Sujet d'entraînement — Ondes I

Clarinette et saxophone soprano — CCP PSI

Aucune connaissance musicale n'est requise pour traiter ce problème.
Dans tout ce problème, $R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ représente la constante des gaz parfaits.
La clarinette a été créée vers 1700 par Johann Christophe Denner à Nuremberg. La clarinette en *si bémol* est le modèle de plus commun (figure I-1). Le tube de la clarinette est **modélisé** par un cylindre de longueur L_{cal}, fermé du côté de l'embouchure (à gauche) et ouvert du côté du pavillon (à droite). Il s'agit d'une approximation grossière qui a le mérite de préserver les caractéristiques physiques les plus importantes. En réalité, le tube de la clarinette n'est pas à section constante et le traitement mathématique est alors beaucoup plus compliqué...

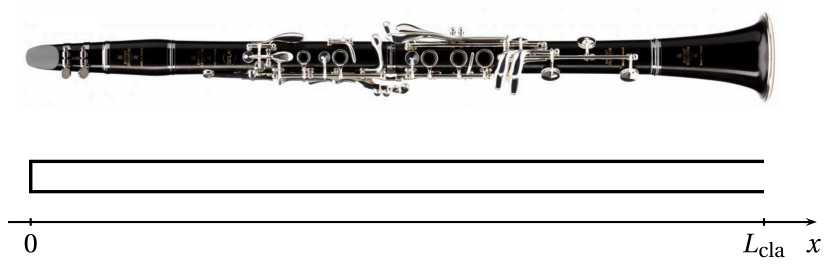


FIGURE I-1 – Clarinette et son modèle de tuyau cylindrique

Le saxophone a été breveté en 1846 par Adolphe Sax, en Belgique. Parmi les modèles utilisés aujourd'hui, on trouve le saxophone soprano en *si bémol*. Le saxophone est ouvert du côté du pavillon (à droite), mais il est quasiment fermé de l'autre côté (à gauche). Le tube du saxophone et approximativement conique. Nous allons modéliser le tube du saxophone soprano par un simple tuyau conique de longueur un peu plus grande que celle de la clarinette (soit L_{sax}) et d'angle au sommet α.

FIGURE I-2 – Saxophone soprano et son modèle de tuyau conique

1 Équation de propagation d'une onde sonore dans un tube

On considère un tube indéformable de longueur L, d'axe de révolution (Ox), rempli d'air, supposé être un gaz parfait à la température moyenne ambiante T_0 et à la pression P_0. Soit ρ_0 la masse volumique moyenne de cet air.
La section transverse du tube est une fonction de l'abscisse x ; on note $S(x)$ cette section (figure I-3).
En présence de l'onde sonore, le champ de vitesse de l'air est $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{e}_x$, où $u(x,t)$ est faible.
On note $\rho(x,t)$ la masse volumique de l'air à l'instant t et à l'abscisse x.
On supposera qu'en présence de l'onde sonore, la masse volumique de l'air s'écrit $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$, où $\mu(x,t) \ll \rho_0$ et que la pression de l'air s'écrit $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$, avec $p(x,t) \ll P_0$.

1.1 Bilan de masse sur un système ouvert

On s'intéresse à l'air compris entre les sections d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Ce système est **ouvert**.

1. Exprimer la masse $\mathrm{d}m(t)$ de ce système à l'instant t en fonction de $S(x)$ notamment. Même question pour l'instant $t + \mathrm{d}t$.

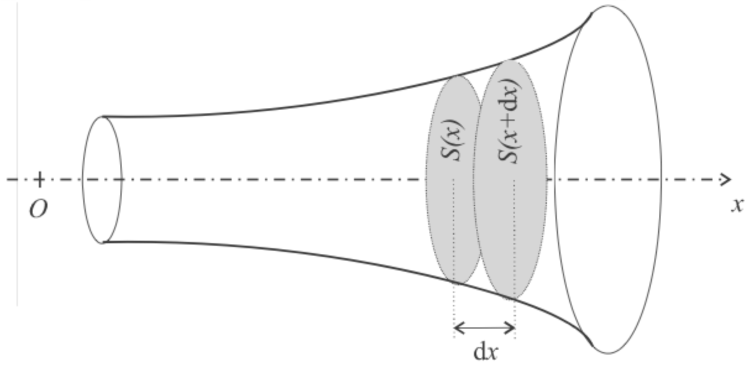


FIGURE I-3 – Petite tranche d'air dans un tube acoustique de section variable

2. Exprimer la masse δm_e de fluide entrant dans le système pendant la durée $\mathrm{d}t$ en fonction de $\rho(x,t)$, $S(x)$ et $u(x,t)$. Exprimer aussi la masse δm_s de fluide sortant du système pendant la même durée.

3. En se limitant à des termes du premier ordre, montrer que l'on obtient l'équation de conservation de la masse suivante :

$$S(x)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial (Su)}{\partial x} = 0\,.$$

1.2 Équation du mouvement

On rappelle l'équation d'Euler régissant la dynamique des fluides parfaits :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{u}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,.$$

4. On appelle τ la durée caractéristique de variation temporelle de la vitesse, L la distance caractéristique de variation spatiale de la vitesse et U l'ordre de grandeur caractéristique de la vitesse particulaire. À quelle condition sur U peut-on négliger le terme $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{u}$ devant le terme $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$?

5. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer la quantité $\rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x}$.

6. On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique est défini par $\chi_S = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$. Toujours à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, établir une relation entre $\mu(x,t)$, χ_S, ρ_0 et $p(x,t)$.

1.3 Équations de propagation

7. En combinant les résultats des questions 3, 5 et 6, monter que

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right) \qquad \text{équation E1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)u(x,t)\right) \qquad \text{équation E2}$$

Préciser l'expression de la constante c en fonction de ρ_0 et de χ_S.

8. En supposant que l'air est un gaz parfait, exprimer ρ_0 en fonction de la masse molaire de l'air notée M, de la pression P_0, de la température T_0 et de la constante des gaz parfaits R.

9. En supposant que l'air dans le tube subit une transformation isentropique, la loi de Laplace est vérifiée. Rappeler cette loi reliant les grandeurs pression $P(x,t)$ et masse volumique $\rho(x,t)$. On introduira le coefficient d'atomicité $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, où C_p et C_V sont les capacités thermiques molaires de l'air respectivement à pression constante et à volume constant. Exprimer alors χ_S en fonction de γ et de P_0.

10. Donner alors l'expression de la constante c en fonction de la température T_0, de la masse molaire de l'air M, de la constante des gaz parfaits R et du coefficient γ.
Faire l'application numérique avec $M = 29\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $\gamma = 1{,}4$ et T_0 correspondant à une température de 20 °C.

2 Ondes stationnaires dans une clarinette

Tous les trous de la clarinette sont bouchés. La clarinette est alors modélisée par un tube cylindrique de section S constante.

11. Que deviennent les équations E1 et E2 de la question 7 dans le cas de la clarinette? Que représente alors la constante c?

12. Que valent la vitesse $u(x,t)$ en $x=0$ et la surpression $p(x,t)$ en $x=L_{\text{cla}}$?

13. On recherche des solutions stationnaires pour la surpression et la vitesse qui sont donc de la forme $p(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ et $u(x,t) = g(x)\sin(\omega t)$. Montrer que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ doivent être solutions d'une équation différentielle à préciser.

14. On montre alors que la vitesse $u(x,t)$ est une fonction du type $u(x,t) = u_1\sin(kx)\sin(\omega t)$ où u_1 est l'amplitude. Préciser l'expression de k. Vérifier que la condition limite en $x=0$ est vérifiée.

15. Déterminer alors complètement la fonction $p(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ à l'aide des grandeurs ρ_0, u_1 et c (on pourra se servir de la question 5). En déduire aussi que seules des ondes stationnaires de pulsations bien particulières peuvent exister dans la clarinette.

16. Donner l'expression de la fréquence f_1 du mode fondamental existant dans la clarinette en fonction de c et L_{cal}. Donner aussi l'expression de la fréquence du premier harmonique.

Faire l'application numérique avec $L_{\text{cal}} = 60$ cm. Le son le plus grave émis par une clarinette est le *ré*$_2$ de fréquence 146,8 Hz; est-ce compatible avec le modèle adopté?

17. La musique occidentale est basée sur la gamme tempérée chromatique suivante :

do do# ré ré# mi fa fa# sol sol# la la# si do

Quand on passe du premier *do* et deuxième *do*, on dit qu'on est passé à l'octave (la fréquence de la note émise est multipliée par 2). En admettant qu'entre deux notes consécutives la fréquence est toujours multipliée par le même facteur a, évaluer ce facteur en l'écrivant sous la forme d'une puissance de 2.

18. Sur la clarinette, il existe une clé au niveau du pouce appelée clé de douzième qui permet d'enlever l'émission du mode fondamental, mais qui ne compromet pas l'émission de premier harmonique. Quand tous les trous de la clarinette sont bouchés et que l'on n'active pas la clé au niveau du pouce, on émet un son grave qui correspond à un *ré* (son réel entendu par une oreille). On active la clé, on émet alors un son plus aigu : par combien est multiplié la fréquence? En déduire la note réelle entendue par une oreille.

3 Ondes stationnaires dans un saxophone soprano

Tous les trous du saxophone sont bouchés. Le saxophone soprano est formé par un tube conique de hauteur L_{sax}, d'origine O et d'angle au sommet α.

19. Calculer la section $S(x)$ en fonction de x et de α.

20. Montrer alors que l'équation E1 obtenue à la question 7 s'écrit aussi $\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial^2(x\cdot p(x,t))}{\partial x^2}\right)$.

21. On effectue le changement de variable suivant : $\Pi(x,t) = x\cdot p(x,t)$. Préciser l'équation vérifiée par $\Pi(x,t)$. Quelles sont les conditions aux limites (en $x=0$ puis en $x=L_{\text{sax}}$) pour $\Pi(x,t)$?

22. On recherche une solution stationnaire pour $\Pi(x,t)$ sous la forme $h(x)\cos(\omega t)$.

Préciser l'équation vérifiée par $h(x)$.

À partir des conditions aux limites, montrer que $h(x)$ est de la forme $h(x) = E\sin(kx)$.

En déduire que seules des ondes stationnaires de pulsations particulières à déterminer peuvent être engendrées dans le saxophone.

23. Tous les trous du saxophone sont bouchés : tout le tube est alors le siège d'une onde stationnaire. Donner l'expression de la fréquence f_1 du mode fondamental existant dans le saxophone soprano en fonction de c et L_{sax}. Donner aussi l'expression de la fréquence du premier harmonique.

Comparer au cas de la clarinette.

Solution

1 Équation de propagation d'une onde sonore dans un tube

1.1 Bilan de masse sur un système ouvert

1. À l'instant t, la masse du système proposé est

$$\boxed{\mathrm{d}m(t) = \rho(x,t)S(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

De même à l'instant $t+\mathrm{d}t$:

$$\boxed{\mathrm{d}m(t+\mathrm{d}t) = \rho(x,t+\mathrm{d}t)S(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

2. Pendant la durée $\mathrm{d}t$ il entre dans le système la masse

$$\boxed{\delta m_\mathrm{e} = \rho(x,t)S(x)u(x,t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Pendant la même durée il sort du système la masse

$$\boxed{\delta m_\mathrm{s} = \rho(x+\mathrm{d}x,t)S(x+\mathrm{d}x)u(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

3. Le bilan de masse s'écrit

$$\mathrm{d}m(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}m(t) = \delta m_\mathrm{e} - \delta m_\mathrm{s}$$

soit

$$\begin{aligned}\left[\rho(x,t+\mathrm{d}t)-\rho(x,t)\right]S(x)\,\mathrm{d}x \\ = -\big[\rho(x+\mathrm{d}x,t)S(x+\mathrm{d}x)u(x+\mathrm{d}x,t) \\ -\rho(x,t)S(x)u(x,t)\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}S(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial[\rho(x,t)S(x)u(x,t)]}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Au premier ordre :

$$\begin{aligned}\frac{\partial[\rho(x,t)S(x)u(x,t)]}{\partial x} &= \frac{\partial[(\rho_0+\mu(x,t))S(x)u(x,t)]}{\partial x} \\ &\approx \rho_0\frac{\partial[\mu(x,t)S(x)u(x,t)]}{\partial x}\,.\end{aligned}$$

Finalement le bilan s'écrit

$$\boxed{S(x)\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial(Su)}{\partial x} = 0}\,.$$

Remarque : on a

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial[\rho_0+\mu(x,t)]}{\partial t} = \frac{\partial\mu}{\partial t}$$

et le bilan peut s'écrire plus simplement

$$S(x)\frac{\partial\mu}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial(Su)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

1.2 Équation du mouvement

4. Le terme $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{u}$ a pour ordre de grandeur

$$(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{u} \sim \frac{U^2}{L}\,.$$

Le terme $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ a pour ordre de grandeur

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \sim \frac{U}{\tau}\,.$$

On peut donc négliger le terme $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{u}$ devant le terme $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ si $\dfrac{U^2}{L} \ll \dfrac{U}{\tau}$, soit si

$$\boxed{U \ll \frac{L}{\tau}}\,.$$

5. En négligeant le terme $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{u}$ devant le terme $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$, on obtient en projection selon $\vec{e}_x$:

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}\,. \qquad (2)$$

6. Comme $P = P_0 + p$, on a

$$\frac{\partial\rho}{\partial P} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\,,$$

soit avec $\rho = \rho_0 + \mu$:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_S$$

d'où avec l'expression de χ_S :

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_S = \rho\chi_S = (\rho_0+\mu)\chi_S \approx \rho_0\chi_S\,.$$

On supposant l'évolution isentropique, on en déduit en intégrant

$$\boxed{\mu(x,t) = \rho_0\chi_S p(x,t)}\,. \qquad (3)$$

1.3 Équations de propagation

7. En utilisant (3), l'équation (1) s'écrit, en développant la dérivée du produit :

$$\rho\chi_S S(x)\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}u - \rho_0 S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\rho\chi_S S(x)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\frac{\partial u}{\partial t} - \rho_0 S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\,.$$

D'après (2) on a

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

d'où
$$\rho_0\chi_S\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\frac{\partial p}{\partial x}+S(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\,.$$
On a donc
$$\boxed{\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right)}$$
avec
$$\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}}\,.$$
En dérivant (2) par rapport au temps, et en utilisant (3) on a
$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}=-\frac{1}{\rho_0\chi_S}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial t}\,.$$
D'après (1) on a
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial t}&=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{S}\rho_0\frac{\partial(Su)}{\partial x}\right]\\&=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{S}\rho_0 u\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}\right]\end{aligned}$$
soit
$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial t}=-\rho_0 u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right]-\frac{\rho_0}{S(x)}\frac{\partial u}{\partial x}-\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
On a donc
$$\rho_0\chi_S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)$$
d'où
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=c^2\Bigg(&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)u(x,t)\Bigg)\end{aligned}}$$
8. La masse de n moles de gaz est $m=nM=\rho_0 V$, soit avec $P_0V=nRT_0$:
$$\boxed{\rho_0=\frac{P_0M}{RT_0}}\,.$$
9. La loi de Laplace s'écrit $PV^\gamma=\text{cte}$. Pour une masse $m=\rho V$ de gaz, on a donc [1]
$$\boxed{P(x,t)\rho(x,t)^{-\gamma}=\text{cte}}\,.$$
La différentielle logarithmique de la loi de Laplace s'écrit
$$\frac{\mathrm{d}P}{P}-\gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0\,.$$
On a donc
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P}=\frac{\rho}{\gamma P}\,.$$

1. Ce n'est évidemment pas la même constante qu'en variables P et V…

Le coefficient de compressibilité isentropique
$$\chi_S=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S$$
s'écrit alors
$$\boxed{\chi_S=\frac{1}{\gamma P_0}}\,.$$
10. La constante c est alors donnée par
$$c=\frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}=\sqrt{\frac{RT_0}{P_0M}\gamma P_0}$$
soit
$$\boxed{c=\sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}}\,.$$
Avec $T_0=293$ K, on calcule $\boxed{c=343\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

2 Ondes stationnaires dans une clarinette

11. Dans le cas où la section S est constante, les équations d'onde établies à la question 7 deviennent
$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$
et
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\,.$$
La surpression et la vitesse vérifient l'équation de d'Alembert. La constante c représente alors la célérité des **ondes progressives** dans la clarinette (qui a la même expression que dans l'air libre).

12. L'extrémité $x=0$ étant bouchée par une paroi rigide, on a $\boxed{u(0,t)=0}$.
Le tube est ouvert sur l'atmosphère en $x=L_{\text{cla}}$. La pression atmosphérique étant constante, égale à P_0, la continuité de la pression en $x=L_{\text{cla}}$ s'écrit
$$P(L_{\text{cla}},t)=P_0+p(L_{\text{cla}},t)=P_0$$
d'où $\boxed{p(L_{\text{cla}},t)=0}$.

13. L'équation de d'Alembert s'écrit pour la surpression
$$-\omega^2 f(x)=c^2 f''(x)$$
et pour la vitesse
$$-\omega^2 g(x)=c^2 g''(x)\,.$$
Les fonction f et g vérifient donc l'équation différentielle
$$\boxed{f''(x)+\frac{\omega^2}{c^2}f(x)=0}\quad\text{et}\quad\boxed{g''(x)+\frac{\omega^2}{c^2}g(x)=0}\,.$$

14. Avec $u(x,t) = u_1 \sin(kx)\sin(\omega t)$ l'équation différentielle précédente s'écrit

$$-k^2 u(x,t) + \frac{\omega^2}{c^2} u(x,t) = 0\,.$$

La pulsation spatiale vérifie donc la relation de dispersion

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}\,.$$

La solution proposée vérifie bien la condition $\boxed{u(0,t) = 0}$.

15. L'équation (2) conduit à

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho_0 u_1 \omega \sin(kx)\cos(\omega t)\,.$$

En intégrant on obtient

$$p(x,t) = \frac{\rho_0 u_1 \omega}{k} \cos(kx)\cos(\omega t)$$

soit

$$\boxed{p(x,t) = \rho_0 c u_1 \cos(kx)\cos(\omega t)}\,.$$

La condition à l'extrémité ouverte s'écrit

$$p(L_{\text{cla}}, t) = 0 = \rho_0 c u_1 \cos(kL_{\text{cla}})\cos(\omega t)$$

d'où $\cos(kL_{\text{cla}}) = 0$. Il faut donc $kL_{\text{cal}} = \frac{\pi}{2} + n\pi$; la pulsation spatiale ne peut prendre que les valeurs discrètes

$$k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L_{\text{cla}}}\,.$$

Les pulsations des modes propres sont donc données par

$$\boxed{\omega_n = (2n+1)\frac{c\pi}{2L_{\text{cla}}}} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}.$$

16. Le mode fondamental a pour pulsation [2]

$$f_1 = \frac{\omega_{n=0}}{2\pi}$$

soit

$$\boxed{f_1 = \frac{c}{4L_{\text{cla}}}}\,.$$

Le premier harmonique, qui correspond à la valeur $n = 1$, a pour fréquence

$$\boxed{f' = \frac{3c}{4L_{\text{cla}}} = 3f_1}\,.$$

Remarques :

— Les fréquences propres sont données par

$$f_n = (2n+1)\frac{c}{4L_{\text{cla}}} = (2n+1)f_1\,.$$

Seuls les harmoniques impaires sont présents dans le spectre du son émis.'

La longueur d'une clarinette est $L_{\text{cal}} = 60$ cm. On trouve pour le fondamental $f_1 = 143$ Hz, ordre de grandeur réaliste sachant que le son le plus grave émis par une clarinette est le *ré*$_2$ de fréquence 146,8 Hz.

17. La fréquence étant multipliée par le facteur a entre deux notes consécutives, entre deux notes distances d'une octave (12 notes consécutives), la fréquence est multipliée par $a^{12} = 2$. On a donc

$$\boxed{a = 2^{1/12}}\,.$$

On obtient $a \approx 1{,}059$.

18. Quand tous les trous sont bouchés, on émet la note correspondant au mode fondamental de fréquence f_1.

Lorsque la clé de douzième est activée, on émet l'harmonique suivant de fréquence $3f_1$: **la fréquence de la note émise est multipliée par 3**.

Le nombre n de notes consécutives (de demi-tons) correspondant à un rapport de fréquence égal à 3 est donné par

$$a^n = 3\,.$$

On a $12\ln a = \ln 2$, et on veut $n \ln a = \ln 3$, soit

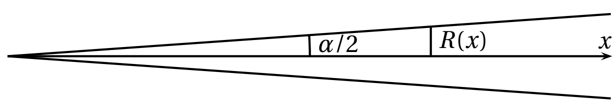
$$n = 12\frac{\ln 3}{\ln 2} = 19{,}0\,.$$

On compte 19 intervalles en partant du *ré* : *la note émise est un* la.

Remarque : cette note est située à un intervalle d'une octave auquel on superpose une quinte (*ré*–*la*) ; l'intervalle correspondant est appelée une quinte redoublée, ou une douzième... d'où le nom « clé de douzième » !

3 Ondes stationnaires dans un saxophone soprano

19. Schéma du saxophone soprano :



Le rayon à l'abscisse x vérifie

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R(x)}{x}\,.$$

L'aire $S(x) = \pi R^2(x)$ vaut donc

$$\boxed{S(x) = \pi x^2 \tan^2\frac{\alpha}{2}}\,.$$

2. Attention aux indices, le mode fondamental correspond à la valeur $n = 0$...

20. La différentielle logarithmique de l'expression précédente s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

d'où

$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}.$$

L'équation d'onde vérifiée par la surpression s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = \frac{c^2}{x}\left[x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{\partial p}{\partial x}\right].$$

Calculons

$$\frac{\partial^2(x\cdot p)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(xp)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial p}{\partial x} + p\right]$$
$$= x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{\partial p}{\partial x}.$$

On peut donc écrire

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{x}\frac{\partial^2(xp)}{\partial x^2}}.$$

21. L'équation précédente s'écrit

$$\frac{\partial^2(xp)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2(xp)}{\partial x^2}.$$

Avec le changement de variable $\Pi(x,t) = x\cdot p(x,t)$, on retrouve l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}}.$$

La pression restant finie, On a $\boxed{\Pi(0,t) = 0}$.
En $x = L_{\text{sax}}$, on a une extrémité ouverte, d'où $p(L_{\text{sax}},t) = 0$ et $\boxed{\Pi(L_{\text{sax}},t) = 0}$.

22. En cherchant $\Pi(x,t) = h(x)\cos(\omega t)$, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$-\omega^2 h(x)\cos(\omega t) = c^2 h''(x)\cos(\omega t).$$

La fonction $h(x)$ vérifie donc l'équation différentielle

$$\boxed{h''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}h(x) = 0}.$$

La solution générale est de la forme

$$h(x) = D\cos(kx) + E\sin(kx) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

La condition $\Pi(x,t) = 0$ entraîne $h(0) = D = 0$. On a donc

$$\boxed{h(x) = E\sin(kx)}.$$

La condition $\Pi(L_{\text{sas}},t) = 0$ donne $B\sin(kL_{\text{sax}}) = 0$.
On ne peut retenir $B = 0$ car $\Pi \neq 0$; il faut donc $\sin(kL_{\text{sax}}) = 0$, d'où $kL_{\text{sax}} = n\pi$.
On ne peut observer que les modes propres

$$k_n = \frac{n\pi}{L_{\text{sax}}} = \frac{\omega_n}{c}.$$

Les pulsations propres accessibles sont donc

$$\boxed{\omega_n = n\frac{c\pi}{L_{\text{sax}}}}.$$

23. La fréquence du mode fondamental $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$ est donnée par

$$\boxed{f_1 = \frac{c}{2L_{\text{sax}}}}.$$

L'harmonique suivant a pour fréquence $\boxed{f_2 = 2f_1}$.
La fréquence est multipliée par 2 entre le fondamental et le premier harmonique, alors que pour la clarinette elle était multipliée par 3.

Remarques :

- On a obtenu

$$f_1 = \frac{c}{2L_{\text{sax}}} \quad \text{et} \quad f_1 = \frac{c}{4L_{\text{cla}}}.$$

  Pour des longueurs du même ordre, la fréquence du son le plus grave du saxophone est deux fois plus élevée que celle du son le plus grave de la clarinette (une octave). La clarinette peut émettre des sons plus grave que le saxophone.
- On a établi

$$f_{n,\text{sax}} = nf_1 \quad \text{et} \quad f_{n,\text{cla}} = (2n+1)f_1.$$

  Le son émis par le saxophone contient tous les harmoniques, tandis que le son émis par la clarinette ne contient que les harmoniques impairs. Les timbres de ces deux instruments sont différents.
- Le saxophone est, comme la clarinette, muni d'une clef au niveau du pouce qui permet d'enlever l'émission du mode fondamental tout en gardant celle du premier premier harmonique. Le premier harmonique a ici la fréquence $f_2 = 2f_1$, double du fondamental, ce qui correspond à un intervalle d'une octave. Le saxophone possède donc une *clef d'octave* (à la différence de la clarinette qui possède une clef de douzième).