

Sujet d'entraînement

Ondes III

Vibrations musicales

Ce problème aborde les vibrations mécaniques sources de l'émission sonore des claviers à percussion. Dans tout le problème, on néglige l'influence des forces de pesanteur.

Données et notations :

Masse volumique de l'air	$\rho_a = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Vitesse du son dans l'air	$c = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'air	$\eta = 1,85 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Viscosité dynamique de l'eau	$\eta_e = 1,00 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'acier	$\rho = 7,80 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young de l'acier	$E = 19,5 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Masse volumique du bronze	$\rho = 8,70 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young du bronze	$E = 1,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Masse volumique du bois de palissandre	$\rho = 740 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young du bois de palissandre	$E = 1,2 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Nous étudions certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elle produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

Partie 1 — Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

On envisage pour l'instant les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L (fig. I-1). La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + \xi(x, t)$ et est soumise, de la part de la matière située à droite, à une force $\vec{F} = F(x, t) \vec{u}_x$.

On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell$ la longueur d'une tige de section S , il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES \frac{\delta\ell}{\ell_0}$.

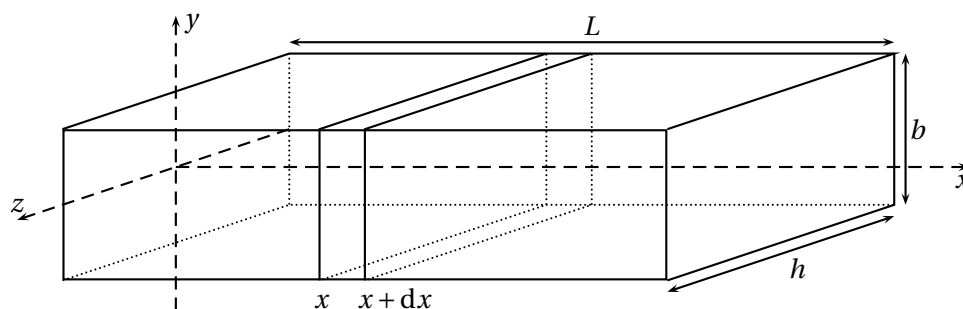


FIGURE I-1 – Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

1. Exprimer $F(x, t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $\xi(x, t)$.
2. Montrer que $\xi(x, t)$ obéit à l'équation de d'Alembert et exprimer la célérité c_ℓ des ondes longitudinales.
3. Rechercher des solutions sinusoïdales de la forme $\xi(x, t) = f(x)g(t)$ en explicitant les fonctions f et g . On introduira une pulsation temporelle ω et une pulsation spatiale k .
4. Les deux extrémités de la lame n'étant soumises à aucune force, montrer que seules certaines valeurs particulières, indexées par un entier n , sont accessibles à k . Exprimer les fréquences propres f_n de la lame.
5. Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 24,3 \text{ cm}$ émet un son de fréquence égale à 785 Hz . Montrer qu'il ne peut pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.

Partie 2 — Vibrations transversales

Dans les questions qui suivent, on analyse les petits mouvements transversaux de la lame (partie gauche de la figure 2). Les points situés au repos dans le plan médian de la lame, à l'abscisse x et à l'ordonnée $y = 0$, se trouvent à l'instant t du mouvement, à l'ordonnée $y(x, t)$. Dans le plan (Oxy) , ils sont alors représentés par une courbe formant avec l'horizontale un angle local $\alpha(x, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ et de courbure $C(x, t) \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. On rappelle que $C = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dL}$, où R désigne le rayon de courbure et dL la longueur infinitésimale d'un élément de courbe.

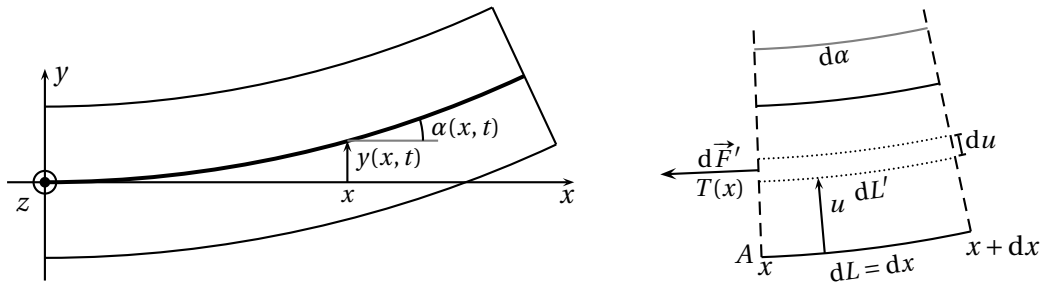


FIGURE I-2 – Mouvements transversaux d'une lame

Pour établir l'équation du mouvement, on adopte une double décomposition en éléments infinitésimaux (partie droite de la figure I-2). D'une part, on analyse le mouvement et les déformations d'une portion de lame occupant les abscisses $[x, x+dx]$ et dont les faces forment entre elles l'angle $d\alpha$. D'autre part, cet élément peut être considéré comme un assemblage de couches d'ordonnées $y(x, t) + u$ et d'épaisseur du , avec $u \in [-b/2, b/2]$.

6. En flexion, certaines couches se trouvent étirées et d'autres comprimées. On admet que le couche repérée par $u = 0$ conserve au cours du mouvement une longueur dx inchangée alors que les autres voient leur longueur passer de dx au repos à $dL' \neq dx$. Exprimer $\frac{dL' - dx}{dx}$ en fonction de u et C .

7. a) Quelle est l'aire dS de la section transversale de la couche d'épaisseur du ? En déduire la force $d\vec{F}$ que cette couche étirée subit, puis celle $d\vec{F}'$ qu'elle exerce réciproquement sur la matière située à gauche.

7. b) Vérifier la nullité de la résultante de ces forces sur la section entière de la lame.

7. c) Calculer le moment $M(x)$ part rapport à l'axe $(A, \vec{u}_z)$ des forces exercées par le tronçon de longueur dx sur la matière située à sa gauche, où A désigne le point d'abscisse x tel que $u = 0$.

8. Au travers d'une section de la lame s'exercent aussi des efforts transversaux : la partie de lame occupant les abscisses supérieures à x exerce sur celle se trouvant à sa gauche des efforts de résultante $\vec{T} \approx T(x, t) \vec{u}_y$. En admettant la relation

$$\frac{\partial M}{\partial x} \approx -T(x, t),$$

en déduire l'équation des mouvements transversaux sous la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\ell^2 b^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

9. On envisage maintenant des solutions telles que $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$. Préciser l'équation différentielle dont $f(x)$ est solution.

10. La fonction f s'exprime à l'aide de quatre constantes A, B, C et D sous la forme

$$f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + C \cosh(kx) + D \sinh(kx).$$

Donner, en la justifiant, la relation entre ω et k .

11. Dans cette question, les deux extrémités de la barre, d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, sont liées à des supports fixes par des charnières assurant des liaisons de type pivot parfait d'axes parallèles à $\vec{u}_z$. En déduire en fonction d'un entier n les valeurs k_n permises pour k puis les fréquences propres f_n .

12. Pour vibrer correctement, les lames des instruments de percussion reposent sans fixation rigide sur un support. Leurs extrémités ne sont donc soumises à aucune contrainte assujettissant leur position. Exprimer ces conditions en faisant intervenir deux des quatre grandeurs T , M , y et α introduites plus haut. En déduire quatre équations portant sur A , B , C et D . Leur résolution, non demandée, conduit aux fréquences propres

$$f_n = \frac{\pi b}{16\sqrt{3}L^2} c_\ell u_n^2 \quad \text{avec} \quad u_1 = 3,01; \quad u_2 = 5,00; \quad u_n \approx 2n + 1.$$

13. Expérimentalement, on a mesuré $f_2/f_1 = 2,71$, $f_3/f_1 = 5,15$, $f_4/f_1 = 8,43$ pour une lame de glockenspiel. Commenter ces valeurs. Calculer numériquement f_1 pour une lame d'épaisseur $b = 9,15$ mm et de longueur $L = 24,3$ cm correspondant à la note la plus grave de l'instrument.

14. Les lames d'un marimba basse sont constituées de bois de palissandre d'épaisseur $b = 2,31$ cm. Quelle valeur faut-il donner à L pour atteindre $f_1 = 65$ Hz?

15. Pour accorder un marimba, on entaille la partie inférieures de la lame de manière à lui donner la forme d'une voûte (figure 3). Qualitativement, cela a-t-il pour effet d'augmenter ou de diminuer la valeur L nécessaire pour obtenir une fréquence donnée? Le facteur de l'instrument ajuste aussi cette voûte de manière à obtenir $f_2/f_1 \approx 4$, ce qui produit un son plus harmonieux. Pourquoi ce second point est-il inutile sur un glockenspiel?

Partie 3 — Accord des résonateurs

Pour améliorer le rayonnement du son par le marimba, on place sous chaque lame un tube résonateur (fig. I-3). Ce tube cylindrique creux de diamètre D , d'axe (Oy) , présente une extrémité ouverte au voisinage de la lame (en $y = 0$) alors que l'autre, en $y = -H$, est rigidement fermée.

On note en représentation complexe $p(y = 0, t) = p_0 e^{j\omega t}$ la pression de l'onde acoustique produite en $y = 0$ par la vibration de la lame.

16. On recherche la pression acoustique dans le tuyau sous la forme

$$p(y, t) = A e^{j(\omega t - ky)} + B e^{j(\omega t + ky)}.$$

16.a) Rappeler sans démonstration la relation de dispersion des ondes acoustiques dans l'air.

16.b) Écrire, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation d'Euler reliant le champ des vitesses au gradient de pression.

16.c) En déduire l'expression de la vitesse acoustique $v(y, t)$ en fonction des données de l'énoncé.

17. Exprimer les constantes A et B en fonction des données du problème.

18. Quelle est la plus petite valeur de H correspondant à une résonance du tuyau pour une fréquence f donnée? Faire l'application numérique pour $f = f_1 = 65$ Hz. Y-a-t-il résonance de l'harmonique de rang 2 accordée sur $f_2 \approx 4f_1$?

19. Sur les marimbas de concert, la valeur de H peut être modifiée en déplaçant un bouchon rigide à l'intérieur du tube résonateur. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif?

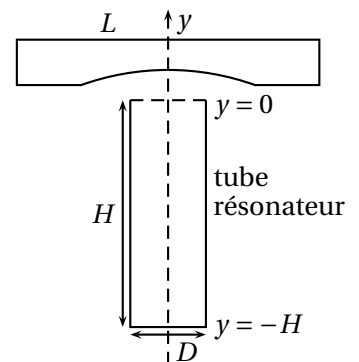


FIGURE I-3 – Lame de marimba présentant une voûte et munie d'un résonateur

Partie 4 — Vibration d'une cymbale

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier étudiées dans les questions précédentes, elles ne produisent par un son de hauteur bien définie. Bien qu'une cymbale possède une forme incurvée, nous les assimilons à de fines plaques planes circulaires de rayon R et d'épaisseur b contenues au repos dans le plan (Oxz) .

Dans ce cadre, les vibrations transversales consécutives à l'excitation de la surface par un choc obéissent à une équation voisine de celle établie pour les vibrations transversales d'une lame :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\ell^2 b^2}{12(1 - \sigma^2)} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma = 0,34.$$

20. On envisage la propagation d'une onde plane progressive du type

$$y(x, z, t) = y_0 \exp \left\{ i[\omega t - \vec{k} \cdot (x \vec{u}_x + z \vec{u}_z)] \right\}.$$

Établir la relation entre ω et $k = |\vec{k}|$. En déduire l'expression de la fréquence f en fonction de la longueur d'onde λ .

21. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ en fonction de la longueur d'onde λ . La propagation est-elle dispersive?

22. La figure 4 représente l'état vibratoire d'une cymbale de bronze à divers instants suivant une excitation ponctuelle. L'observation confirme-t-elle la réponse de la question précédente? Expliquer.

23. On a signalé sur la figure 4 des déformations de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 6$ mm et $\lambda_2 = 12$ mm. En exploitant les images, déterminer $v_\phi(\lambda_1)$ et $v_\phi(\lambda_2)$. Comparer quantitativement ces deux valeurs et confronter le résultat à la prédiction théorique de l'avant dernière question. Sachant que la cymbale est en bronze, déterminer son épaisseur b .

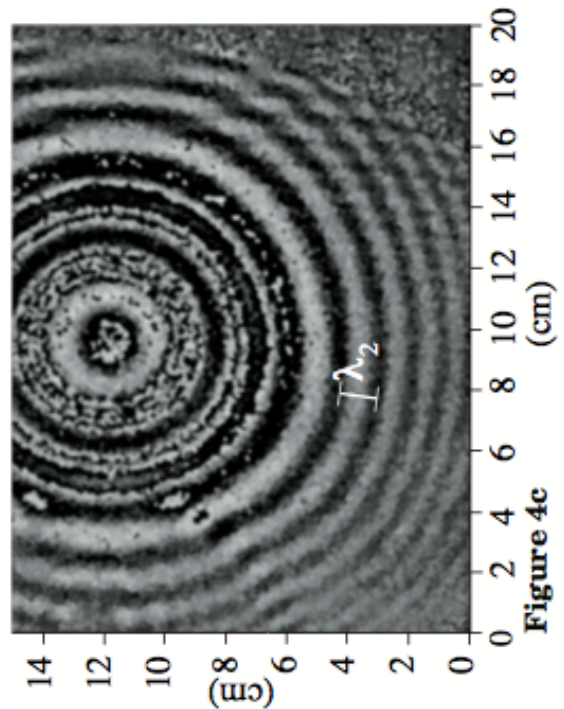
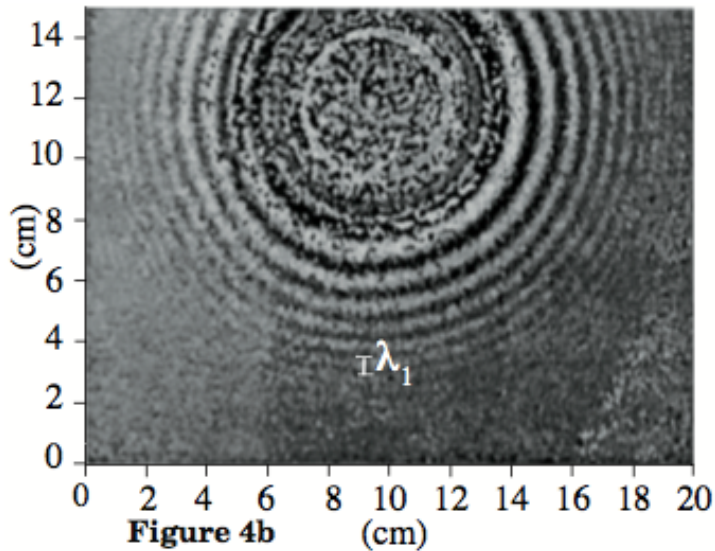
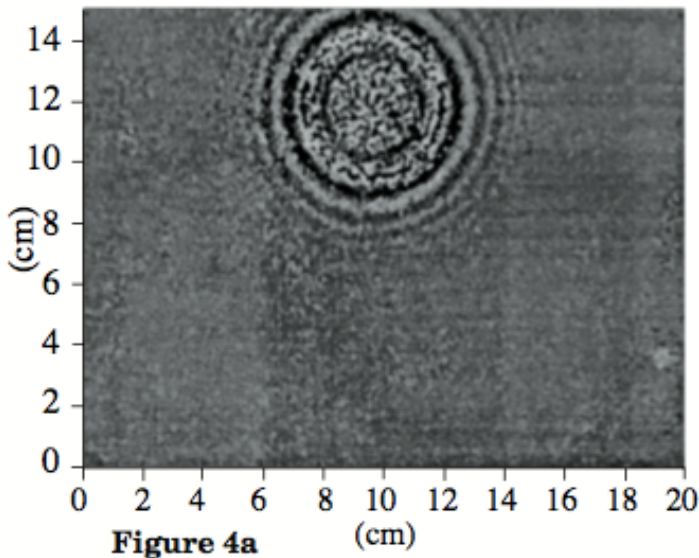


Figure 4a - 4b - 4c - État vibratoire d'une cymbale à trois instants suivant une excitation ponctuelle :

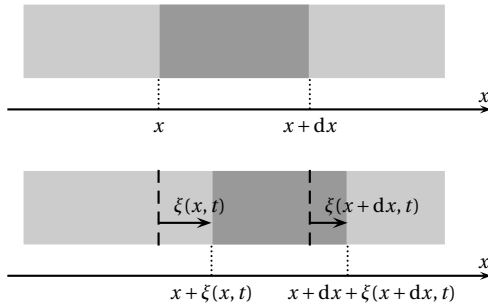
$t = 30\mu s, t = 60\mu s, t = 120\mu s$

Solution

Partie 1 — Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

1. Considérons une tranche comprise au repos entre x et $x + dx$, de longueur initiale $\ell_0 = dx$.

Sous l'effet de la force de traction, la section d'abscisse x se déplace en $x + \xi(x, t)$, et celle d'abscisse $x + dx$ se déplace en $x + dx + \xi(x + dx, t)$.



Sa longueur vaut alors

$$\ell = dx + \xi(x + dx, t) - \xi(x, t) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

La variation de longueur vaut $\delta = \ell - \ell_0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$; la variation relative s'écrit

$$\frac{\delta \ell}{\ell_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

La force exercée sur la surface $S = hb$ vérifie alors

$$F(x, t) = Ehb \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

2. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la tranche considérée, de masse $dm = \rho h b dx$, en projection selon $\vec{u}_x$:

$$\rho h b dx \frac{\partial^2 x_G}{\partial t^2} = F(x + dx, t) - F(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx,$$

soit

$$\rho h b dx \frac{\partial^2 x_G}{\partial t^2} = Ehb \frac{d^2 \xi}{dx^2} dx,$$

où x_G est l'abscisse du centre de gravité de la tranche, donnée au premier ordre par

$$x_G = \frac{x + \xi(x, t) + x + dx + \xi(x + dx, t)}{2} \approx x + \frac{dx}{2} + \xi(x, t)$$

On a donc $\frac{\partial^2 x_G}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ et

$$\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

d'où l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c_\ell = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

3. En posant $\xi(x, t) = f(x)g(t)$, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$f(x)g''(t) = c_\ell^2 f''(x)g(t)$$

soit

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c_\ell^2 \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Le premier terme est indépendant de x , le second de t , donc ces deux termes sont égaux à une même constante A . On se ramène à deux équations différentielles

$$g''(t) - Ag(t) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x) - \frac{A}{c_\ell^2} f(x) = 0.$$

La fonction $g(t)$ ne peut physiquement diverger (le domaine de variation du temps n'étant pas borné!), seule une solution sinusoïdale convient; il faut donc $A < 0$. En notant $A = -\omega^2$, on a donc

$$g''(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$g(t) = g_0 \cos(\omega t + \psi).$$

De plus on a

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c_\ell^2} f(x) = 0,$$

dont la solution générale est

$$f(x) = f_0 \cos(kx + \varphi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c_\ell}.$$

Les paramètres f_0 , g_0 , ψ et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales et aux limites.

4. En posant $\xi_0 = f_0 g_0$, l'élongation s'écrit

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi).$$

La force est alors donnée par

$$F(x, t) = Ehb \frac{\partial \xi}{\partial x} = -Ehb k \xi_0 \sin(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

L'extrémité $x = 0$ étant libre on a d'une part $F(0, t) = 0$, soit

$$Ehb k \xi_0 \sin \psi \cos(\omega t + \varphi) = 0; \quad \forall t.$$

Il faut donc $\sin \psi = 0$; on peut prendre $\psi = 0$.

L'extrémité $x = L$ étant libre, on a de même $F(L, t) = 0$, soit

$$Ehb k \xi_0 \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi) = 0; \quad \forall t.$$

Il faut donc $\sin(kL) = 0$, soit $k_n L = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$.

La pulsation spatiale est donc quantifiée et ne peut prendre que les valeurs

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\omega_n = 2\pi f_n = k_n c_\ell$, on en déduit les fréquences propres de la lame :

$$f_n = n \frac{c_\ell}{2L}.$$

5. Avec les données fournies, on obtient $c_\ell = 5000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La fréquence du mode fondamental est donnée par $f_1 = \frac{c_\ell}{2L} = 10,3 \text{ kHz}$, les autres modes vérifient $f_n = n f_1 > f_1$. Une fréquence de 785 Hz, inférieure à f_1 , ne peut donc pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.

Nous allons donc étudier les vibrations transversales.

Partie 2 — Vibrations transversales

6. La couche de rayon R a pour longueur $dL = dx$; celle de rayon $R - u$ a pour longueur dL' . On a donc

$$d\alpha = \frac{dx}{R} = \frac{dL'}{R - u}$$

d'où

$$dL' = \left(1 - \frac{u}{R}\right) dx$$

et

$$dL' - dx = -\frac{u}{R} dx = -Cu dx,$$

d'où

$$\frac{dL' - dx}{dx} = -Cu.$$

7. 7.a) La section transversale de la couche d'épaisseur du a pour aire $dS = h du$.

Elle subit la force

$$dF = E dS \frac{dL' - dx}{dx},$$

soit

$$dF = -EhCu du.$$

Elle exerce la même force sur la partie située à sa gauche : $dF' = dF$, soit

$$dF' = -EhCu du.$$

7.b) La résultante de la force subie par une section de la lame est

$$F = -EhC \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u du = -EhC \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0.$$

On a bien $F = 0$.

7.c) Le moment élémentaire qui s'exerce sur la couche d'épaisseur du vaut

$$d\vec{M} = \vec{AP} \wedge dF \vec{u}_x = u \vec{u}_y \wedge dF \vec{u}_x = -u dF \vec{u}_z.$$

En projection selon $\vec{u}_z$, le moment qui s'exerce sur toute la section vaut

$$M(x) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} EhCu^2 du = 2EhC \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{2}} = \frac{2EhC}{3} \frac{b^3}{8}$$

d'où

$$M(x, t) = \frac{EhCb^3}{12}.$$

8. L'effort transversal est donné par

$$T(x, t) = -\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{EhCb^3}{12} \frac{\partial C}{\partial x},$$

avec

$$C = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

d'où

$$T(x, t) = -\frac{Ehb^3}{12} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la tranche étudiée, en projection selon $\vec{u}_y$:

$$\rho h b dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) - T(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

soit

$$\rho h b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{Ehb^3}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{Eb^2}{12\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

soit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\ell^2 b^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

9. En cherchant une solution de la forme $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$, on obtient

$$-\omega^2 f(x) + \frac{c_\ell^2 b^2}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} = 0.$$

10. Avec l'expression proposée, on a

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = k^4 f(x)$$

et la relation précédente conduit à

$$\omega^2 = \frac{c_\ell^2 b^2}{12} k^4. \quad (1)$$

11. L'extrémité en $x = 0$ étant fixe, on doit avoir $y(0, t) = 0$, doit

$$f(0) = A + C = 0. \quad (2)$$

La liaison pivot étant parfaite en $x = 0$, on a $M(0, t) = 0$. Comme

$$M(x, t) = \frac{EhC(x, t)b^3}{12} = \frac{Ehb^3}{12} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

la condition d'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = 0,$$

soit $f''(0) = 0$.

On a

$$f''(x) = -k^2 A \cos(kx) - k^2 B \sin(kx) + k^2 C \cosh(kx) + k^2 D \sinh(kx) \quad (3) \text{ soit}$$

et la condition s'écrit

$$A - C = 0. \quad (4)$$

Des équations (2) et (4) on déduit $A = C = 0$, et

$$f(x) = B \sin(kx) + D \sinh(kx).$$

On a des conditions de la même nature à l'extrémité $x = L$, ce qui se traduit par

$$f(L) = 0 \quad \text{et} \quad f''(L) = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} B \sin(kL) + D \sinh(kL) &= 0 \\ -B \sin(kL) + D \sinh(kL) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc d'une part $D \sinh(kL) = 0$, d'où $D = 0$ et $f(x) = B \sin(kx)$.

La relation $B \sin(kL) = 0$ entraîne soit $B = 0$ ce qui est impossible car on aurait $f(x) = 0$, soit $\sin(kL) = 0$, ce qui implique l'existence de modes propres $k_n L = n\pi$. On a donc

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}.$$

La relation (1) s'écrit alors

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{c_\ell b}{2\sqrt{3}} \frac{\pi^2}{L^2} n^2$$

d'où les fréquences propres

$$f_n = \frac{c_\ell b \pi}{4\sqrt{3} L^2} n^2.$$

12. Les extrémités n'étant soumises à aucune contrainte, on a d'une part

$$T(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad T(L, t) = 0$$

et d'autre part

$$M(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad M(L, t) = 0.$$

Comme

$$M(x, t) = \frac{Ehb^3}{12} C = \frac{Ehb^3}{12} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

et

$$T(x, t) = -\frac{Ehb^3}{12} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

les conditions aux limites s'écrivent

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, y) = 0,$$

$$f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(L) = 0,$$

ainsi que

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, y) = 0,$$

soit

$$f'''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'''(L) = 0.$$

Avec (3) on calcule

$$\begin{aligned} f'''(x) &= k^3 A \sin(kx) - k^3 B \cos(kx) + k^3 C \sinh(kx) \\ &\quad + k^3 D \cosh(kx). \end{aligned}$$

Après simplifications, les 4 conditions précédentes conduisent à

$$\begin{aligned} -A + C &= 0 \\ -A \cos(kL) - B \sin(kL) + C \cosh(kL) + D \sinh(kL) &= 0 \\ -B + D &= 0 \\ A \sin(kL) - B \cos(kL) + C \sinh(kL) + D \cosh(kL) &= 0 \end{aligned}$$

13. La formule théorique conduit à

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{u_2^2}{u_1^2} = 2,76; \quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{u_3^2}{u_1^2} = 5,41$$

et

$$\frac{f_4}{f_1} = \frac{u_4^2}{u_1^2} = 8,94.$$

Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les valeurs expérimentales.

Les fréquences des modes propres $n > 1$ ne sont pas des multiples de la fréquence de mode fondamental; la hauteur du son perçu est moins nette que lorsque le spectre est harmonique (fréquences des harmoniques

multiples de celle du fondamental), ce qui justifie la taille de la barre expliquée aux questions suivantes.

On calcule $f_1 = \frac{\pi \times 9,15 \times 10^{-3}}{16\sqrt{3}(0,243)^2} \times 5000(3,01)^2$, soit

$$f_1 = 795 \text{ Hz}.$$

Cette valeur est proche de la valeur donnée à la question 5.

14. On calcule $L = \sqrt{\frac{\pi \times 2,31 \times 10^{-2}}{16\sqrt{3} \times 65}} \sqrt{\frac{1,2 \times 10^{10}}{740}} (3,01)^2$, d'où

$$L = 1,21 \text{ m}.$$

15. On a $f_1 \propto \frac{b}{L^2}$. Pour une fréquence f_1 donnée, une diminution de b doit être accompagnée d'une diminution de L .

La fréquence du mode fondamental de la lame de glockenspiel est nettement plus élevée que celle du marimba : $f_1 = 795 \text{ Hz}$. On aurait alors $f_2 \approx 4f_1 = 3,2 \text{ kHz}$, qui représente un son bien plus aigu (moins bien perçu que dans le cas du marimba). De plus — mais ce n'était pas dit dans l'énoncé — les harmoniques du glockenspiel s'estompent rapidement; il n'est donc pas nécessaire de chercher à modifier la fréquence des modes non fondamentaux du glockenspiel.

Partie 3 — Accord des résonateurs

16.a) La surpression vérifie l'équation de d'Alembert. On en déduit directement, avec la forme proposée (somme de deux ondes progressives harmoniques de même pulsation) la relation de dispersion

$$\omega = kc.$$

16.b) Dans l'air, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho_a \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p.$$

16.c) En régime harmonique, l'équation d'Euler s'écrit

$$i\omega\rho_a \vec{v} = -\left[-jkAe^{j(\omega t - lky)} + jkB e^{j(\omega t + ky)}\right] \vec{u}_y,$$

d'où comme $\omega = kc$:

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_a c} \left[Ae^{j(\omega t - ky)} - B e^{j(\omega t + ky)} \right] \vec{u}_y.$$

17. La condition sur la pression à l'extrémité ouverte en $x = 0$ s'écrit

$$Ae^{j\omega t} + B e^{j\omega t} = p_0 e^{j\omega t}$$

soit $A + B = p_0$.

L'extrémité $y = -H$ étant rigidement fermée, on a $\vec{v}(-H, t) = \vec{0}$, soit

$$Ae^{jkH} - B e^{-jkH} = 0.$$

On en déduit $B = Ae^{2jkH}$, d'où

$$A = \frac{p_0}{1 + e^{2jkH}} = \frac{p_0 e^{-jkH}}{e^{jkH} + e^{-jkH}}$$

soit

$$A = \frac{p_0 e^{-jkH}}{2 \cos(kH)}.$$

On a alors

$$B = \frac{p_0 e^{2jkH}}{1 + e^{2jkH}} = \frac{p_0 e^{jkH}}{e^{jkH} + e^{-jkH}}$$

soit

$$B = \frac{p_0 e^{jkH}}{2 \cos(kH)}.$$

La pression s'écrit alors

$$\begin{aligned} p(y, t) &= \frac{p_0}{2 \cos(kH)} \left[e^{j[\omega t - k(y+H)]} + e^{j[\omega t + k(y+H)]} \right] \\ &= \frac{p_0}{2 \cos(kH)} e^{j\omega t} \left[e^{jk(y+H)} + e^{-jk(y+H)} \right] \end{aligned}$$

soit

$$p(y, t) = p_0 \frac{\cos[k(y+H)]}{\cos(kH)} e^{j\omega t}.$$

18. Il y a résonance quand $\cos(kH) = 0$, soit pour

$$kH = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

La plus petite valeur de H correspond à

$$H = \frac{\pi}{2k} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi f}{c},$$

soit

$$H = \frac{c}{4f}.$$

Pour $f = 65 \text{ Hz}$ (fondamental de la barre de marimba), on obtient

$$H = 1,33 \text{ m}.$$

Pour une longueur H donnée, les autres fréquences de résonances sont données par

$$k_n = (2n+1) \frac{\pi}{2H} = \frac{2\pi f_n}{c}$$

soit

$$f_n = (2n+1) \frac{c}{4H} = (2n+1) f_1.$$

Seuls les harmoniques impairs présentent une résonance. Il n'y a donc pas de résonance pour la fréquence $4f_1$.

19. Modifier la valeur de H permet d'ajuster la fréquence de résonance du tube, afin qu'elle coïncide avec celle de la barre (si la température de l'air varie, la célérité c dans l'air varie, ce qui modifie la fréquence de résonance du tube pour une longueur donnée).

Partie 4 — Vibration d'une cymbale

20. Notons $\vec{k} = k_x \vec{u}_x + k_z \vec{u}_z$ le vecteur d'onde (l'onde se propage dans le plan (Oxz) de la cymbale).

On a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k_x^4 y$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = k_z^4 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} = k_x^2 k_z^2 y.$$

L'équation d'onde proposée s'écrit alors

$$-\omega^2 + \frac{c_\ell^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} (k_x^4 + k_z^4 + 2k_x^2 k_z^2) = 0.$$

Avec $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, on a

$$\omega^2 = \frac{c_\ell^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} k^4.$$

On a donc

$$\omega = \frac{c_\ell b}{2\sqrt{3}\sqrt{(1-\sigma^2)}} k^2,$$

soit

$$2\pi f = \frac{c_\ell b}{2\sqrt{3}\sqrt{(1-\sigma^2)}} \frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

La fréquence vaut donc

$$f = \frac{\pi c_\ell b}{\sqrt{3}\sqrt{(1-\sigma^2)}} \frac{1}{\lambda^2}.$$

21. La vitesse de phase est définie par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = f\lambda$$

d'où

$$v_\varphi = \frac{\pi c_\ell b}{\sqrt{3}\sqrt{(1-\sigma^2)}} \frac{1}{\lambda}.$$

La vitesse de phase dépend de la longueur d'onde : **la propagation est dispersive.**

22. Sur les clichés, le « paquet d'ondes » s'étale au cours du temps, ce qui est caractéristique d'une propagation dispersive.

23. La longueur d'onde λ_1 se propage sur 4 cm pendant 30 μs , d'où $v_\varphi(\lambda_1) = \frac{4 \times 10^{-2}}{30 \times 10^{-6}}$ soit

$$v_\varphi(\lambda_1) = 1,3 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La longueur d'onde λ_2 se propage sur 4 cm pendant 60 μs , d'où $v_\varphi(\lambda_2) = \frac{4 \times 10^{-2}}{60 \times 10^{-6}}$ soit

$$v_\varphi(\lambda_2) = 0,67 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le résultat théorique implique

$$\frac{v_\varphi(\lambda_2)}{v_\varphi(\lambda_1)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2},$$

ce qui est bien en accord avec les documents.

L'épaisseur est donnée par

$$b = \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi} \frac{v_\varphi}{c_\ell} \lambda = \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi} v_\varphi \sqrt{\frac{\rho}{E}} \lambda.$$

Pour λ_1 on calcule

$$b = \frac{\sqrt{3(1-0,34^2)}}{\pi} \frac{4 \times 10^{-2}}{30 \times 10^{-6}} \sqrt{\frac{8,7 \times 10^3}{1,1 \times 10^{11}}} 6 \cdot 10^{-3}$$

d'où $b = 1,2 \text{ mm}$.