

## Sujet d'entraînement

## Ondes II

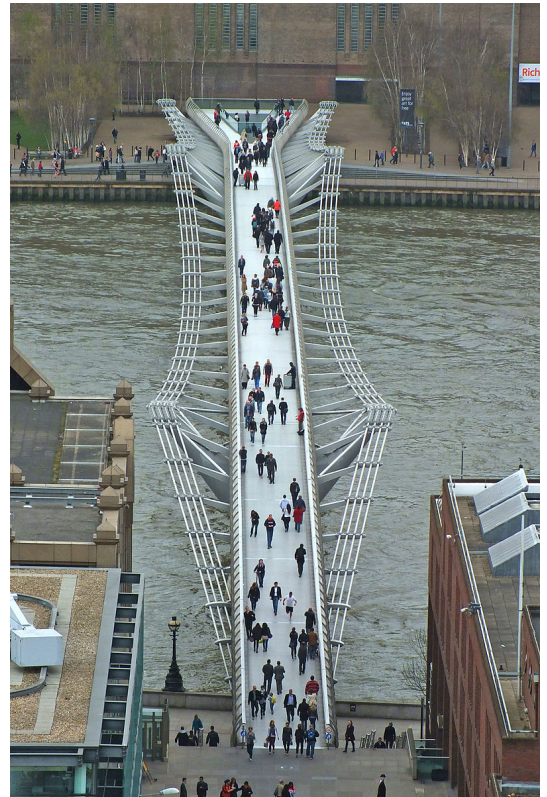
## Le Millenium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons, on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de prêtres, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui curent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\vec{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ .

À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $\underline{z} \in \mathbb{C}$ . Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .



## 1 Système élastique continu

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi la poutre de structure d'une passerelle est déformable en tout point. Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus, mais d'un pont de vue pratique l'étude des systèmes continus se ramène finalement à celle liée aux systèmes discrets : c'est la discrétisation des systèmes continus.

On négligera dans la suite du problème l'action de la pesanteur.

On considère un solide homogène, de masse volumique  $\rho$  constante, qui a la forme d'un cylindre de section  $S$  et d'axe  $(O, \vec{u}_x)$  horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme  $F$  de la force de traction permettant à un solide de longueur  $L$  de s'allonger de  $\Delta L$  est donné par la loi de Hooke :  $F = ES \frac{\Delta L}{L}$ , où  $E$  est une constante appelée module d'Young du matériau.

1. Quelle est l'unité d'un module d'Young? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

2. On note  $X(x, t)$  le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse  $x$ . Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos  $dx$  et en déduire la force de traction  $\vec{F}(x, t) = F(x, t) \vec{u}_x$  exercée par la partie « droite » (du côté des  $x$  croissants) sur la partie « gauche » (du côté des  $x$  décroissants) en fonction de  $E$ ,  $S$  et  $\frac{\partial X}{\partial x}$ . Écrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur  $dx$  et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $X(x, t)$ .

Afin de prendre en compte le mouvement transverse de la passerelle on introduit un axe vertical dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_y$  et on adopte le modèle de la corde. Dans ce modèle bidimensionnel, la passerelle est représentée à l'instant  $t$  par une ligne d'équation  $y(x, t)$  de masse linéique  $\mu$  uniforme.

En un point  $M(x, y)$  de la passerelle, on définit le vecteur unitaire tangent  $\vec{u}_r$  à la passerelle tel que

$$\vec{u}_r(x, t) = \cos[\alpha(x, t)] \vec{u}_x + \sin[\alpha(x, t)] \vec{u}_y.$$

Les déplacements sont contenus dans un plan vertical et sont de faible amplitude. On suppose donc qu'à chaque instant  $\alpha(x, t) \approx \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \ll 1$ . Sous ces hypothèses, la longueur de la corde ne varie pas et chaque tronçon infinitésimal de la passerelle n'est déplacé que selon la verticale. En chaque point  $M(x, y)$  de la passerelle règne à chaque instant une tension  $\vec{T}(x, t)$  portée par  $\vec{u}_r$ . Un tronçon de corde est représenté sur la figure I-1.

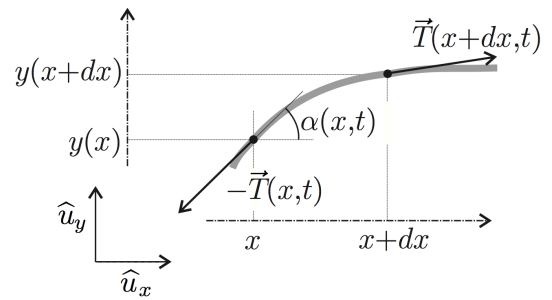


FIGURE I-1 – Tronçon de corde élastique

3. En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal de longueur  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension est indépendant de  $x$ . On le notera  $T_0$ .

4. Montrer alors que l'on peut écrire  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  où l'on exprimera  $c_\ell$  en fonction de  $T_0$  et  $\mu$ .

## 2 Modèle de la poutre élancée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur  $b$  selon  $(O, \vec{u}_z)$  et de hauteur  $h$  selon  $(O, \vec{u}_y)$ . Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire  $y(x)$  très petit devant  $h$  ou  $b$ , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section  $S$ , de masse volumique  $\rho$ , de module d'Young  $E$  et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  est  $I = \frac{1}{12}bh^3$ . L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

5. On cherche des solutions sous la forme  $y(x, t) = f(x)g(t)$ . De quel type d'onde s'agit-il? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure?

6. Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $f(x)$  et  $g(t)$ . En déduire que  $g(t)$  est une fonction périodique de pulsation  $\omega$  constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution  $y(x, t)$  correspondant à la situation étudiée?

7. Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes d'intégration. On précisera l'expression de  $\beta$  en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur  $L$  en appui simple à ses extrémités; les conditions aux limites s'écrivent alors

$$y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0,t} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=L,t} = 0.$$

8. Déterminer les pulsations propres  $\omega_n$  de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de  $L$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $\rho$ ,  $S$  et d'un entier  $n$  caractérisant le mode.

9. Différents modes de vibration d'une passerelle ont été représentés sur la figure I-2. Quels sont ceux correspondant à l'étude proposée dans cette section? Identifier de façon argumentée, pour chacun de ces modes, l'entier  $n$  le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur  $h = 1,07$  m (42 pouces) et de largeur  $b = 4$  m (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de longueurs  $L_1 = 70$  m,  $L_2 = 144$  m et  $L_3 = 108$  m. On donne la masse volumique de l'aluminium  $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et son module d'Young  $E = 69 \times 10^9 \text{ SI}$ .

10. Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale c'est-à-dire dans le sens de la largeur  $b$ . On motivera ses réponses par une argumentation précise.

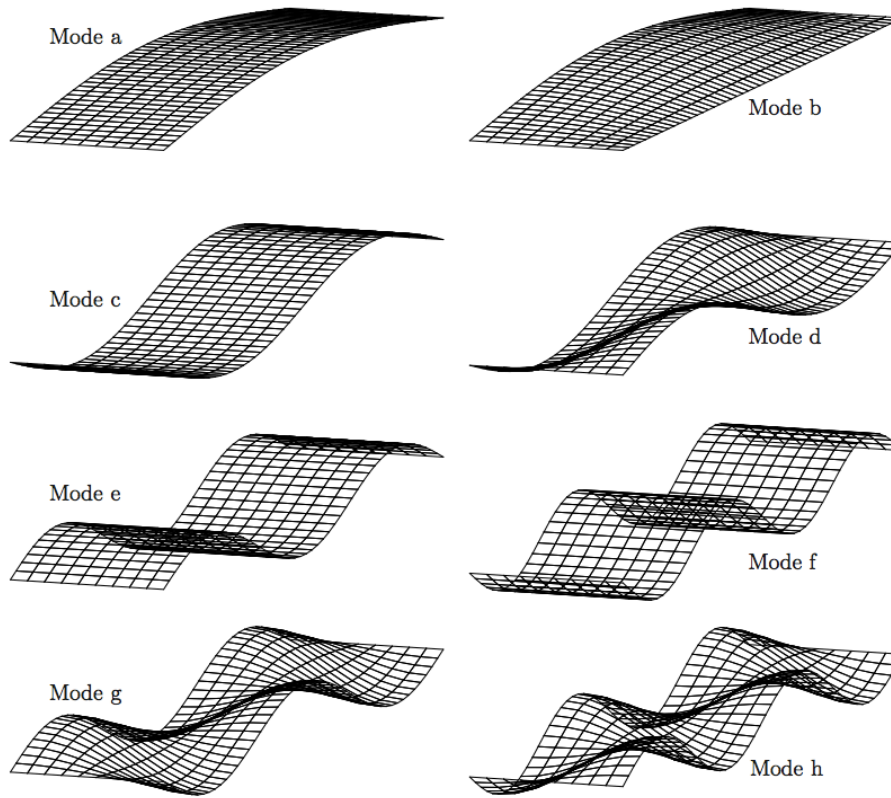


FIGURE I-2 – Différents modes de vibration d’une passerelle en appui libre aux deux extrémités



## Solution

### 1 Système élastique continu

1. Comme  $\frac{\Delta L}{L}$  est sans dimension, on a  $[E] = \frac{[F]}{L}$  : le module d'Young a la dimension d'une force surfacique — ou contrainte. Il a donc l'unité d'une pression.

**Le module d'Young s'exprime en pascal.**

2. Au repos, la tranche considérée est comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

Sous l'effet d'une traction, l'aire d'abscisse  $x$  se déplace à l'abscisse  $x' = x + X(x, t)$ , et l'aire d'abscisse  $x + dx$  se déplace à l'abscisse  $x'' = x + dx + X(x + dx, t)$ . La nouvelle longueur de la tranche est alors

$$\begin{aligned} dx' &= x'' - x = [x + dx + X(x + dx, t)] - [x + X(x, t)] \\ &= X(x + dx, t) - X(x, t) = dx + \frac{\partial X}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

La variation relative de sa longueur est donc

$$\frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

La force de traction exercée par la partie droite sur la partie gauche est donc donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F}(x, t) = ES \frac{dx' - dx}{dx} \vec{u}_x,$$

soit

$$\vec{F}(x, t) = ES \frac{\partial X}{\partial x} \vec{u}_x.$$

La tranche de longueur  $dx$  est soumise :

- à la force de traction  $-\vec{F}(x, t)$  exercée par la partie à gauche de l'abscisse  $x$  ;
- à la force de traction  $+\vec{F}(x + dx, t)$  exercée par la partie à droite de l'abscisse  $x + dx$ .

Son barycentre étant au premier ordre à l'abscisse

$$x_G = x + \frac{dx}{2} + X(x, t),$$

le principe fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche de longueur  $dx$  et de masse  $dm = \mu S dx$  s'écrit, en projection selon  $\vec{u}_x$  :

$$\mu S \ddot{x}_G = -F(x, t) + F(x + dx, t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx,$$

d'où

$$\mu \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Le déplacement  $X(x, t)$  vérifie donc l'équation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0.$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert, avec la célérité

$$c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}.$$

3. Considérons un tronçon compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , de masse  $dm = \mu d\ell$ . Son mouvement se faisant selon  $\vec{u}_y$ , le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection selon  $\vec{u}_x$  :

$$0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t).$$

Comme  $\cos \alpha(x, t) \approx 1$  et  $\cos \alpha(x + dx, t) \approx 1$ , on a

$$0 = T(x + dx, t) - T(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0.$$

**Le module de la tension est donc indépendant de  $x$  :**

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

4. Projetons le principe de la dynamique appliqué à la tranche de longueur  $d\ell$  selon  $\vec{u}_x$  :

$$\begin{aligned} \mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) = T_0 \sin \alpha(x + dx, t) \\ &\quad - T_0 \sin \alpha(x, t). \end{aligned}$$

On a

$$\sin \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

d'où

$$\mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 [\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)] = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

soit

$$\mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Avec  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , on a

$$\mu dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

soit au premier ordre en  $\frac{dy}{dx}$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}.$$

## 2 Modèle de la poutre élastique

5. Une solution de la forme  $y(x, t) = f(x)g(t)$  est une **onde stationnaire**.

Les ondes stationnaires apparaissent dans des milieux finis ou semi-infini avec au moins une conditions aux limites constante (comme un nœud de vibration par exemple).

6. En écrivant que  $y(x, t) = f(x)g(t)$  vérifie l'équation d'onde, on obtient

$$\rho S f(x) g''(t) + IE f^{(4)}(x) g(t) = 0,$$

soit

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = -\frac{IE}{\rho S} \frac{f^{(4)}(x)}{f(x)}.$$

Le premier terme étant indépendant de  $x$  et le second de  $t$ , ces deux termes sont égaux à une constante  $\alpha$ . On se ramène donc au système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} g''(t) - \alpha g(t) = 0 \\ f^{(4)}(x) + \frac{\rho S \alpha}{IE} f(x) = 0 \end{cases}$$

Selon le signe de  $\alpha$ , la solution de l'équation en  $g(t)$  est affine, exponentielle ou sinusoïdale. Les deux premières conduisent à une solution qui diverge ou qui tend vers 0, inacceptable. La fonction  $g(t)$  est donc nécessairement périodique.

Pour un mode de vibration :

- l'équation différentielle en  $g(t)$  est du second ordre, et sa détermination nécessite 2 constantes d'intégration;
- l'équation différentielle en  $f(x)$  est d'ordre 4, et sa détermination nécessite 4 constantes d'intégration.

La solution s'écrivant  $y(x, t) = g(t)f(x)$ , en regroupant deux des constantes du produit, on se ramène à **5 constantes** pour déterminer entièrement un mode de vibration.

7. La solution  $g(t)$  est périodique pour  $\alpha < 0$ . Posons  $\alpha = -\omega^2$ ; on a donc

$$g''(t) + \omega^2 g(t) = 0.$$

L'équation vérifiée par  $f(x)$  s'écrit alors

$$f^{(4)}(x) - \frac{\rho S \omega^2}{IE} f(x) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est

$$r^4 - \frac{\rho S \omega^2}{IE} = 0.$$

1. On a  $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$  et  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ .

On a donc

$$r^2 = \pm \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{IE}}.$$

Le cas  $r^2 = \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{IE}}$  conduit à

$$r_1 = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}$$

et

$$r_2 = -\left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}$$

le cas  $r^2 = -\sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{IE}}$  conduit à

$$r_3 = i \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}$$

et

$$r_4 = -i \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}$$

Posons  $\beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}$ . On a donc

$$r_1 = \beta; \quad r_2 = -\beta; \quad r_3 = i\beta \quad \text{et} \quad r_4 = -i\beta.$$

La fonction  $f(x)$  s'écrit donc comme une combinaison linéaire

$$f(x) = A' e^{\beta x} + B' e^{-\beta x} + C' e^{i\beta x} + D' e^{-i\beta x}.$$

on peut changer de base de solution<sup>1</sup> et choisir les fonctions trigonométriques :

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x)$$

avec

$$\beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}.$$

8. La condition  $y(0, t) = 0$  conduit à

$$f(0) = A + C = 0.$$

La condition  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0, t} = 0$  conduit à

$$-A\beta^2 + C\beta^2 = 0.$$

On a donc

$$C = -A \quad \text{et} \quad C = A.$$

On en déduit  $A = C = 0$ , et

$$f(x) = B \sin(\beta x) + D \sinh(\beta x).$$

La condition  $y(L, t) = 0$  conduit à

$$B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) = 0.$$

La condition  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L,t} = 0$  conduit à  

$$-B\beta^2 \sin(\beta L) + D\beta^2 \sinh(\beta L) = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) &= 0 \\ -B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned} B \sin(\beta L) &= 0 \\ D \sinh(\beta L) &= 0 \end{aligned}$$

Comme  $\sinh(\beta L) \neq 0$ , on a  $D = 0$ .

La solution  $B = D = 0$  étant à exclure (solution  $y(x, t) = 0$ ), on doit avoir  $B \neq 0$ , d'où  $\sin(\beta L) = 0$ . Le paramètre  $\beta$  ne peut donc prendre que des valeurs discrètes données par

$$\beta_n L = n\pi.$$

On a donc

$$\beta_n = \left( \frac{\rho S}{IE} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} = \frac{n\pi}{L}.$$

Les pulsations propres sont donc données par

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}.$$

**9.** L'étude se limite à des vibrations de la forme  $y(x, t)$  : l'amplitude est indépendante de la coordonnée  $z$  latérale. Tous les points sur une ligne perpendiculaire à l'axe de la passerelle (soit  $x = \text{cte}$ ) doivent donc avoir la même elongation  $y(x, t)$ . Cela exclut donc les modes b, d, g et h.

**Les modes a, c, e et f correspondent à l'étude proposée.**

Compte tenu de la question précédente, le mode  $n$  correspond à

$$y_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Le mode a présente deux nœuds ( $x = 0$  et  $x = L$ ) et un ventre : il correspond donc à  $n = 1$ .

Le mode c présente trois nœuds et deux ventres : il correspond donc à  $n = 2$ .

Le mode e présente 4 nœuds et 3 ventres : il correspond à donc  $n = 3$ .

Le mode f présente 5 nœuds et 4 ventre : il correspond donc à  $n = 4$ .

mode	a	c	e	f
$n$	1	2	3	4

**10.** Les fréquences propres  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$  sont données par

$$f_n = n^2 \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{IE}{\rho S}} = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{1}{12} \frac{bh^3 E}{\rho hb}} = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{h^2 E}{48\rho}}$$

On calcule

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{(1,07)^2 \times 69 \times 10^9}{48 \times 2700}}$$

soit

$$f_n = 2452,8 \frac{n^2}{L^2}.$$

Calculons les fréquences propres correspondant aux premiers modes pour chaque travée.

travée	$L_1$ (70 m)	$L_2$ (144 m)	$L_3$ (108 m)
$f_1$ (Hz)	0,50	0,12	0,21
$f_2$ (Hz)	<b>2,0</b>	0,46	0,84
$f_3$ (Hz)	4,6	1,1	<b>1,9</b>
$f_4$ (Hz)	8,4	<b>1,9</b>	3,4
$f_5$ (Hz)	13	2,9	5,3

On voit que la fréquence  $f \approx 2 \text{ Hz}$ , qui correspond à la fréquence d'excitation des pas des piétons, est accessible pour les trois travées : il s'agit du mode  $n = 2$  pour la travée  $L_1$ , du mode  $n = 4$  pour la travée  $L_2$  et du mode  $n = 3$  pour la travée  $L_3$ .

Les vibrations latérales sont des ondes selon  $z(x, t)$ . Leur étude est identique, en intervertissant  $h$  et  $b$  (y compris dans l'expression de  $I$ ). On particulier, les fréquences propres sont données par

$$f'_n = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{b^2 E}{48\rho}}$$

Les vibrations latérales se font en considérant la « longueur »  $b$  au lieu de  $L$  et la « largeur »  $L$  au lieu de  $b$ .

Les fréquences propres sont alors données par

$$f'_n = \frac{n^2 \pi}{b^2} \sqrt{\frac{h^2 E}{48\rho}} = n^2 \frac{\pi}{4^2} \sqrt{\frac{(1,07)^2 \times 69 \times 10^9}{48 \times 2700}}.$$

On calcule

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{(4)^2 \times 69 \times 10^9}{48 \times 2700}}$$

soit

$$f'_n = 9169,2 \frac{L^2}{n^2}.$$

Calculons les fréquences propres correspondant aux premiers modes pour chaque travée.

travée	$L_1$ (70 m)	$L_2$ (144 m)	$L_3$ (108 m)
$f'_1$ (Hz)	1,8	0,43	<b>0,74</b>
$f'_2$ (Hz)	7,4	1,8	3,1
$f'_3$ (Hz)	16	3,7	6,8
$f'_4$ (Hz)	29	6,8	12

L'excitation latérale est due à l'alternance des pas du pied gauche et du pied droit; c'est donc la fréquence d'un pied qui est à considérée, c'est-à-dire environ 1 Hz. On est assez proche du mode fondamental de la travée de 108 m. C'est ce mode de vibration qui a causé problème.