on obtient

$$Z(z) = \zeta \frac{\cosh[k(z + H)]}{\sinh(kH)} \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{A\omega}{k}.$$

□ 10 — Il reste à utiliser la condition de surface au repos

$$\eta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0}.$$

On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} Z(z) = -\omega \cos(kx - \omega t) Z(z)$$

soit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} &= -\omega \cos(kx - \omega t) Z(0) \\ &= -\omega \cos(kx - \omega t) \frac{A\omega}{\tanh(kH)}. \end{aligned}$$

Avec  $\eta = A \cos(kx - \omega t)$ , on obtient

$$A \cos(kx - \omega t) = \frac{\omega}{gk} \cos(kx - \omega t) \frac{A\omega}{\tanh(kH)}.$$

En simplifiant par  $A \cos(kx - \omega t)$  on en déduit la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kH).$$

□ 11 — La vitesse de phase est donnée par

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{g \tanh(kH)}{\omega} = \frac{g \tanh(kH)}{\sqrt{gk \tanh(kH)}}$$

soit

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g \tanh(kH)}{k}}.$$

### Eau peu profonde

Si  $H \ll \lambda$ , comme  $k = 2\pi/\lambda$ , on a  $kH \ll 1$ . On peut alors linéariser

$$\tanh(kH) \approx kH$$

d'où

$$v_\phi \approx \sqrt{gH}.$$

La vitesse de phase ne dépend pas de  $\omega$  : **la propagation n'est pas dispersive en eau peu profonde.**

### Eau profonde

Si  $H \gg \lambda$ , on a  $kH \gg 1$ . On peut alors linéariser

$$\tanh(kH) \approx 1$$

d'où

$$v_\phi \approx \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

La vitesse de phase dépend de  $k$ , donc de  $\omega$  (via la relation de dispersion) : **la propagation est dispersive en eau profonde.**

□ 12 — Différencions la relation de dispersion :

$$2\omega d\omega = g \tanh(kH) dk + gk d[\tanh(kH)].$$

Comme

$$d[\tanh(kH)] = H(1 - \tanh^2(kH)) dk$$

on obtient

$$2\omega d\omega = g [\tanh(kH) + kH(1 - \tanh^2(kH))] dk.$$

On en déduit la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} [\tanh(kH) + kH(1 - \tanh^2(kH))].$$

D'après la relation de dispersion établie à la question 10, on a

$$\tanh(kH) = \frac{\omega^2}{gk},$$

d'où

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{g}{2\omega} \left[ \frac{\omega^2}{gk} + kH \left( 1 - \frac{\omega^4}{g^2 k^2} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[ 1 + kH \left( \frac{gk}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{gk} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[ 1 + kH \left( \tanh(kH) - \frac{1}{\tanh(kH)} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[ 1 + kH \left( \frac{\sinh(kH)}{\cosh(kH)} - \frac{\cosh(kH)}{\sinh(kH)} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[ 1 + kH \frac{\sinh^2(kH) - \cosh^2(kH)}{\cosh(kH) \sinh(kH)} \right] \\ &= \frac{v_\varphi}{2} \left[ 1 + kH \frac{2}{\sinh(2kH)} \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$v_g = \frac{v_\varphi}{n} \left[ 1 + \frac{nkH}{\sinh(2kH)} \right] \quad \text{avec} \quad n = 2.$$

On forme le rapport

$$\frac{v_g}{v_\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{kH}{\sinh(2kH)}.$$

Dans le cas  $kH \ll 1$ , on a  $\sinh(2kH) \approx 2kH$ , et

$$\frac{v_g}{v_\varphi} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

soit

$$v_g \approx v_\varphi \approx \sqrt{gH}.$$

Dans le cas  $kH \gg 1$ , on a  $\sinh(2kH) / ggkH$ , d'où

$$\frac{v_g}{v_\varphi} \approx \frac{1}{2}$$

soit

$$v_g \approx \frac{v_\varphi}{2} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

La relation de dispersion donne

$$\omega^2 = kg \tanh(kH) \approx kg,$$

d'où

$$v_g \approx \frac{v_\varphi}{2} \approx \frac{g}{2\omega}.$$

□ 13 — La vague résultante s'écrit

$$\eta(x, t) = \eta_1 + \eta_2 = A [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

soit

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= 2A \cos \left[ \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \\ &\quad \times \cos \left[ \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]. \end{aligned}$$

En supposant  $k_1 > k_2$  et  $\omega_1 > \omega_2$ , on pose

$$k = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad \text{et} \quad k' = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

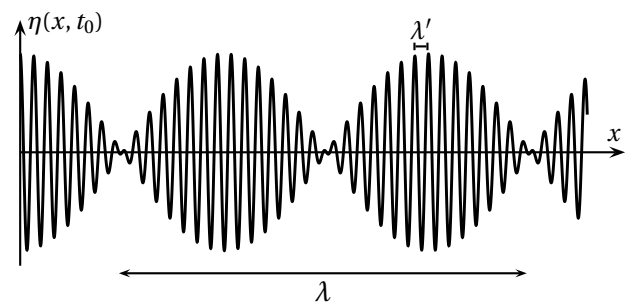
ainsi que

$$\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

On a alors

$$\eta(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(k'x - \omega' t).$$

On représente l'évolution spatiale de l'onde à un instant  $t_0$  donné :



## Partie II — Autour du résonateur de Helmholtz

### 1 — Mouvement de l'air contenu dans le goulot

□ 1 — Quand la masse d'air se déplace selon  $x > 0$ , le volume occupé par l'air dans la bouteille augmente; la pression dans la bouteille diminue donc, et devient inférieure à la pression atmosphérique. La masse d'air est donc « ramenée » vers les  $x < 0$ . Même raisonnement

pour un déplacement vers les  $x < 0$ . On a donc une force de rappel; la masse présente alors des **oscillations périodiques**.

On ne peut rien dire quant à leur caractère harmonique sans autre information sur la forme de la force de rappel.

□ 2 — L'évolution de l'air dans la bouteille étant isen-

tropique, la loi de Laplace s'applique :

$$P(x)V(x)^\gamma = P_0 V^\gamma.$$

Le volume occupé par l'air de la bouteille est

$$V(x) = V - \sigma x.$$

On a donc

$$P(x) = P_0 \left( \frac{V}{V - \sigma x} \right)^\gamma$$

soit

$$P(x) = P_0 \left( 1 - \frac{\sigma x}{V} \right)^{-\gamma}.$$

□ 3 — Le PFD appliqué à la masse d'air s'écrit, en projection selon  $Ox$ <sup>1</sup> :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -[P(x) - P_0] \sigma.$$

Dans le cas d'un mouvement de faible amplitude, on peut linéariser

$$P(x) = P_0 \left( 1 - \frac{\sigma x}{V} \right)^{-\gamma} \simeq P_0 \left( 1 + \frac{\gamma \sigma}{V} x \right),$$

d'où

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\sigma P_0 \left( 1 + \frac{\gamma \sigma}{V} x \right) + \sigma P_0 = -\sigma P_0 \frac{\gamma \sigma}{V} x.$$

On en déduit l'équation du mouvement

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma \sigma^2 P_0}{mV} x = 0.$$

On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma \sigma^2 P_0}{mV}}.$$

La masse d'air dans le goulot est donnée par

$$m = \mu_0 \sigma \ell,$$

on a

$$\omega_0 = \frac{\gamma \sigma P_0}{\ell V \mu_0} = \frac{\sigma}{\ell V} c^2.$$

La fréquence des oscillations est donc

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{\ell V}}.$$

Quand on ajoute de l'eau dans la bouteille, on diminue le volume  $V$  accessible à l'air, ce qui entraîne une augmentation de la fréquence  $f_0$ .

**Le son devient plus aigu lorsque l'on ajoute de l'eau dans la bouteille.**

1. la résultante des forces dues à la paroi latérale est normale à  $Ox$ , et de plus nulle par symétrie.

#### □ 4 — Bouteille 1

Le son a pour fréquence

$$f_{01} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{\ell V}}.$$

#### Bouteille 2

On a un volume  $V' = V/4$ . Le son a pour fréquence

$$f_{02} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{4\sigma}{\ell V}} = 2f_{01}.$$

#### Bouteille 3

Le son a pour fréquence

$$f_{03} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{4\ell V}} = \frac{f_{01}}{2}.$$

En classant les sons du plus grave au plus aigu, on a donc

$$f_{03} < f_{01} < f_{02},$$

les fréquences successives étant dans un rapport d'une octave.

## 2 — Ondes acoustiques dans la bouteille

□ 5 — L'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0.$$

Avec  $\underline{p}_1(x, t) = \underline{a} e^{i(\omega t - kx)}$ , on obtient

$$-\omega^2 \underline{p}_1 + c^2 k^2 \underline{p}_1 = 0$$

d'où

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

□ 6 — Dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation de la dynamique linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1.$$

□ 7 — Dans le cas d'une onde unidimensionnelle selon  $\vec{e}_x$ , l'équation de la dynamique linéarisée s'écrit, en projection selon  $Ox$

$$\mu_0 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x}.$$

En notation complexe, avec

$$\underline{p}(x, t) = \underline{a} e^{i(\omega t - kx)}$$

on obtient

$$i\omega \mu_0 \underline{v}_1 = ik \underline{a} e^{i(\omega t - kx)},$$

soit

$$\underline{v}_1(x, t) = \frac{k}{\mu_0 \omega} \underline{a} e^{i(\omega t - kx)} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \underline{p}_1(x, t).$$

Avec la relation de dispersion  $\omega = kc$ , on en déduit

$$\underline{v}(x, t) = \frac{p(x, t)}{Z} \quad \text{avec} \quad Z = \mu_0 c.$$

La constante  $Z$  est appelée l'**impédance acoustique**.

Dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, on obtient par un calcul similaire

$$\underline{v}(x, t) = -\frac{p(x, t)}{Z}.$$

□ 8 — Interprétons physiquement chaque terme :

$\underline{a}_1 e^{i(\omega t - kx)}$  : onde progressive dans le goulot, dans le sens des  $x$  croissants ;

$\underline{a}_2 e^{i(\omega t + kx)}$  : onde progressive dans le goulot, dans le sens des  $x$  décroissants, due à la réflexion de l'onde précédente à l'interface goulot-bouteille ;

$\underline{A}_1 e^{i(\omega t - kx)}$  : onde progressive dans la bouteille, dans le sens des  $x$  croissants, due à la transmission de la première onde à l'interface goulot-bouteille ;

$\underline{A}_2 e^{i(\omega t + kx)}$  : onde progressive dans la bouteille, dans le sens des  $x$  décroissants, due à la réflexion de l'onde précédente sur le fond de la bouteille.

□ 9 — Compte tenu de la question 7, on peut écrire l'onde de vitesse :

$$\underline{v}_1(x, t) = \begin{cases} \frac{\underline{a}_1}{Z} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\underline{a}_2}{Z} e^{i(\omega t + kx)} & \text{pour } -\ell < x < 0 \\ \frac{\underline{A}_1}{Z} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\underline{A}_2}{Z} e^{i(\omega t + kx)} & \text{pour } 0 < x < L \end{cases}$$

□ 10 — En  $x = L$ , on a une paroi : la composante de la vitesse normale à la paroi est nulle, soit

$$\underline{v}_1(x = L, t) = 0 \quad \forall t.$$

En  $x = -\ell$ , on a un tuyau ouvert sur l'atmosphère qui impose la pression totale  $P_0$ . La surpression acoustique  $y$  est donc nulle, soit

$$\underline{p}_1(x = -\ell, t) = 0 \quad \forall t.$$

□ 11 — La condition sur la vitesse en  $x = L$  s'écrit

$$\frac{\underline{A}_1}{Z} e^{i(\omega t - kL)} - \frac{\underline{A}_2}{Z} e^{i(\omega t + kL)} = 0 \quad \forall t,$$

d'où

$$\underline{A}_1 e^{-ikL} - \underline{A}_2 e^{ikL} = 0.$$

La condition sur la pression en  $x = -\ell$  s'écrit

$$\underline{a}_1 e^{i(\omega t + k\ell)} + \underline{a}_2 e^{i(\omega t - k\ell)} = 0 \quad \forall t,$$

2. Relation de dispersion  $\omega_n = 2\pi f_n = k_n c$ .

d'où

$$\underline{a}_1 e^{ik\ell} + \underline{a}_2 e^{-ik\ell} = 0. \quad (5)$$

La continuité de la surpression en  $x = 0$  s'écrit

$$\underline{a}_1 e^{i\omega t} + \underline{a}_2 e^{i\omega t} = \underline{A}_1 e^{i\omega t} + \underline{A}_2 e^{i\omega t} \quad \forall t,$$

d'où

$$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2. \quad (6)$$

La continuité du débit volumique en  $x = 0$  s'écrit

$$\sigma \left( \frac{\underline{a}_1}{Z} e^{i\omega t} - \frac{\underline{a}_2}{Z} e^{i\omega t} \right) = S \left( \frac{\underline{A}_1}{Z} e^{i\omega t} - \frac{\underline{A}_2}{Z} e^{i\omega t} \right) \quad \forall t,$$

d'où

$$\sigma (\underline{a}_1 - \underline{a}_2) = S (\underline{A}_1 - \underline{A}_2). \quad (7)$$

□ 12 — De (4) on déduit

$$\underline{A}_2 = \underline{A}_1 e^{-2ikL}.$$

De (5) on déduit

$$\underline{a}_2 = -\underline{a}_1 e^{2ik\ell}.$$

La relation (6) s'écrit alors

$$\underline{a}_1 (1 - e^{2ik\ell}) = \underline{A}_1 (1 + e^{-2ikL}) \quad (8)$$

et la relation (7) s'écrit

$$\sigma \underline{a}_1 (1 + e^{2ik\ell}) = S \underline{A}_1 (1 - e^{-2ikL}). \quad (9)$$

Effectuons le rapport des équations (9) et (8) :

$$\sigma \frac{1 + e^{2ik\ell}}{1 - e^{2ik\ell}} = S \frac{1 - e^{-2ikL}}{1 + e^{-2ikL}}$$

soit

$$\sigma \frac{e^{-ik\ell} + e^{ik\ell}}{e^{ik\ell} - e^{-ik\ell}} = S \frac{e^{ikL} - e^{-ikL}}{e^{ikL} + e^{-ikL}}.$$

Comme

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

on obtient

$$\sigma \frac{\cos(k\ell)}{\sin(k\ell)} = S \frac{\sin(kL)}{\cos(kL)}.$$

On adonc

$$\tan(kL) = \alpha \cotan(k\ell) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\sigma}{S}. \quad (10)$$

□ 13 — Le cas  $\sigma = 0$  (bouteille fermée sans boulot) donne  $\tan(kL) = 0$ , soit  $k_n L = n\pi$ . On retrouve les fréquences propres<sup>2</sup> d'un tuyau fermé à ses deux extrémités

$$f_n = n \frac{c}{2L}.$$

Le cas  $\sigma = S$  et  $\ell = 0$  donne

$$\cotan(kL) = \tan(k\ell) = 0$$

soit  $k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$ . On retrouve les fréquences propres d'un tuyau fermé à une extrémité et ouvert à l'autre :

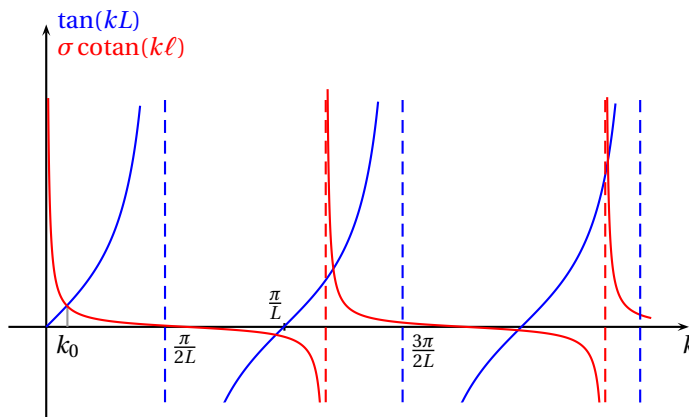
$$f_n = n \frac{c}{2L} + \frac{c}{4L} = \frac{c}{4L} (2n + 1),$$

en particulier le fondamental est de fréquence moitié du cas précédent (son une octave plus bas), et on n'observe que les harmoniques de rang impairs.

□ 14 — Dans le cas général, on mène une étude graphique en cherchant l'intersection des graphes de

$$f(x) = \tan(xL) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sigma}{S} \cotan(x\ell).$$

On représente  $f$  en bleu et  $g$  en rouge.



Les valeurs de  $k$  possibles sont données par les intersections des deux courbes.

Le mode de plus basse fréquence est donné par  $k_0 < \frac{\pi}{2L}$

□ 15 — On se place dans le cas où  $\ell \ll \lambda$  et  $L \ll \lambda$ . Comme  $k = 2\pi/\lambda$ , cela revient à  $kL \ll 1$  et  $k\ell \ll 1$ . La relation

$$\tan(kL) = \frac{\sigma}{S \tan(k\ell)}$$

peut donc s'écrire, en linéarisant les tangentes

$$kL = \frac{\sigma}{S k \ell}.$$

On trouve alors la pulsation du mode de plus basse fréquence, donnée par

$$k_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{S L \ell}}.$$

La fréquence correspondante est

$$f_0 = \frac{k_0 c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{S L \ell}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{\ell V}}.$$

On retrouve le mode de vibration étudié dans la première partie, en considérant le mouvement « en bloc » de l'air contenu dans le goulot : si la longueur d'onde

est très grande devant les dimensions caractéristiques du système, il est en effet justifier de considérer que la surpression et la vitesse sont uniformes dans le goulot. Les autres valeurs de  $k$  possibles n'entrent pas dans le cadre de cette hypothèse.

Avec les valeurs numériques proposées, on calcule

$$f_0 = 152 \text{ Hz},$$

en accord avec la valeur expérimentale mesurée.

La longueur d'onde correspondante dans l'air est

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = 2,25 \text{ m}.$$

L'hypothèse  $\lambda \gg L$  et  $\lambda \gg \ell$  est largement vérifiée, ce qui est conforté par le bon accord entre valeur expérimentale et valeur théorique de la fréquence.

### 3 — Une expérience

□ 16 — En prenant le modèle de la première partie, le mouvement de l'air dans le goulot est décrit par un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ . Lorsqu'on l'excite avec une pulsation  $\omega$ , on observe un régime forcé à cette même pulsation, dont l'amplitude  $\underline{X}$  du déplacement est donnée par

$$-\omega^2 \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \omega_0^2 \underline{E}$$

où  $\underline{E}$  est proportionnelle à l'amplitude de l'excitation.

L'amplitude des oscillations est alors

$$|\underline{X}| = \frac{\omega_0^2}{|\omega^2 - \omega_0^2|} |\underline{E}|.$$

Pour  $\omega = \omega_0$ , on obtient une résonance caractérisée par

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |\underline{X}| = \infty.$$

On observe expérimentalement un phénomène de résonance, mais l'amplitude reste finie.

Le modèle précédent ne permet donc pas d'expliquer complètement la courbe expérimentale.

Une amélioration possible, et usuellement adoptée, consiste à prendre un compte un amortissement décrit par un terme linéaire, conduisant à l'équation de l'oscillateur linéaire amorti :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0 E \cos(\omega t),$$

où  $Q$  est le facteur de qualité correspondant.

La réponse est alors caractérisée par une fonction de transfert de la forme

$$\underline{H} = \frac{\underline{X}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On obtient une amplitude  $X = X_{\max} / \sqrt{2}$  pour deux fréquences distantes de  $\Delta f \approx 90 \text{ Hz}$ .

Le facteur de qualité est donné par  $Q = \frac{f_r}{\Delta f}$ , d'où  $Q = 4$

□ 17 — L'air du goulot, en vibrant, se comporte comme un émetteur d'onde sonore (on peut considérer la surface supérieure de cette masse d'air comme la *membrane* d'un haut-parleur).

Le micro reçoit alors la superposition de deux ondes :

- l'onde émise par le haut-parleur, d'amplitude complexe  $\underline{E}$ ;
- l'onde émise par les vibrations de la masse d'air du goulot, dont l'amplitude est proportionnelle au déplacement de l'air dans le goulot, soit

$$\underline{E}' = \alpha \underline{X} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \alpha \underline{E}.$$

L'onde totale captée par le microphone extérieur à la bouteille a donc pour amplitude  $\alpha \underline{X} + \underline{E}$ .

La réponse  $\underline{X}$  de la bouteille présente un retard de phase par rapport à l'excitation  $\underline{E}$ , donné par

$$\tan \varphi = \arg(\underline{H}) = -\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

Sans se lancer dans l'étude complexe, on a  $\varphi \approx 0$  pour  $\omega \rightarrow 0$ , et  $\varphi \approx -\pi$  pour  $\omega \rightarrow \infty$ . Pour  $\omega = \omega_0$ , on a  $\varphi = -\pi/2$ .

Après la résonance, on observe donc des interférences destructives, qui entraîne l'atténuation du signal observée dans la seconde expérience. Le minimum correspond à un compromis entre le retard de phase du signal qui augmente, et son amplitude qui diminue.

Quand  $\omega \rightarrow \infty$ , on observe  $H \approx 1$  car il reste le signal émis par le haut-parleur (on a en effet  $|\underline{E}'| \rightarrow 0$ ).

### Partie III — Matériau piézoélectrique (Centrale PSI 2023)

□ 1 — Le rapport  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  est sans dimension, donc  $K$  est homogène à une force divisée par une surface, c'est-à-dire une pression.

**La constante  $K$  est homogène à une pression et s'exprime en Pa.**

Si l'on souhaite écrire l'équation aux dimensions, on a

$$\text{MLT}^{-2} = \text{L}^2 [K]$$

d'où

$$[K] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}.$$

Le matériau en deçà de  $x + dx + \xi(x + dx, t)$  (partie hachurée) exerce sur la partie à droite la force

$$\vec{F}_-(x + dx, t) = -SK \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) \vec{u}_x.$$

Selon le principe des actions réciproques, la force exercée sur le système par la partie du matériau située au-delà de  $x + dx$  vaut

$$\vec{F}_+(x + dx, t) = SK \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) \vec{u}_x.$$

La force résultante sur le système vaut alors

$$\begin{aligned} d\vec{F}_r &= \vec{F}_+(x + dx, t) + \vec{F}_-(x, t) \\ &= SK \left( \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right) \vec{u}_x \end{aligned}$$

soit en linéarisant

$$d\vec{F}_r = SK \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x.$$

□ 2 — Écrivons le principe fondamental de la dynamique au système de masse  $dm = \rho S dx$  :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) \vec{u}_x = SK \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x,$$

soit

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

On en déduit l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

Cette équation s'appelle l'**équation de d'Alembert**.

□ 3 — La condition en  $x = 0$  s'écrit

$$\xi_p(0, t) = \xi_0 \exp(j\omega t)$$

soit

$$\underline{A} \exp(j\omega t) + \underline{B} \exp(j\omega t) = \xi_0 \exp(j\omega t)$$

d'où

$$\underline{A} + \underline{B} = \xi_0. \quad (11)$$

L'extrémité en  $x = L$  étant libre, est ne subit aucune force, soit

$$\vec{F}_-(L, t) = -SK \frac{\partial \xi_p}{\partial x}(L, t) \vec{u}_x = \vec{0}.$$

On a donc

$$\frac{\partial \xi_p}{\partial x}(L, t) = -jk \underline{A} \exp(j(\omega t - kL)) + jk \underline{B} \exp(j(\omega t + kL)) = 0$$

soit

$$-\underline{A} \exp(-jkL) + \underline{B} \exp(jkL) = 0. \quad (12)$$



On a donc

$$\underline{B} = \underline{A} = \exp(-2jkL)$$

et l'équation (11) s'écrit

$$\underline{A}(1 + \exp(-2jkL)) = \xi_0.$$

On en déduit

$$\underline{A} = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)}$$

et

$$\underline{B} = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)} \exp(-2jkL).$$

L'amplitude complexe s'écrit alors

$$\begin{aligned} \xi_{-p}(x, t) &= \frac{\xi_0 \exp(j\omega t)}{1 + e^{-2jkL}} [\exp(-jkx) + \exp(-2jkL) \exp(jkx)] \\ &= \frac{\xi_0 \exp(j\omega t)}{1 + e^{-2jkL}} [\exp(-jkx) + \exp(jk(x - 2L))] \end{aligned}$$

soit

$$\xi_{-p}(x, t) = \frac{\xi_0}{\underline{D}} \exp(j\omega t) [\exp(-jkx) + \exp(-jk(2L - x))]$$

avec

$$\underline{D} = 1 + e^{-2jkL}.$$

En  $x = L$ , l'onde « incidente » est donnée par

$$\xi_{-p,i}(L, t) = \frac{\xi_0}{\underline{D}} \exp(-jkL)$$

et l'onde réfléchie par

$$\xi_{-p,r}(L, t) = \frac{\xi_0}{\underline{D}} \exp(-jk2L - L) = \frac{\xi_0}{\underline{D}} \exp(-jkL).$$

On a donc  $\xi_{-p,r}(L, t) = \xi_{-p,i}(L, t)$  : les deux ondes sont égales en  $x = L$ ; la réflexion se fait sans déphasage, soit

$$\Delta\varphi = 0.$$

□ 4 — L'amplitude  $\frac{\xi_0}{\underline{D}}$  de l'onde diverge si  $\underline{D} = 0$ ; on observe alors une résonance.

La condition de résonance est donc

$$\underline{D} = 1 + e^{-2jkL} = 0,$$

soit

$$e^{-2jkL} = -1.$$

Elle est vérifiée si

$$2knL = \pi + 2n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbf{N},$$

soit

$$k_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2L}.$$

La relation de dispersion  $\omega = kc$  (l'onde plane harmonique est solution de l'équation de d'Alembert) permet d'en déduire les fréquences

$$f_n = \frac{k_n c}{2\pi}$$

soit

$$f_n = (2n + 1) \frac{c}{4L} \quad \text{avec } n \in \mathbf{N}.$$

La fréquence minimale est

$$f_0 = \frac{c}{4L} = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

On calcule

$$f_0 = \frac{1}{4 \times 0,02} \times \sqrt{\frac{2 \times 10^{11}}{7,8 \times 10^3}}$$

soit

$$f_0 = 63,3 \text{ kHz}.$$

L'amplitude devenant très importante à la résonance (infinie dans le cadre de notre modèle simplifié), on peut aller jusqu'à la rupture du barreau dans le cas d'un matériau solide.

□ 5 — On écrit le principe fondamental de la dynamique à la tranche  $dx$  en ajoutant la force de frottement :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) \vec{u}_x = SK \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) \rho S dx \vec{u}_x$$

soit

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0.$$

On obtient l'équation d'onde

$$c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

□ 6 — En cherchant une solution sous la forme

$$\underline{\xi}(x, t) = \underline{X}_0 \exp(j(\omega t - kx)),$$

on obtient après simplification par  $\underline{\xi}$ ,

$$-k^2 c^2 = -\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau},$$

d'où la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{j\omega}{\tau c^2}.$$

En développant avec  $\underline{k} = k' - jk''$ , on obtient

$$k'^2 - k''^2 - 2jk'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{j\omega}{\tau c^2}.$$

L'identification des parties imaginaires conduit à

$$-2k'k'' = -\frac{\omega}{\tau c^2}.$$

En notant que  $k' \approx \frac{\omega}{c}$ , on obtient

$$k'' = \frac{1}{2\tau c}.$$

On peut retrouver l'expression de  $k'$  en identifiant les parties réelles :

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

soit comme  $k'' \ll k'$

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

□ 7 — Avec la relation

$$k' = \frac{\omega}{c}$$

on obtient la vitesse de phase

$$v_\varphi = c.$$

Le phénomène n'est pas dispersif. Les fréquences de résonance étant obtenue à partir de  $k'$ , elles ne sont pas modifiées.

Le terme  $k''$  traduit une dissipation lors de la propagation. Pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants, on a

$$\underline{\xi}(x, t) = \underline{\xi}_0 \exp(-k''x) \exp(j(\omega t - k'x)).$$

Cette dissipation d'énergie conduit à une amplitude finie aux fréquences de résonances.

## Partie IV — Accumulateur au plomb (CCINP PSI 2019)

### 1 — Composition de l'atome de plomb

□ 1 — Le noyau de l'atome de plomb contient 82 protons et 125 neutrons.

### 2 — Diagramme potentiel-pH du plomb

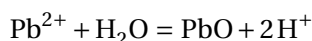
□ 2 — Nombre d'oxydation du plomb :

espèce	n.o. du plomb	type de domaine
Pb(s)	0	existence
Pb <sup>2+</sup> (aq)	II	prédominance
PbO(s)	II	existence
HPbO <sub>2</sub> <sup>-</sup> (aq)	II	prédominance
Pb <sub>3</sub> O <sub>4</sub> (s)	8/3	existence
PbO <sub>2</sub> (s)	IV	existence

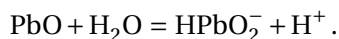
On place les espèces dans le diagramme de telle sorte que le nombre d'oxydation croît avec  $E$ .

Les espèces les plus basiques apparaissent aux pH les plus élevés.

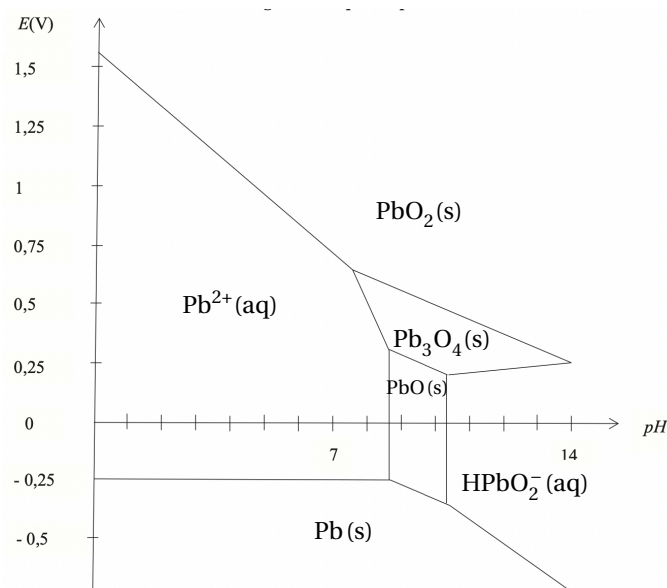
On peut remarquer que



et

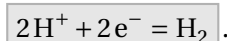


Donc Pb<sup>2+</sup> est la forme acide associée à la forme basique PbO, et PbO est la forme acide associée à la forme basique HPbO<sub>2</sub><sup>-</sup>.



L'espèce Pb<sub>3</sub>O<sub>4</sub>(s) semble ne pas respecter la quantification de la charge (nombre d'oxydation fractionnaire, alors que la charge doit être un multiple de la charge élémentaire). Cela s'explique par le fait que le plomb existe dans deux degrés d'oxydation différents dans cette espèce (deux atomes au degré +II et un atome au degré +IV) : il s'agit d'un composé à valence mixte. Finalement, la quantification de la charge est bien respectée.

□ 3 — Pour le couple H<sup>+</sup>/H<sub>2</sub> (équivalent à H<sub>2</sub>O/H<sub>2</sub>) :



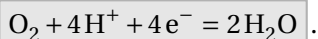
La loi de Nernst s'écrit :

$$E = E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{P^\circ[\text{H}^+]^2}{P(\text{H}_2)}\right).$$

Avec  $P(\text{H}_2) = P^\circ$  à la frontière, on obtient l'équation

$$E = -0,06\text{pH}.$$

Pour le couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  :



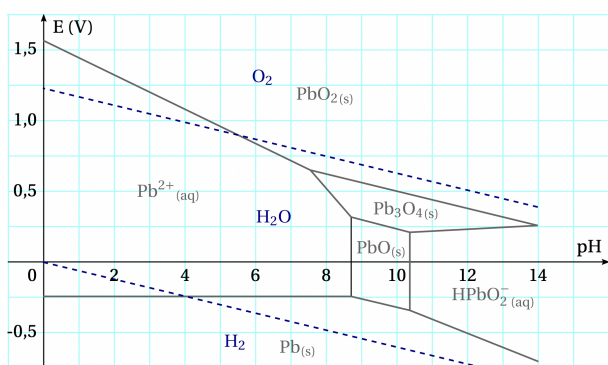
La loi de Nernst s'écrit :

$$E = E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) + \frac{0,06}{4} + \log\left(\frac{P(\text{O}_2)}{P^\circ} [\text{H}^+]^4\right).$$

Avec  $P(\text{O}_2) = P^\circ$  à la frontière, on obtient l'équation

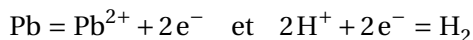
$$E = 1,23 - 0,06\text{pH}.$$

□ 4 — On superpose le diagramme  $E$ -pH de l'eau au diagramme  $E$ -pH du plomb :

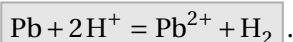


En milieu acide, les domaines de Pb et de  $\text{H}_2\text{O}$  sont disjoints : **le plomb n'est pas stable en milieu acide.**

À partir des demi-équations



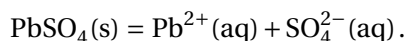
on en déduit la réaction d'oxydation du plomb dans l'eau en milieu acide



En milieu basique, le plomb a une partie de son domaine en commun avec celui de l'eau : **le plomb est stable en milieu basique.**

### 3 — Solubilité du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique

□ 5 — La réaction de dissolution du sulfate de plomb s'écrit



Sa constante d'équilibre est le produit de solubilité du sulfate de plomb, soit

$$K_s = [\text{Pb}^{2+}]_{\text{éq}}[\text{SO}_4^{2-}]_{\text{éq}} = 1,6 \times 10^{-8}.$$

La solubilité  $s$  du sulfate de plomb est la quantité maximum de sulfate de plomb que l'on peut dissoudre dans un litre de la solution considérée.

On se place à l'équilibre, à la limite de la dissolution du sulfate de plomb : on a dissous  $s$  moles de  $\text{PbSO}_4$ , mais l'équilibre est encore réalisé avec  $[\text{Pb}^{2+}]_{\text{éq}} = s$ , ce qui permet d'écrire

$$K_s = s[\text{SO}_4^{2-}]_{\text{éq}}.$$

La concentration  $[\text{SO}_4^{2-}]$  étant élevée dans la solution considérée ( $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ), et la constante  $K_s$  étant très faible, on peut négliger les  $\text{SO}_4^{2-}$  apportés par la dissolution de  $\text{PbSO}_4$ , ce qui permet d'écrire  $[\text{SO}_4^{2-}] = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

On a donc

$$s = \frac{K_s}{[\text{SO}_4^{2-}]} = \frac{1,6 \times 10^{-8}}{0,5}$$

soit  $s = 3,2 \times 10^{-8} \text{ mol}$ .

Il était légitime de négliger les ions sulfates issus de la dissolution devant ceux initialement présents.

**Le sulfate de plomb est très peu soluble dans une solution d'acide sulfurique concentrée.**

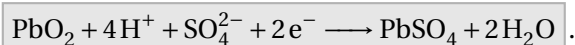
### 4 — Accumulateur au plomb en fonctionnement générateur

□ 6 — Couple  $\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4$ .

Dans  $\text{PbO}_2$ , on a  $\text{no}(\text{Pb}) = \text{IV}$ .

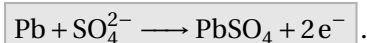
Dans  $\text{PbSO}_4$ , on a  $\text{no}(\text{Pb}) = \text{II}$ .

On peut écrire la demi-réaction électronique :



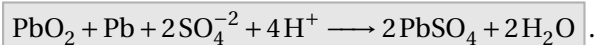
C'est une **réduction** : le compartiment de gauche est la **cathode**.

Couple  $\text{PbSO}_4/\text{Pb}$  :



C'est une **oxydation** : le compartiment de droite est l'**anode**.

La réaction globale de fonctionnement de l'accumulateur est donc



□ 7 — Le potentiel de la borne  $\oplus$  est

$$E_{\oplus} = E^\circ(\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4) + \frac{0,06}{2} \log\left([\text{H}^+]^4 [\text{SO}_4^{2-}]\right).$$

Le potentiel de la borne  $\ominus$  est

$$E_{\ominus} = E^\circ(\text{PbSO}_4/\text{Pb}) + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{1}{[\text{SO}_4^{2-}]}\right).$$

La fém  $e = E_{\oplus} - E_{\ominus}$  de l'accumulateur est donc

$$e = E^\circ(\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4) - E^\circ(\text{PbSO}_4/\text{Pb}) + 0,06 \log[\text{SO}_4^{2-}] - 0,12\text{pH}.$$

**La fém de l'accumulateur au plomb dépend du pH.**

Elle est d'autant plus élevée que le pH est faible : **il est préférable d'utiliser de l'acide sulfurique très concentré.**

## 5 — Masse d'une batterie au plomb

□ 8 — La mise en série de plusieurs éléments permet de délivrer une **tension plus élevée**.

La mise en parallèle de plusieurs éléments permet de délivrer une plus grande intensité : **on augmente la capacité**.

□ 9 — La tension à vide d'un élément est

$$U_0 = 1,68 - (-0,33) = 2,01 \text{ V}.$$

Il faut donc 6 cellules en série pour obtenir 12 V à vide.

Compte tenu de la baisse de tension lorsque l'accumulateur débite, il faut prévoir **7 cellules** pour maintenir une tension supérieure à 12 V en fonctionnement.

□ 10 — En notant  $n(e^-)$  le nombre total (en moles) d'électrons échangés, la capacité s'écrit

$$Q = n(e^-)F.$$

La quantité de plomb consommée, compte tenu de la stoechiométrie de la demi-réaction d'oxydation, est  $n(\text{Pb}) = \frac{n(e^-)}{2}$ . La masse de plomb correspondante est  $m(\text{Pb}) = n(\text{Pb})M(\text{Pb})$ . On a donc

$$Q = 2n(\text{Pb})F = 2 \frac{m(\text{Pb})}{M(\text{Pb})} F$$

d'où

$$m(\text{Pb}) = \frac{QM(\text{Pb})}{2F}.$$

On calcule

$$m(\text{Pb}) = \frac{50 \times 3600 \times 207}{2 \times 96500}$$

soit pour l'accumulateur

$$m(\text{Pb}) = 0,19 \text{ kg}.$$