

Fascicule d'exercices d'électromagnétisme n° 1

Électrostatique

~~~~ Théorème de Gauss ~~~~

1 — Distribution à symétrie cylindrique

Dans chacun des cas suivants, on représentera graphiquement l'évolution spatiale de la composante du champ électrique.

Fil infini

1. Le distribution est à symétrie sphérique : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Surface de Gauss : cylindre de rayon r , de hauteur H .
On a $Q_{\text{int}} = H\lambda_0$.

Théorème de Gauss :

$$2\pi r H E(r) = \frac{H\lambda_0}{\epsilon_0},$$

d'où

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

Cylindre infini

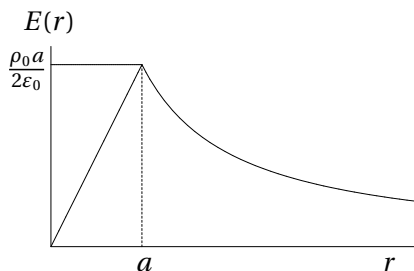
2. Symétrie cylindrique : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

Surface de Gauss : cylindre de rayon r , de hauteur H arbitraire.

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho_0 \pi r^2 H & \text{pour } r < a \\ \rho_0 \pi a^2 H & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

Flux : $2\pi r H E(r)$, d'où

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$



Une longueur H de cylindre porte la charge $Q = \rho_0 a^2 H$. On peut définir sa charge linéique¹ par $Q = \lambda_0 H$. L'expression du champ à l'extérieur du cylindre est alors donnée par

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

Le cylindre peut-être modélisé par une distribution linéique de charge dès que l'on est à l'extérieur du cylindre.

3. Les propriétés de symétrie et d'invariance sont les mêmes, seul change le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss.

Pour $r \geq a$, on a

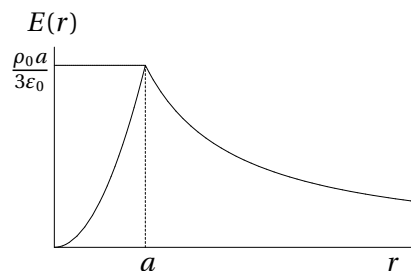
$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 2\pi r H dr = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0 H a^2}{3}.$$

Pour $r < a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 2\pi r' H dr' = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi\rho_0 H r^3}{3a}.$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0 a} \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$



4. Les propriétés de symétrie et d'invariance sont les mêmes, seul change le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss.

Si $r < a$, on a $Q_{\text{int}} = 0$.

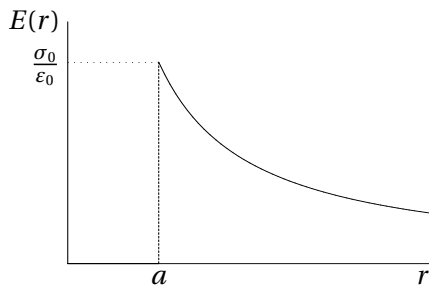
Si $r > a$, on a $Q_{\text{int}} = \sigma_0 2\pi a H$.

➤ On ne peut se mettre en $r = a$ (présence d'une charge surfacique).

1. La charge linéique est la charge par unité de longueur; on peut la définir même si la distribution n'est pas linéique, c'est-à-dire n'est pas concentrée sur un fil.

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < a \\ \frac{\sigma_0 a}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r > a. \end{cases}$$



On remarque que le champ est discontinu en $r = a$, la discontinuité valant

$$E(a^+) - E(a^-) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

2 — Distribution à symétrie sphérique

1. La distribution est à symétrie sphérique : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Surface de Gauss : sphère de rayon r . Le flux du champ vaut $4\pi r^2 E(r)$.

Pour $r \geq a$, on a

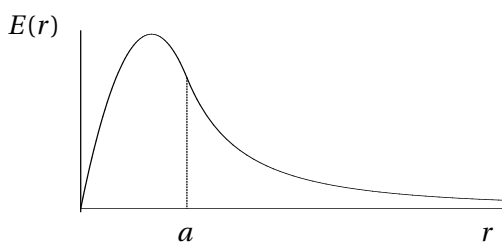
$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 4\pi r^2 dr = \frac{\pi \rho_0 a^3}{3}.$$

Pour $r < a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4a} \right).$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4a} \right) \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$



2. Les propriétés de symétrie et d'invariance sont les mêmes, seul change le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss.

Si $r < a$, on a $Q_{\text{int}} = 0$.

Si $r > a$, on a $Q_{\text{int}} = \sigma_0 4\pi a^2$.

On en déduit

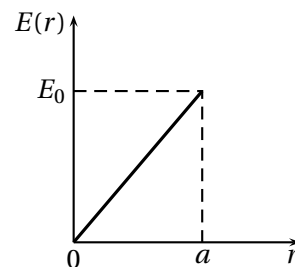
$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < a \\ \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > a. \end{cases}$$

On remarque que le champ est discontinu en $r = a$, la discontinuité valant

$$E(a^+) - E(a^-) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

3 — Champ créé par un cylindre chargé

On considère un cylindre infini de rayon a . On donne le graphe du champ électrique en un point M à une distance $r < a$ de l'axe du cylindre :



1. Le champ à l'intérieur d'un cylindre uniformément chargé en volume a été établi (exercice 1) :

$$E(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r.$$

Cette loi est fonction linéaire de r , compatible avec le graphe.

D'après le graphe on a

$$E(r) = E_0 \frac{r}{a}$$

d'où en identifiant

$$\rho_0 = \frac{2\epsilon_0 E_0}{a}.$$

On peut aussi utiliser l'équation de Maxwell-Gauss pour un champ radial de composante $E(r) = \frac{E_0}{a} r$:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d[rE(r)]}{dr} = \frac{2E_0}{a} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}.$$

2. En détermine le champ à l'extérieur avec le théorème de Gauss comme à l'exercice 1 :

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

soit

$$\vec{E} = E_0 \frac{a}{r} \vec{e}_r \text{ pour } r \geq a.$$

3. Le potentiel est donné par $E(r) = -\frac{dV}{dr}$, soit

$$\frac{dV}{dr} = \begin{cases} -E_0 \frac{r}{a} & \text{pour } r < a \\ -E_0 \frac{a}{r} & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

d'où

$$V(r) = \begin{cases} -E_0 \frac{r^2}{2a} + C_1 & \text{pour } r < a \\ -E_0 a \ln(r) + C_2 & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

On ne peut pas prendre le potentiel nul à l'infini car on ne peut considérer $r \rightarrow \infty$ pour un cylindre infini.

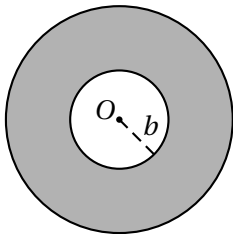
En choisissant $V(a) = V_0$, on obtient

$$V(r) = \begin{cases} \frac{E_0}{2a}(a^2 - r^2) & \text{pour } r < a \\ -E_0 a \ln\left(\frac{r}{a}\right) & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

En déduire $V(M)$ en tout point de l'espace. Représenter le graphe de $V(r)$.

4 — Champ dans une cavité sphérique

Le cas particulier où les deux centres O et O' sont confondus se traite facilement.



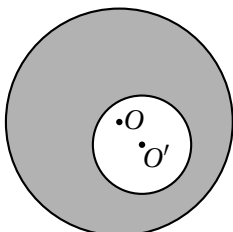
La distribution étant à symétrie sphérique, le champ est de la forme $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

Prenons comme surface de Gauss une sphère de centre O , de rayon $r < b$. Elle contient la charge $Q_{\text{int}} = 0$. Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$4\pi r^2 E(r) = 0$$

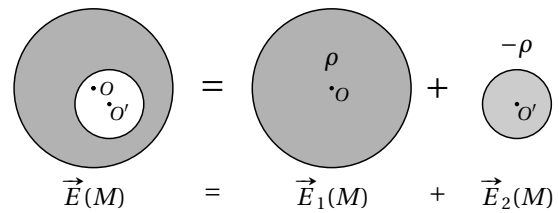
d'où $\vec{E}(M) = \vec{0}$. Le champ électrostatique est nul en tout point de la cavité.

Considérons le cas où les centres O et O' sont distincts.



Cette distribution n'est plus à symétrie sphérique; le théorème de Gauss n'est pas utilisable directement pour déterminer le champ électrostatique créé.

Le théorème de superposition permet de décomposer cette distribution en deux distributions à symétrie sphérique :



On se ramène donc au calcul du champ électrostatique créé à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée en volume.

La cavité étant l'intersection des deux sphères, il est inutile de calculer le champ à l'extérieur des sphères.

Calcul de $\vec{E}_1(M)$:

La distribution étant à symétrie sphérique, le champ est de la forme $\vec{E}_1(M) = E_1(r) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques de centre O . On prend comme surface de Gauss une sphère de centre O , de rayon $r < a$. On a alors $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$; le théorème de Gauss s'écrit :

$$4\pi r^2 E_1(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

d'où $E_1(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$. Le champ intérieur à la grande sphère s'écrit donc :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Le champ $\vec{E}_2(M)$ s'écrit sous une forme similaire, mais en faisant intervenir un autre système de coordonnées sphériques, de centre O' : $\vec{E}_2(M) = -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0} \vec{e}'_r$. Pour obtenir un résultat simple, il faut écrire les champs $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_2(M)$ sous une forme intrinsèque, sans faire intervenir les systèmes de coordonnées.

Le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = r \vec{e}_r$; le champ s'écrit donc :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}$$

Pour la seconde sphère, on a de même :

$$\vec{E}_2(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O'M}$$

Appliquons le théorème de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OM} - \vec{O'M})$$

soit

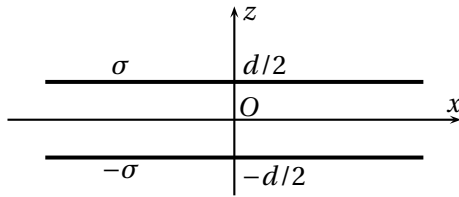
$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO'}$$

Le champ électrostatique est uniforme à l'intérieur de la cavité.

➤ On retrouve bien $\vec{E}(M) = \vec{0}$ dans le cas où O et O' sont confondus.

5 — Deux plans de charges opposées

Utilisons les coordonnées cartésiennes, l'axe Oz étant perpendiculaire aux deux plans de cotes $+\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$.



Pour tout point M de l'espace, les plans $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie, donc le champ n'a pas de composante selon \vec{e}_y et \vec{e}_x .

La distribution est invariante par translation selon Ox et Oy , donc les composantes du champ ne dépendent pas de x et de y .

Finalement, le champ est de la forme $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$.

Le plan Oxy est un plan d'antisymétrie de la distribution, donc $E(-z) = -E(z)$ (le champ se réduit à sa composante normale \vec{E}_\perp au plan d'antisymétrie).

La distribution peut s'écrire comme la superposition de deux distributions : le plan de cote $d/2$, de charge surfacique σ , qui crée le champ $\vec{E}_1(M)$, et le plan de cote $-d/2$, de charge surfacique $-\sigma$, qui crée le champ $\vec{E}_2(M)$. D'après le théorème de superposition, le champ créé par les deux plans est $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$.

On se ramène donc au calcul du champ créé par un plan infini, traité en cours :

$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > d/2 \\ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < d/2 \end{cases}$$

et

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > -d/2 \\ \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -d/2 \end{cases}$$

On a donc

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z > d/2 \\ -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } -d/2 < z < d/2 \\ \vec{0} & \text{pour } z < -d/2 \end{cases}$$

- La distribution possède *a priori* toutes les propriétés pour que l'on puisse utiliser le théorème de Gauss. On est tenté de choisir comme surface fermée un cylindre compris entre les cotes z et $-z$, mais on aura toujours $Q_{\text{int}} = 0$, et le flux de \vec{E} est nul; le théorème de Gauss conduit alors à la relation $0 = 0 \dots$ qui est vraie mais guère utile!

2. Se reporter à la couche infinie vue en cours.

6 — Nappe épaisse

1. Considérons un cylindre de section S , d'axe Ox (il « découpe une pièce cylindrique de section S et de longueur e de la distribution). Il porte la charge

$$Q = \rho Se + \sigma S.$$

Le système étant globalement neutre, on a $Q = 0$, d'où

$$\sigma = -\rho e.$$

2. Nous allons utiliser le principe de superposition, en écrivant qu'en tout point de l'espace le champ créé s'écrit

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{ép}}(M) + \vec{E}_{\text{fi}}(M),$$

où $\vec{E}_{\text{ép}}(M)$ est le champ créé par la nappe épaisse et $\vec{E}_{\text{fi}}(M)$ celui créé par la nappe fine.

Champ créé par la nappe épaisse

Une étude des symétries et invariances² mène à un champ de la forme

$$\vec{E}_{\text{ép}} = E_{\text{ép}}(x) \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad E_{\text{ép}}(-x) = -E_{\text{ép}}(x).$$

L'étude est menée pour $x \geq 0$.

On applique le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée un cylindre de section S , d'axe Ox , compris entre $-x$ et $+x$.

Le flux du champ est donné par

$$\Phi = 2SE_{\text{ép}}(x).$$

La charge intérieure est donnée par

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho eS & \text{pour } x \geq e/2 \\ \rho 2xS & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

L'application du théorème de Gauss conduit à

$$E_{\text{ép}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x \geq e/2 \\ \frac{\rho x}{\epsilon_0} & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

On étend l'expression à tout l'espace de façon à obtenir une fonction impaire :

$$E_{\text{ép}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x \geq e/2 \\ \frac{\rho x}{\epsilon_0} & \text{pour } -e/2 < x < e/2 \\ -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x \leq -e/2. \end{cases}$$

Champ créé par la nappe fine

Considérons la nappe située en $x = 0$; nous avons établi le champ $\vec{E}_{\text{fi}} = E_{\text{fi}}(x) \vec{e}_x$ créé en cours à l'aide du théorème de Gauss :

$$E_{\text{fi}}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Dans le cas d'une nappe située en $x = e/2$, on en déduit l'expression du champ créé :

$$E_{\text{fi}}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x > e/2 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

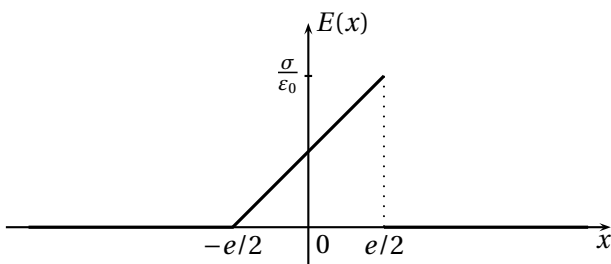
Compte tenu de la relation $\rho + \sigma e = 0$ traduisant la neutralité globale, on peut écrire

$$E_{\text{fi}}(x) = \begin{cases} -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x > e/2 \\ \frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

On en déduit l'expression du champ en tout point de l'espace par superposition :

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x > e/2 \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(x + \frac{e}{2}\right) \vec{e}_x & \text{pour } -e/2 < x < e/2 \\ \vec{0} & \text{pour } x < -e/2. \end{cases}$$

Représentons la composante du champ \vec{E} :



► On retrouve la discontinuité $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ du champ lors de la traversée de la nappe chargée en surface.

3. On a

$$dV = \vec{\text{grad}} V d\vec{\ell} = -E(x) dx,$$

d'où

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \int_B^A dV = - \int_{-e/2}^{e/2} E(x) dx,$$

soit

$$U_{AB} = \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(x + \frac{e}{2}\right) dx = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{ex}{2} \right]_{-e/2}^{e/2},$$

d'où

$$U_{AB} = \frac{\rho e^2}{2\epsilon_0}.$$

7 — Couche chargée

On se place en coordonnées cartésiennes.

Choisissons des coordonnées cartésiennes, le plan de la distribution étant défini par $z = 0$. Le champ s'écrit *a priori* en tout point de l'espace :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x + E_y(x, y, z) \vec{e}_y + E_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

La distribution étant invariante par toute translation selon Ox ou Oy , les composantes du champ électrostatique ne dépendent que de la variable z :

$$\vec{E}(M) = E_x(z) \vec{e}_x + E_y(z) \vec{e}_y + E_z(z) \vec{e}_z$$

Pour tout point M de l'espace, le plan $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc $E_y(M) = 0$. Le plan $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant un plan de symétrie de la distribution, $E_x(M) = 0$.

Finalement :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

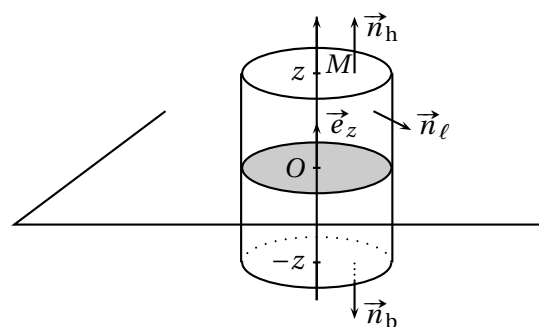
1. Le plan Oxy est un plan de symétrie de la distribution.

Soit $M(x, y, z)$, avec $z > 0$. Le symétrique de M par rapport au plan de symétrie Oxy est $M'(x, y, -z)$. Le champ se réduisant à sa composante normale à ce plan, il se transforme selon $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$, soit :

$$E(-z) = -E(z)$$

Compte tenu de la parité de $E(z)$, nous déterminons le champ pour $z > 0$.

Étant donné un point $M(z > 0)$, considérons la surface fermée constitué d'un cylindre d'axe Oz , de section S , compris entre les cotes $-z$ et z :



► La section du cylindre peut être de forme quelconque.

Le flux sortant du champ électrostatique à travers la surface supérieure, de vecteur surface élémentaire $d\vec{S} = dS\vec{n}_h = dS\vec{e}_z$, vaut :

$$\iint_{S_H} E(z) \vec{e}_z d\vec{S} = \iint_{S_H} E(z) dS = E(z) \iint_{S_H} dS = SE(z).$$

Le flux sortant du champ électrostatique à travers la surface inférieure, de vecteur surface élémentaire $d\vec{S} = -dS\vec{n}_b = -dS\vec{e}_z$, vaut :

$$\iint_{S_H} E(-z) \vec{e}_z d\vec{S} = - \iint_{S_H} E(-z) dS = -SE(-z) = SE(z)$$

compte tenu de $E(-z) = -E(z)$.

En tout point de la surface latérale de vecteur normal unitaire \vec{n}_ℓ , le champ électrostatique est normale à cette surface ; le flux latéral est donc nul.

Finalement :

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = 2SE(z)$$

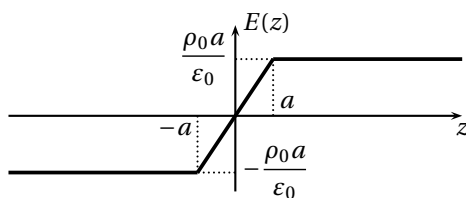
Pour le calcul de la charge intérieure, il faut envisager deux cas :

$0 < z < a$: on a $Q_{\text{int}} = 2zS\rho_0$, d'où $E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z$;

$z > a$: on a $Q_{\text{int}} = 2aS\rho_0$, d'où $E(z) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}$.

On étend l'expression du champ compte tenu du fait que $E(z)$ est fonction impaire de z :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z \leq a \\ -\frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a \end{cases}$$



2. Cette fois, le plan Oxy est un plan d'anti-symétrie de la distribution.

Soit $M(x, y, z)$, avec $z > 0$. Le symétrique de M par rapport au plan de symétrie Oxy est $M'(x, y, -z)$. Le champ se réduisant à sa composante normale à ce plan, il se transforme selon $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$, soit :

$$E(-z) = E(z).$$

Attention : l'utilisation directe du théorème de Gauss ne mène à rien ! En choisissant comme surface fermée

un cylindre de section S , compris entre les cotes $-z < 0$ et $z > 0$, le flux du champ électrique s'écrit

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) d\vec{S}_M = SE(z) - SE(-z) = 0.$$

On calcule $Q_{\text{int}} = 0$, et le théorème de Gauss conduit à $0 = 0$, relation certes exacte, mais qui ne nous avance pas beaucoup !

Il faut utiliser le principe de superposition, en décomposant la distribution en deux couches chargées :

— l'une de densité volumique ρ_0 , comprise entre $z = 0$ et $z = +a$, qui crée dans tout l'espace le champ $\vec{E}_1(M)$;

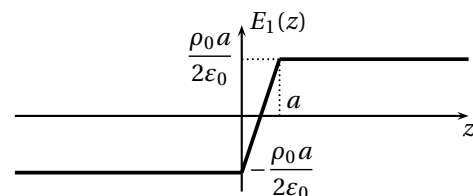
— l'autre de densité volumique $-\rho_0$, comprise entre $z = -a$ et $z = +0$, qui crée dans tout l'espace le champ $\vec{E}_2(M)$.

Le champ total est $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$.

Il suffit d'adapter la question précédente ; la couche avait une largeur $2a$ ($-a \leq z \leq a$) ; ici elle a une largeur a . Le champ créé par une couche de densité volumique ρ_0 comprise entre $z = -a/2$ et $z = a/2$ est

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a/2 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \vec{e}_z & \text{pour } -a/2 \leq z \leq a/2 \\ -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a/2 \end{cases}$$

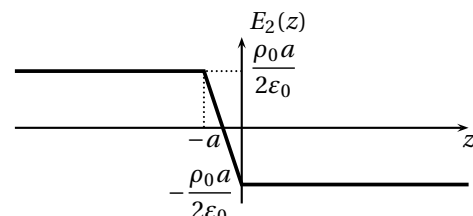
Le champ créé par la couche de densité ρ_0 comprise entre $z = 0$ et $z = a$ s'en déduit par un changement d'origine :



Il a pour expression

$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(z - \frac{a}{2}\right) \vec{e}_z & \text{pour } 0 \leq z \leq a \\ -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

Par changement de signe ($\rho_0 \rightarrow -\rho_0$) et changement d'origine, on détermine le champ créé par une couche de densité $-\rho_0$ comprise entre $z = 0$ et $z = -a$:

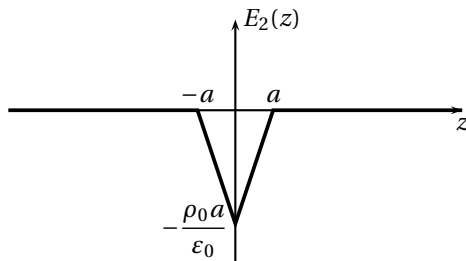


Son expression est

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{2} - z\right) \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z \leq 0 \\ \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a \end{cases}$$

On en déduit le champ total par superposition :

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (z - a) \vec{e}_z & \text{pour } 0 \leq z \leq a \\ -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} (a + z) \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z < 0 \\ \vec{0} & \text{pour } z < -a \end{cases}$$



3. Nous sommes dans le cas d'une distribution présentant les mêmes symétries et invariances que le cas 1. Le champ est donc de la forme

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad E(-z) = E(z).$$

On mène donc l'étude pour $z > 0$.

La surface de Gauss est un cylindre de section S , d'axe Oz , comprise entre $-z$ et $+z$; le flux vaut $\Phi = 2E(z)S$.

Le calcul de la charge intérieure diffère.

1^{er} cas : $z > a$. On a

$$Q_{\text{int}} = \int_{-a}^a \rho(z) S dz = \rho_0 S \int_{-a}^a \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) S dz = \frac{4}{3} \rho_0 S a.$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

$$2SE(z) = \frac{4\rho_0 Sa}{3\epsilon_0}$$

d'où

$$E(z) = \frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0}.$$

2^e cas : $0 < z \leq a$. On a

$$Q_{\text{int}} = \int_{-z}^z \rho(z') S dz' = \rho_0 S \int_{-z}^z \left(1 - \frac{z'^2}{a^2}\right) S dz' = 2\rho_0 S z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right).$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

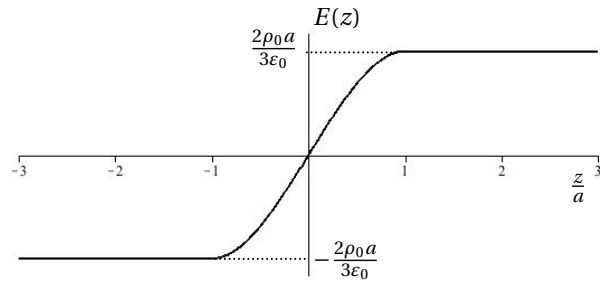
$$2SE(z) = \frac{2\rho_0 S}{\epsilon_0} z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right),$$

d'où

$$E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right).$$

On en déduit le champ dans tout l'espace en construisant une fonction impaire :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right) \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z \leq a \\ -\frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a \end{cases}$$



8 — Oscillations dans un tunnel

Le satellite, en orbite circulaire, est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R . Le principe fondamentale de la dynamique projeté sur le vecteur \vec{e}_r des coordonnées sphériques de centre C s'écrit :

$$-m \frac{v^2}{R} = -\frac{GMm}{R^2}$$

d'où $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. La période $T_Q = 2\pi R/v$ vaut donc :

$$T_Q = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

On retrouve la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Étude du mouvement du mobile P

Le mobile est soumis à :

- la réaction \vec{N} du tunnel, normal à l'axe Ox car les frottements sont négligés;
- la force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{g}(P)$, où $\vec{g}(P)$ est le champ de gravitation créé en P par l'astre.

En négligeant le trou créé par le tunnel, on peut considérer que l'astre est une distribution de masse à symétrie sphérique, avec une masse volumique ρ uniforme. Le champ de gravitation s'écrit donc en coordonnées sphériques de centre C :

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$$

Le théorème de Gauss permet de calculer le champ de gravitation à l'intérieur de l'astre. En choisissant comme surface de Gauss une sphère de centre C , de rayon $r = CP < R$, on a :

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi M_{\text{int}}$$

La masse de l'astre étant uniformément répartie, $M = \frac{4}{3}\rho R^3$ et $M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\rho r^3$, on a $M_{\text{int}} = M \frac{r^3}{R^3}$, d'où :

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = -\frac{GM}{R^3} r \vec{e}_r = -\frac{GM}{R^3} \vec{CP}$$

Le mobile est donc soumis à la force :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^3} \vec{CP}$$

La rotation de l'astre étant négligée, on peut considérer le référentiel lié à l'astre comme galiléen, et y appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile :

$$m \vec{a}(P) = \vec{N} + \vec{F}$$

En projection sur Ox , il vient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^3} x$$

soit $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$.

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique.

La solution générale est

$$x(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t.$$

Comme $x(0) = \alpha = -\sqrt{R^2 - a^2}$, et $\dot{x}(0) = \beta \omega_0 = 0$, on a :

$$x(t) = -\sqrt{R^2 - a^2} \cos \omega t$$

On a $-\sqrt{R^2 - a^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - a^2}$: le mobile ne sort pas du tunnel ; il effectue donc des oscillations harmoniques avec la période :

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

La période des oscillations est indépendante de la distance a du tunnel au centre de l'astre.

Le satellite effectue un mouvement circulaire avec la période T_Q ; le mobile oscille avec la même période T_P . Les deux objets, partant initialement du point A , s'y rencontreront avec la période $T = T_P = T_Q$, soit

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}.$$

► Si $a = 0$, les deux mobiles se rencontreront également au point B ; la périodicité de leurs rencontres sera alors de $T = T_P/2$, soit :

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}.$$

9 — Modèle de l'atome

1. Densité volumique de charge : $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$.

La distribution est à symétrie sphérique ; on a donc $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Théorème de Gauss avec une sphère de rayon r :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{e}{\epsilon_0} & \text{pour } r \geq a \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} 4\pi r^3 = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3} & \text{pour } r < a \end{cases}$$

d'où

$$E(r) = \begin{cases} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{pour } r \geq a \\ \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} & \text{pour } r < a \end{cases}$$

Pour $r \geq a$, avec $V(\infty) = 0$, on a $V(r \geq a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Pour $r < a$, on a $V(r) = -\frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + A$. La continuité du potentiel en $r = a$ s'écrit

$$V(a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 a} + A_2$$

d'où

$$A_2 = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

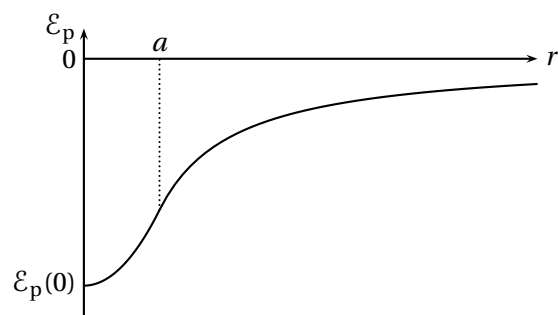
On en déduit

$$V(r < a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right).$$

► Pour $r \geq a$, on retrouve le champ et le potentiel créés par une charge ponctuelle.

2. L'énergie potentielle d'un électron soumis au champ créé par le noyau est $\mathcal{E}_p = -eV(r)$, soit

$$\mathcal{E}_p = \begin{cases} -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{pour } r > a \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{r^2}{2a^2} - \frac{3}{2} \right) & \text{pour } r < a \end{cases}$$



- La courbe $V(r)$, et donc $\mathcal{E}_p(t) = -eV(r)$, a une tangente continue en $r = a$: le champ $E(r)$ est continu, et $\frac{dV}{dr} = -E(r)$.

L'énergie d'ionisation est l'énergie à apporter à l'électron pour l'apporter du centre (position d'équilibre) à l'infini avec une vitesse nulle.

Elle vaut donc $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_p(\infty) - \mathcal{E}_p(0)$, soit

$$\mathcal{E}_i = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

L'énergie d'ionisation en électron-volt ($1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$) est donnée par

$$\mathcal{E}_i = \frac{3}{2} \frac{9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}}{100 \times 10^{-12}}$$

soit $\mathcal{E}_i = 21,6 \text{ eV}$.

On ne retrouve pas la valeur réelle, mais l'ordre de grandeur est tout à fait comparable.

3. Position d'équilibre stable en $r = 0$.

Quand il est à l'intérieur de l'atome, l'atome est soumis à la force de rappel élastique $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{OM}$. Le PFD s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{OM} = \vec{0}.$$

Oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3}}.$$

On calcule la fréquence propre associée :

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m a^3}} \\ &= \frac{1,6 \times 10^{-19}}{2\pi} \sqrt{\frac{9 \times 10^9}{9,1 \times 10^{-31} \times 10^{-31}}} = \frac{1,6}{2\pi} 10^{16} \end{aligned}$$

soit $f_0 = 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$.

La longueur d'onde correspondante est $\lambda = c/f = 120 \text{ nm}$: on est dans le domaine des **ultraviolets**.

10 — Potentiel de Yukawa

1. La relation locale $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ conduit à

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{qe^{-r/a}}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar} \right] \vec{e}_r$$

soit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a} \vec{e}_r.$$

2. Le champ étant radial, de la forme $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$, le flux à travers une sphère de rayon r est donné par

$$\Phi(r) = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r),$$

soit

$$\Phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left[1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a}.$$

Le théorème de Gauss s'écrit

$$\Phi(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0},$$

d'où

$$Q(r) = q \left[1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a}.$$

3. On a

$$\lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = q.$$

Il existe une charge ponctuelle q située au point O .

4. On a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0.$$

La distribution est globalement neutre.

La charge q située en O est donc entourée d'un « nuage » à symétrie sphérique, de charge totale $-q$.

5. La relation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Dans le cas où $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$, on a

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 E(r)]}{dr} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{r/a} (1 + e^{-r/a}) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-r/a} \left[\frac{1}{a} + \left(1 + \frac{r}{a} \right) \left(-\frac{1}{a} \right) \right] \end{aligned}$$

soit

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2 r} e^{-r/a}.$$

On en déduit

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-r/a}.$$

On peut calculer cette densité volumique sans utiliser l'opérateur divergence. C'est moins dans l'esprit du programme actuel, mais je vous donne aussi cette méthode. Le flux sortant de \vec{E} à travers la sphère de rayon r est

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-r/a}.$$

On applique le théorème de Gauss à la surface fermée délimitant la coquille de rayon r et d'épaisseur dr : ce volume est donc compris entre la sphère de rayon r et la sphère de rayon $r + dr$.

Le flux **sortant** de ce volume s'écrit

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = -\Phi(r) + \Phi(r + dr) = \frac{d\Phi}{dr} dr$$

car $\Phi(r)$ « entre » dans la coquille tandis que $\Phi(r + dr)$ en sort.

La charge comprise dans ce volume est³

$$\delta Q_{\text{int}} = \rho(r) 4\pi r^2 dr.$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

$$\frac{d\Phi}{dr} dr = \frac{4\pi r^2}{\epsilon_0} \rho(r) dr$$

d'où

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{d\Phi}{dr}.$$

On calcule

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{q}{\epsilon_0} e^{-r/a} \left[\frac{1}{a} + \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(-\frac{1}{a}\right) \right] = -\frac{q}{\epsilon_0 a^2} r e^{-r/a}.$$

On retrouve alors

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2 r} e^{-r/a}.$$

6. Cette distribution peut représenter l'atome d'hydrogène dans son état fondamental :

- la charge q au centre est le proton ($q = +e$);
- Le « nuage » de densité $\rho(r)$ et de charge totale $-q = -e$ représente le « nuage électronique », c'est-à-dire l'orbitale 1s de l'électron.

En effet, la charge comprise entre r et $r + dr$ est

$$\delta Q(r) = \delta Q_{\text{int}} = 4\pi r^2 \rho(r) dr,$$

soit

$$\delta Q(r) = -\frac{q}{a^2} r e^{-r/a} dr.$$

On peut définir une densité radiale de charge

$$P(r) = \frac{\delta Q(r)}{dr} = -\frac{q}{a^2} e^{-r/a}.$$

Cette densité est équivalente à la densité de probabilité de présence de l'électron dans une description quantique de l'atome d'hydrogène. Elle est maximum en r_0 tel que

$$P'(r_0) = 0 = -\frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) e^{-r_0/a}$$

soit $r_0 = a$. Cette grandeur représente le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène.

12 — Grotte alors!

1. Théorème de Gauss pour la gravitation :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi G M_{\text{int}}.$$

3. On considère la densité $\rho(r)$ dans la coquille de volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$.

2. Problème à symétrie sphérique : $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r) \vec{u}_r$, et

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot d\vec{S}_M = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r).$$

Pour $r < R$, on a $M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3$ et

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3$$

d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} r.$$

Dans la planète, on a $\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} r \vec{u}_r$ soit

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} \overrightarrow{OM}.$$

3. Principe de superposition; la planète avec la grotte est décrite comme la superposition des deux distributions de masse suivantes :

- une boule de centre O et de rayon R , de masse volumique uniforme ρ_0 ;
- une boule de centre C et de rayon a , de masse volumique uniforme $-\rho_0$.

La planète pleine crée le champ

$$\vec{\mathcal{G}}_1(M) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} \overrightarrow{OM}.$$

Une sphère de centre C portant la masse volumique $-\rho_0$ crée le champ

$$\vec{\mathcal{G}}_2(M) = \frac{4\pi G \rho_0}{3} \overrightarrow{CM}.$$

Le champ total dans la cavité est

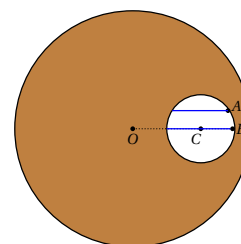
$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{\mathcal{G}}_1(M) + \vec{\mathcal{G}}_2(M),$$

soit

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 G \overrightarrow{CO}.$$

Le champ gravitationnel est uniforme dans la grotte, colinéaire à \overrightarrow{CO} .

Les deux masses ont des trajectoires rectilignes, représentées en bleu sur le schéma. L'accélération étant la même, constante, pour les deux pierres, c'est celle lâchée du point A (trajectoire la plus courte) qui touchera l'autre extrémité de la grotte en premier.



Question bonus : calculer le temps mis pour la trajectoire la plus longue. On pose $OC = D$

Masse B . PFD sur l'axe OC : $m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi \rho_0 G D m$

On a $r(t) = -\frac{2}{3} \pi \rho_0 G D t^2 + D + a$. On veut $r(t_1) = D - a$, d'où

$$t_1 = \sqrt{\frac{3a}{\pi \rho_0 G D}}.$$

13 — Matière noire

1. Théorème de Gauss pour la gravitation :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi G M_{\text{int}}.$$

Pour $r < R$, on a $M_{\text{int}} = M_g \frac{r^3}{R^3}$, donc

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_g \frac{r^3}{R^3}$$

d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{G M_g}{R^3} r.$$

Pour $r \geq R$, on a $M_{\text{int}} = M_g$, donc $4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_g$, d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{G M_g}{r^2}.$$

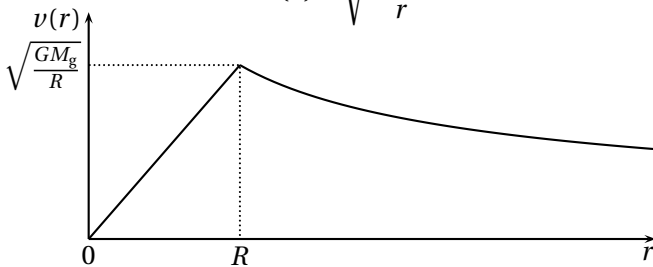
2. On écrit le PFD appliqué à l'étoile pour un mouvement circulaire uniforme : $-m \frac{v^2(r)}{r} \vec{e}_r = -m \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$.

Pour $r < R$, on obtient $\frac{v^2(r)}{r} = \frac{G M_g}{R^3} r$, d'où

$$v(r) = \sqrt{\frac{G M_g}{R^3} r}.$$

Pour $r \geq R$, on obtient $\frac{v^2(r)}{r} = \frac{G M_g}{r^2}$, d'où

$$v(r) = \sqrt{\frac{G M_g}{r}}.$$



Le profil de vitesse est cohérent avec les mesures pour $r < R$, c'est-à-dire dans le noyau, mais n'est pas compatible avec les données mesurées pour $r > R$: on obtient un profil $v(r)$ décroissant tandis que le profil réel est quasi constant. La répartition de masse proposée est donc à revoir.

3. On part de l'équation de Maxwell-Gauss pour la gravitation par analogie avec $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, soit

$$\text{div } \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G \rho_d(r).$$

Compte tenu de la symétrie sphérique, on a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(r))}{dr} = -4\pi G \rho_d(r).$$

On détermine la forme que doit prendre le champ gravitationnel dans la zone de matière noire pour avoir une vitesse uniforme à partir du PFD :

$$-\frac{m v_0^2}{r} = m \mathcal{G}(r)$$

soit $\mathcal{G}(r) = -\frac{v_0^2}{r}$. On a alors

$$\text{div } \vec{\mathcal{G}} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(r))}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d(r v_0^2)}{dr} = -\frac{v_0^2}{r} = -4\pi G \rho_d(r),$$

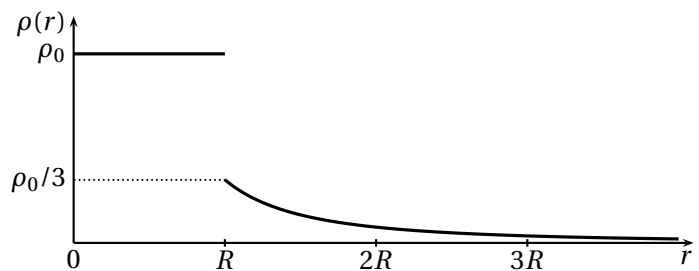
d'où

$$\rho_d(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}.$$

Avec $v_0^2 = \frac{G M_g}{R}$ on obtient $\rho_d(r) = \frac{M_g}{4\pi R r^2}$.

Comme $M_g = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3$, on a finalement

$$\rho_d = \rho_0 \frac{R^2}{3r^2}.$$



4. On a

$$M_{\text{noire}} = \int_R^{nR} 4\pi r^2 \rho_d(r) dr = 4\pi \int_R^{nR} \frac{\rho_0 R^2}{3} dr = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3 (n-1).$$

Avec $M_g = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3$, on en déduit $\gamma = \frac{n-1}{n}$

Pour $n = 10$, on obtient $\gamma = 0,9$: **la matière noire représente 90 % de la masse de la galaxie.**

~~~~~ Équations locales ~~~~~

14 — Jonction P-N

1. On rencontre des jonctions PN dans les diodes et les transistors.

2. L'ensemble étant neutre, la charge totale d'une section S (perpendiculaire à Ox) est donc

$$\rho_2 b S + \rho_1 a S = 0$$

d'où

$$\rho_1 a + \rho_2 b = 0.$$

3. Les plans $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ étant des plans de symétrie de la distribution de charge, le champ \vec{E} est porté par vox . La distribution étant invariante par translation selon Oy et Oz , on a donc

$$\vec{E}(M) = E(x) \vec{e}_x.$$

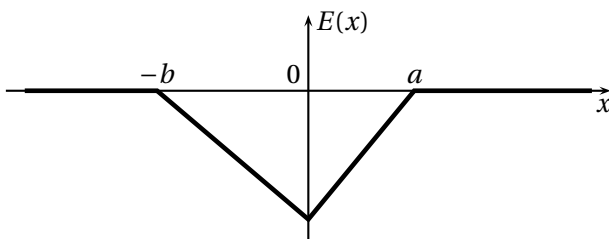
L'équation de Maxwell-Gauss dans le milieu s'écrit alors, comme $\text{div } \vec{E} = \frac{dE}{dx}$:

$$\frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho_2}{\epsilon_0} & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon_0} & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

On en déduit par intégration, sachant que $E(-b) = 0$ et $E(a) = 0$ (le champ est nul à l'extérieur et il est continu)

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho_2}{\epsilon_0}(x+b) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon_0}(x-a) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

On a $E(0) = \frac{\rho_2 b}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_1 a}{\epsilon_0}$.



4. De $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ on déduit $\frac{dV}{dx} = -E(x)$, soit

$$\frac{dV}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq -b \\ -\frac{\rho_2}{\epsilon_0}(x+b) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}(x-a) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{pour } x \geq a \end{cases}$$

On intègre sachant que $V(0) = 0$, d'où

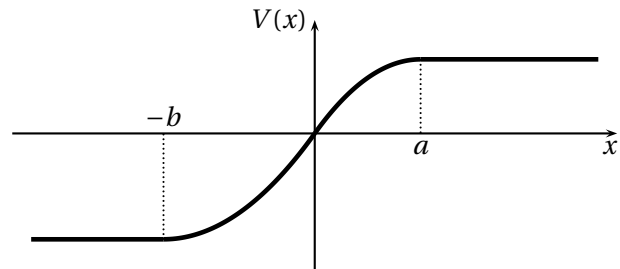
$$V(x) = \begin{cases} C_1 & \text{pour } x \leq -b \\ -\frac{\rho_2}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{2} + bx \right) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ -\frac{\rho_1}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ C_2 & \text{pour } x \geq a \end{cases}$$

Par continuité du potentiel en $x = -b$ on obtient

$$C_1 = \frac{\rho_2 b^2}{2\epsilon_0} < 0.$$

Par continuité du potentiel en $x = a$ on obtient

$$C_2 = \frac{\rho_1 a^2}{2\epsilon_0} > 0.$$



15 — Distribution de charges

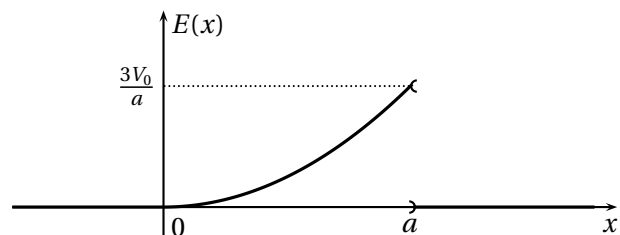
1. Le champ électrostatique est donné par

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x > a \\ \frac{3V_0}{a^3} x^2 \vec{e}_x & \text{pour } 0 < x < a \\ \vec{0} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Représentons sa composante $E(x)$:



2. La densité volumique de charge est donnée par l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

soit

$$\rho(x) = -\epsilon_0 \frac{d^2 V}{dx^2}.$$

On calcule

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x > a \\ \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^3} x & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Considérons un cylindre d'axe Oz , de section S , englobant la zone $[0, a]$ (ses extrémités ont pour cotes $x_1 < 0$ et $x_2 > a$). Le champ \vec{E} étant nul au niveau des extrémités de ce cylindre, le théorème de Gauss s'écrit

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

On a donc $Q_{\text{int}} = 0$.

La charge totale portée due à la densité volumique de charge $\rho(x)$ dans ce cylindre vaut

$$Q_{\text{vol}} = \int_0^a \rho(x) S dx = \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^3} \int_0^a S x dx = \frac{3\epsilon_0 V_0}{a} S.$$

La charge totale contenue dans le cylindre étant nulle, la distribution de charge ne peut être uniquement décrite par une répartition volumique de charges.

Il existe donc une distribution surfacique, de densité surfacique σ , située en $x = a$, où on observe une discontinuité du champ électrostatique. La charge surfacique comprise dans le cylindre est $Q_{\text{surf}} = \sigma S$.

Comme $Q_{\text{int}} = Q_{\text{vol}} + Q_{\text{surf}} = 0$, on a $\sigma S = -\frac{3\epsilon_0 V_0}{a} S$, d'où

$$\sigma = -\frac{3\epsilon_0 V_0}{a}.$$

3. Comme on l'a vu, la distribution est **globalement neutre**.

17 — Écrantage de Debye

1. La densité volumique de charges dans le milieu est

$$\rho(r) = n^+(r)q - n^-(r)q = n_0 q \left[e^{-\frac{qV}{k_B T}} - e^{\frac{qV}{k_B T}} \right]$$

soit

$$\rho(r) = -2n_0 q \sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right).$$

L'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Le potentiel $V(r)$ vérifie donc l'équation différentielle

$$\Delta V = \frac{2n_0 q}{\epsilon_0} \sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right).$$

2. Pour $qV \ll k_B T$, on a

$$\sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right) \approx \frac{qV}{k_B T},$$

d'où en utilisant l'expression du laplacien fournie

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rV(r))}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2 V(r)}{\epsilon_0 k_B T},$$

soit

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2}{\epsilon_0 k_B T} rV(r).$$

On peut écrire

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = \frac{1}{\ell_D^2} rV(r) \quad \text{avec} \quad \ell_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 q^2}}.$$

La solution générale est de la forme

$$rV(r) = A_1 e^{\frac{r}{\ell_D}} + A_2 e^{-\frac{r}{\ell_D}},$$

soit

$$V(r) = \frac{A_1}{r} e^{\frac{r}{\ell_D}} + \frac{A_2}{r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Le potentiel $V(r)$ ne pouvant diverger pour $r \rightarrow \infty$, on a nécessairement $A_1 = 0$, et

$$V(r) = \frac{A_2}{r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Considérer $r \rightarrow 0$ revient à se rapprocher de la charge q en 0; le potentiel créé par cette charge prédomine alors sur le potentiel créés par les autres charges; comme $e^{-\frac{r}{\ell_D}} \approx 1$, on a alors

$$V(r) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \approx \frac{A_2}{r}.$$

On en déduit $A_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ et le potentiel s'écrit finalement

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

3. Le potentiel coulombien créé par la charge $+q$ seule est

$$V_{\text{Coul}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Le potentiel au voisinage de cette charge dans le plasma s'écrit

$$V(r) = V_{\text{Coul}}(r) e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Cette expression fait apparaître le terme d'écrantage $e^{-\frac{r}{\ell_D}} < 1$, qui devient très faible dès que $r \gg \ell_D$. Les charges négatives du plasma sont attirées autour de la charge $+q$, et font « écran », diminuant le potentiel créé.

- Cela peut surprendre d'obtenir un potentiel qui fait apparaître un rôle central à la charge $+q$ choisie au hasard dans le plasma. En fait, c'est un phénomène statistique, en moyenne dans le temps; le plasma présente une certaine dynamique, due à l'agitation thermique, et les charges ne sont pas figées dans l'espace.
- L'agitation thermique s'oppose au regroupement des charges $-q$ autour de la charge $+q$, donc à l'écrantage. En effet, le phénomène est moins important (ℓ_D est plus grand) quand T augmente.

19 — Champ disruptif de l'air

1. La différence de potentiel δV entre deux équipotentielles successives et la même sur le graphique.

Comme $E \approx \frac{\delta V}{d\ell}$ où $d\ell$ est la distance entre deux équipotentielles, le champ est maximum là où les équipotentielles sont le plus rapprochées, c'est-à-dire au voisinage des électrodes.

On voit de plus que la pente $\frac{dV}{dz}$ est maximum en $x = \pm 1$ sur le graphe $V(z)$.

2. On estime la pente de $V(z)$ en $z = 0$, soit

$$\frac{dV}{dz} \approx \frac{0,25}{0,4 \times 10^{-3} - (-0,4 \times 10^{-3})} = 3,1 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On a donc en intensité $E(0) = 3,1 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, pour une différence de potentiel entre les électrodes $\Delta V = 2 \text{ V}$.

La relation entre E et V étant linéaire, pour obtenir E_{dis} , il faut appliquer ΔV_{dis} telle que

$$\Delta V_{\text{dis}} = \Delta V \frac{E_{\text{dis}}}{E(0)}$$

soit $\Delta V_{\text{dis}} = 2,3 \times 10^4 \text{ V}$.

Le champ disruptif de l'air est $E_{\text{dis}} = 3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle tension doit-on appliquer aux bornes des électrodes pour atteindre ce champ au centre O du dispositif?

22 — Particule chargée dans un potentiel

► Nous allons considérer ici $a > 0$.

1. De $\vec{E} = -\text{grad } V$ on obtient

$$\vec{E} = -2bx\vec{e}_x - 2by\vec{e}_y - 2az\vec{e}_z.$$

Dans une région vide de charge, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit

$$\text{div } \vec{E} = 0.$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}.$$

2. On a

$$\text{div } \vec{E} = -2b - 2b - 2a = -2(a + 2b) = 0$$

d'où

$$b = -\frac{a}{2}.$$

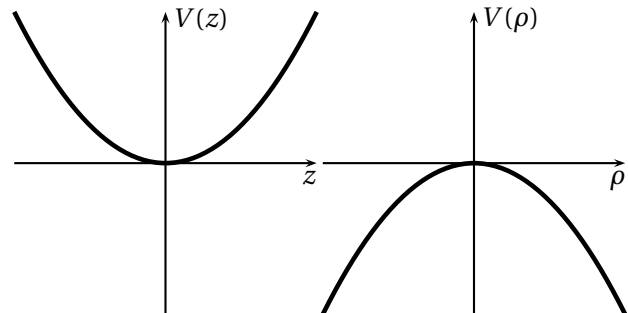
3. Pour $z = 0$, on a $V(x, y, 0) = b(x^2 + y^2)$, soit en posant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance à l'axe Oz

$$V(\rho, 0) = b\rho^2.$$

Pour $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, on a

$$V(0, z) = az^2.$$

Avec $a > 0$ on a $b < 0$, d'où les graphes



4. Considérons une particule de masse m et de charge q . La conservation de l'énergie mécanique (force électrostatique conservative) s'écrit pour un mouvement selon Oz (avec $\rho = 0$)

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + qV(z) = 0$$

soit

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + qaz^2 = 0$$

On en déduit en dérivant par rapport à t , après simplification par \dot{z}

$$m\ddot{z} + 2qaz = 0.$$

On obtient un mouvement périodique pour $q > 0$, qui donne l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{z} + \frac{2qa}{m}z = 0.$$

Le mouvement est alors périodique, de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2qa}{m}}.$$

5. Considérons alors le mouvement selon l'axe Ox . Par la même méthode, on obtient

$$m\ddot{z} + 2qbz = 0.$$

Si $a > 0$, on a $b < 0$: la solution de l'équation différentielle en x s'écrit comme somme d'une exponentielle tendant vers 0 et d'une exponentielle divergente. Le mouvement selon Ox n'est donc pas périodique.

Le mouvement global ne peut pas être périodique.