TD d'électromagnétisme nº 1 — Introduction à l'électrostatique

1 — Calculs de charge

1. Distribution sphérique
On considère une sphère de rayon a, de centre O, portant la densité volumique de charge uniforme ρ_0. Calculer la charge contenue dans une sphère de rayon r, en distinguant les cas $r \geqslant a$ et $r < a$.

2. Distribution cylindrique
On considère un cylindre de rayon a, d'axe Oz, de longueur infinie, portant la densité volumique de charges données en coordonnées cylindriques d'axe Oz par

$$\rho(M) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right).$$

Calculer la charge contenue dans un cylindre d'axe Oz, de hauteur H et de rayon r, en distinguant les cas $r \geqslant a$ et $r < a$.

2 — Espace chargé

La densité volumique de charges

$$\rho(M) = \frac{K}{4\pi a^2 r}\,\mathrm{e}^{-r/a},$$

où K et a sont deux constantes et $r = OM$, est répartie dans tout l'espace.

1. Quelles sont les dimensions des constantes K et a?

2. Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace.

3 — Doublet

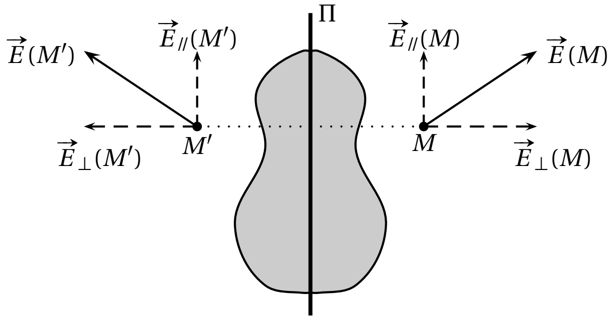
On considère un doublet constitué de deux charges opposées : $q > 0$ située en $P(a > 0, 0, 0)$ et $-q$ située en $N(-a, 0, 0)$ en coordonnées cartésiennes.
Étudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges.

4 — Champ électrique et symétrie

Si Π est un plan de symétrie d'une distribution de charges source d'un champ $\vec{E}$, on rappelle les propriétés de symétrie du champ électrique :

$$\begin{cases} \vec{E}_{/\!/}(M') = \vec{E}_{/\!/}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M) \end{cases}$$

où $\vec{E}_{/\!/}(M)$ est la composante du champ parallèle au plan Π et $\vec{E}_{\perp}(M)$ la composante normale à ce plan.



1. Que peut-on dire du champ $\vec{E}$ en tout point d'un plan de symétrie ?

2. Distribution à symétrie sphérique

On considère une sphère de centre O, de rayon a, portant la densité volumique de charges ρ_0 uniforme.

En coordonnées sphériques, le champ électrique créé s'écrit *a priori*

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi.$$

2.a) En examinant les invariances de la distribution, conclure quant à la dépendance de ses composantes vis-à-vis des coordonnées spatiales.

2.b) En examinant les symétries de la distribution, conclure quant à la direction du champ $\vec{E}(M)$.
Quelle forme simplifiée prend alors le champ électrique ?

3. Distribution à symétrie cylindrique

On considère un cylindre de longueur infinie, d'axe centre Oz, de rayon a, portant la densité volumique de charges ρ_0 uniforme.

En coordonnées cylindriques d'axe Oz, le champ électrique créé s'écrit *a priori*

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,z)\,\vec{e}_z.$$

3.a) En examinant les invariances de la distribution, conclure quant à la dépendance de ses composantes vis-à-vis des coordonnées spatiales.

3.b) En examinant les symétries de la distribution, conclure quant à la direction du champ $\vec{E}(M)$.
Quelle forme simplifiée prend alors le champ électrique ?

4. Plan infini chargé

On considère le plan infini $z = 0$, portant la densité surfacique de charge σ_0 uniforme.

On se place en coordonnées cartésiennes.

4.a) Déterminer les invariances et les symétriques de cette distribution.

4.b) Le champ électrique créé s'écrit *a priori*

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\,\vec{e}_x + E_y(x,y,z)\,\vec{e}_y + E_z(x,y,z)\,\vec{e}_z.$$

Simplifier son expression à l'aide des propriétés de symétrie et d'invariance.
Étudier la parité de sa composante non nulle.