

Mathématiques et physique

Les opérateurs vectoriels

1 — L'opérateur gradient

Soit un champ scalaire $G(M, t)$. Sa variation dG entraînée par un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_M$ de M est, par définition de l'opérateur gradient :

$$dG = \overrightarrow{\text{grad}} G(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M$$

- Mathématiquement : la différentielle d'un champ scalaire est égale à la circulation élémentaire de son gradient.
- Physiquement : la variation d'un champ scalaire lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ est égal à la circulation élémentaire de son gradient sur ce déplacement $d\vec{\ell}$.
- L'opérateur gradient s'applique à un champ scalaire, qu'il transforme en un champ vectoriel :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} : \quad \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ G(M, t) &\longmapsto \overrightarrow{\text{grad}} G(M, t) \end{aligned}$$

- L'opérateur gradient est linéaire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \overrightarrow{\text{grad}}(\lambda G_1 + \mu G_2) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} G_1 + \mu \overrightarrow{\text{grad}} G_2$.

Le gradient d'un champ scalaire $G(M, t)$ est un champ vectoriel qui renseigne sur les variations spatiales de $G(M, t)$.

L'ensemble des points tels que $G(M, t_0) = G_0$ à un instant donné est une surface (surface « iso- G »). En tout point d'une telle surface, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} G(M, t)$ est normal à cette surface, et dirigé dans le sens des G croissants.

Démonstration : Soient M et M' deux points sur la surface $G(M) = G_0$, avec $\overrightarrow{MM'} = d\vec{\ell}_M$ élémentaire. Par définition du gradient, $\overrightarrow{\text{grad}} G \cdot d\vec{\ell}_M = dG$; or $dG = G(M') - G(M) = 0$ car par hypothèse $G(M) = G(M') = G_0$. On a donc $\overrightarrow{\text{grad}} G \cdot d\vec{\ell}_M = 0$, et $\overrightarrow{\text{grad}} G \perp d\vec{\ell}_M$. Comme $d\vec{\ell}_M$ est tangent à la surface iso- G par construction, $\overrightarrow{\text{grad}} G$ est normal à cette surface. Considérons un déplacement du point M vers un point M'' selon $d\vec{\ell}$ normal à la surface iso- G , dans le sens de $\overrightarrow{\text{grad}} G$. La variation du champ scalaire vaut $G(M'') - G(M) = dG = \overrightarrow{\text{grad}} G \cdot d\vec{\ell}$. Comme $\overrightarrow{\text{grad}} G$ est normal à la surface iso- G , il est colinéaire à $d\vec{\ell}$; on a supposé $d\vec{\ell}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} G$ de même sens, d'où $\overrightarrow{\text{grad}} G \cdot d\vec{\ell} > 0$. On a donc $dG > 0$: le champ G augmente donc quand on se déplace dans le sens de $\overrightarrow{\text{grad}} G$.

Un champ de gradient est à circulation conservative :

$$\oint_{M \in \Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} G(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = 0; \quad \forall \Gamma.$$

Démonstration : par définition du gradient $\oint \overrightarrow{\text{grad}} G \cdot d\vec{\ell} = \oint dG = G(A) - G(A) = 0$, le point de départ étant égal au point d'arrivée si l'on circule sur un contour qui est une courbe fermée.

- La circulation d'un champ de gradient entre deux points A et B est donc indépendant du chemin suivi.

Tout champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ à circulation conservative est un champ de gradient :

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = 0; \forall \Gamma \iff \exists G(M, t), \vec{A}(M, t) = \overrightarrow{\text{grad}} G(M, t)$$

- La circulation d'un champ de force représente le travail de la force sur le chemin considéré. Le résultat précédent est vu en mécanique sous la forme : **une force conservative dérive d'une énergie potentielle.**

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi, c'est-à-dire si $\oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$. Il existe donc un champ scalaire¹ E_p tel que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$.

1. Le signe $-$ est choisi pour l'interprétation énergétique de ce champ scalaire.

2 — L'opérateur divergence

Soit un champ scalaire $\vec{A}(M, t)$. Son flux sortant $\delta\Phi$ à travers la surface délimitant le volume élémentaire $d\tau_M$ entourant le point M est, par définition de l'opérateur divergence :

$$\delta\Phi(t) = \text{div } \vec{A}(M, t) d\tau_M$$

- La surface délimitant un volume $d\tau_M$ étant par construction une surface fermée, le flux est pris positif s'il est sortant par convention.
- L'opérateur divergence s'applique à un champ vectoriel, qu'il transforme en un champ scalaire :

$$\text{div} : \begin{matrix} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ \vec{A}(M, t) & \longmapsto & \text{div } \vec{A}(M, t) \end{matrix}$$

- L'opérateur divergence est linéaire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \text{div}(\lambda \vec{A}_1 + \mu \vec{A}_2) = \lambda \text{div } \vec{A}_1 + \mu \text{div } \vec{A}_2$.

La divergence d'un champ vectoriel \vec{A} est un champ scalaire qui renseigne sur le caractère localement divergent du champ \vec{A} ; étant donné un petit volume $d\tau$ au voisinage d'un point M :

- si $\text{div } \vec{A}(M) > 0$, le champ, globalement, « sort » du volume $d\tau$;
- si $\text{div } \vec{A}(M) < 0$, le champ, globalement, « rentre » dans le volume $d\tau$;
- si $\text{div } \vec{A}(M) = 0$, le champ, globalement, ne rentre ni ne sort de $d\tau$.

Théorème d'Ostrogradski

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ défini en tout point d'un volume \mathcal{V} délimité par une surface Σ :

$$\iint_{P \in \Sigma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div } \vec{A}(M, t) d\tau_M.$$

- S'il existe un point de singularité (où le champ n'est pas défini) à l'intérieur du volume \mathcal{V} , le théorème d'Ostrogradski ne s'applique pas.
- Ce théorème est aussi appelé théorème de Green-Ostrogradski, ou théorème de flux-divergence.
- On peut l'envisager comme une extension « à grande échelle » de la définition locale de l'opérateur divergence.

Une conséquence de ce théorème est :

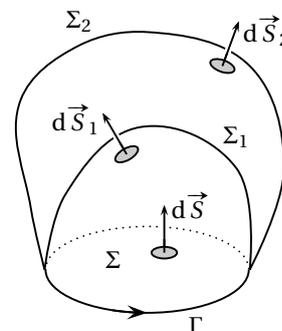
Tout champ à divergence identiquement nulle est à flux conservatif, et réciproquement :

$$\iint_{P \in \Sigma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = 0, \forall \Sigma \iff \text{div } \vec{A}(M, t) = 0 \forall M, \forall t.$$

Le flux d'un champ à flux conservatif à travers une surface s'appuyant sur un contour orienté ne dépend pas du choix de cette surface; on peut alors parler du **flux du champ à travers un contour**.

Démonstration : Considérons la surface fermée comprise entre Σ_1 et Σ_2 . On note les flux $\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1$ et $\Phi_2 = \iint_{\Sigma_2} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2$. Compte tenu de l'orientation des surfaces Σ_1 et Σ_2 , le flux sortant de la surface fermée est $\Phi = -\Phi_1 + \Phi_2$. Le champ étant conservatif, on a $\Phi = 0$, d'où $\Phi_1 = \Phi_2$.

Le flux de \vec{A} est donc identique à travers $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$, ou toute autre surface orientée s'appuyant sur le contour Γ .



- **Le flux d'un champ à flux conservatif est constant à travers toute section d'un tube de champ.** Le champ est donc plus intense lorsque les lignes de champ se resserrent.
- Le champ des vitesses d'un fluide en écoulement incompressible est à flux conservatif : $\text{div } \vec{v} = 0$, et le débit volumique est conservée à travers toute section d'un tube de courant.

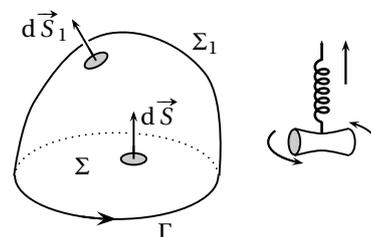
3 — L'opérateur rotationnel

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$. Sa circulation $\delta\mathcal{C}$ le long d'un contour élémentaire orienté $d\Gamma$ entourant le point M est, par définition de l'opérateur rotationnel :

$$\delta\mathcal{C}(t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$$

où $d\vec{S}_M$ est une surface élémentaire orientée s'appuyant sur $d\Gamma$.

Un contour Γ est une courbe fermée orientée. On l'oriente *arbitrairement* en lui associant un sens de parcours. L'orientation du contour définit l'orientation de toute surface Σ s'appuyant sur Γ selon la règle de Maxwell, appelée familièrement « règle du tire-bouchon » : un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens de l'orientation du contour avance dans le sens de l'orientation de la surface.



► L'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel, qu'il transforme en un champ vectoriel :

$$\begin{aligned} \text{rot} : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ \vec{A}(M, t) &\longmapsto \text{rot } \vec{A}(M, t) \end{aligned}$$

► L'opérateur rotationnel est linéaire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \text{rot}(\lambda \vec{A}_1 + \mu \vec{A}_2) = \lambda \text{rot } \vec{A}_1 + \mu \text{rot } \vec{A}_2$.

Le rotationnel d'un champ vectoriel \vec{A} est un champ vectoriel qui renseigne sur le caractère localement « tournant » autour de M .

Théorème de Stokes

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ défini en tout point d'une surface Σ s'appuyant sur un contour orienté Γ :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{M \in \Sigma} \text{rot } \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$$

- Ce résultats est vrai pour toute surface Σ s'appuyant sur Γ .
- Les orientations du contour Γ et de la surface Σ sont reliées par la règle de Maxwell.
- S'il existe un point où le champ n'est pas défini sur la surface Σ , le théorème de Stokes ne s'applique pas.

Une conséquence de ce théorème est :

Tout champ à rotationnel identiquement nul est à circulation conservative, et réciproquement :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = 0, \forall \Gamma \iff \text{rot } \vec{A}(M, t) = \vec{0} \forall M, \forall t.$$

Champ vectoriel à flux conservatif

La divergence d'un rotationnel est identiquement nulle : $\text{div}(\text{rot } \vec{A}(M, t)) = 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à flux conservatif est qu'il soit un champ de rotationnel :

$$\text{div } \vec{A}(M, t) = 0; \forall M \iff \exists \vec{R}(M, t), \vec{A}(M, t) = \text{rot } \vec{R}(M, t)$$

Champ vectoriel à circulation conservative

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul : $\text{rot}(\text{grad } G(M, t)) = \vec{0}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à circulation conservatif est qu'il soit un champ de gradient :

$$\text{rot } \vec{A}(M, t) = \vec{0} ; \forall M \iff \exists G(M, t), \vec{A}(M, t) = \overrightarrow{\text{grad}} G(M, t)$$

4 — L'opérateur laplacien

Laplacien scalaire

Soit un champ scalaire $G(M, t)$. Son laplacien est défini par

$$\Delta G(M, t) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} G(M, t))$$

- L'opérateur laplacien Δ s'applique à un champ scalaire, qu'il transforme en un champ scalaire.
- Cet opérateur est linéaire.
- Le laplacien mesure l'écart du champ scalaire en un point par rapport à sa valeur moyenne au voisinage de ce point.
- On retiendra son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

Laplacien vectoriel

Le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ est défini par

$$\Delta \vec{A}(M, t) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}(M, t)) - \text{rot}(\text{rot } \vec{A}(M, t))$$

- Cet opérateur est parfois noté $\vec{\Delta}$. Il s'applique à un champ vectoriel, qu'il transforme en un champ vectoriel.
- *En coordonnées cartésiennes uniquement*, en notant $\vec{A} = A_x(M, t)\vec{e}_x + A_y(M, t)\vec{e}_y + A_z(M, t)\vec{e}_z$, il s'exprime en fonction des laplaciens des coordonnées :

$$\Delta \vec{A}(M, t) = (\Delta A_x(M, t))\vec{e}_x + (\Delta A_y(M, t))\vec{e}_y + (\Delta A_z(M, t))\vec{e}_z$$

où $\Delta A_x(M, t) = \frac{\partial^2 A_x(M, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x(M, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x(M, t)}{\partial z^2}$, et de même pour les deux autres composantes.

5 — L'opérateur nabla

L'opérateur nabla, noté $\vec{\nabla}$, est appelé aussi *opérateur de dérivation spatiale*. Il permet d'exprimer les opérateurs vectoriels :

$$\overrightarrow{\text{grad}} G = \vec{\nabla} G ; \quad \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} ; \quad \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Expression de l'opérateur nabla dans les divers systèmes de coordonnées :

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

- L'opérateur laplacien s'écrit comme le carré scalaire de l'opérateur nabla : $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$.