

## Sujet d'entraînement

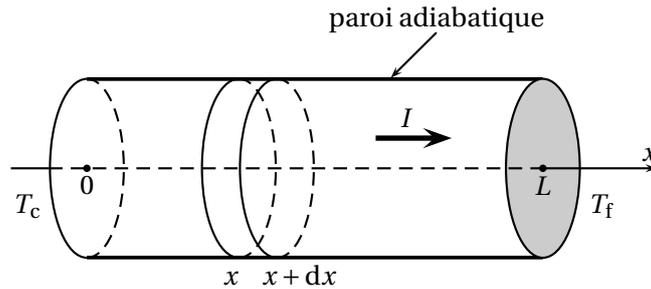
---

### Deuxième problème : thermoélectricité

#### Partie 1 — Effet Joule

On considère un conducteur homogène, cylindrique, d'axe  $Ox$ , de section  $\Sigma$  et de longueur  $L$ . Il est en contact avec deux sources de chaleur : une source chaude qui impose la température  $T_c$  à l'extrémité  $x = 0$  et une source froide qui impose la température  $T_f$  à l'extrémité  $x = L$ .

La surface latérale du conducteur est calorifugée.



Ce conducteur est également parcouru par un courant électrique d'intensité  $I$  selon l'axe  $Ox$ , uniformément réparti sur la section du conducteur.

On note  $R$  la résistance électrique du cylindre entre  $x = 0$  et  $x = L$ .

On se place dans le cas du régime stationnaire unidimensionnel : la température est de la forme  $T(x)$ .

On note  $\lambda$  la conductivité thermique du cylindre, supposée indépendante de la température.

1. Rappeler la loi de Fourier donnant l'expression du vecteur densité de flux thermique  $\vec{J}_q(M, t)$ .
2. En effectuant un bilan d'énergie pour la portion de conducteur comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , établir l'équation différentielle vérifiée par  $T(x)$ .
3. En déduire l'expression de  $T(x)$  en fonction de  $x$ ,  $T_c$ ,  $T_f$ ,  $\lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $L$ ,  $R$  et  $I$ .
4. Déterminer l'expression de la puissance thermique  $\mathcal{P}_c$  reçue par le conducteur de la part de la source chaude, et la puissance thermique  $\mathcal{P}_f$  reçue par le conducteur de la part de la source froide.

Exprimer  $\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_f$  et commenter le résultat obtenu.

#### Partie 2 — Forces thermodynamiques

##### 1 Conduction thermique pure

Le conducteur n'est maintenant pas parcouru par un courant électrique :  $I = 0$ . Le problème est toujours unidimensionnel en régime stationnaire :  $T(x)$ .

5. Montrer que  $\vec{J}_q = J_q(x) \vec{e}_x$  est uniforme dans le barreau.

6. Montrer que l'entropie reçue par la tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  vaut

$$\delta S_e = \left[ \frac{J_q}{T(x)} - \frac{J_q}{T(x + dx)} \right] \Sigma dt.$$

7. En déduire que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit

$$\sigma = J_q \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right) = \vec{J}_q \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{T} \right).$$

8. Le barreau, de longueur  $L = 10$  cm, est en cuivre de conductivité thermique  $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Ses extrémités sont maintenues aux températures  $T(x = 0) = 293 \text{ K}$  et  $T(x = L) = 273 \text{ K}$ .

Calculer numériquement  $\sigma$  au milieu du barreau.

## 2 Conduction électrique pure

Le même barreau, de conductivité électrique  $\gamma$ , est maintenant parcouru par un courant électrique de vecteur densité de courant  $\vec{J}_e = J_e(x) \vec{e}_x$  supposé uniforme sur une section droite du barreau.

On se place en régime stationnaire. On note  $\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$  le champ électrique dans le conducteur et  $V(x)$  le potentiel électrique. On rappelle la relation locale  $\vec{E} = -\text{grad } V$ .

La température  $T$  est uniforme dans le barreau.

9. Montrer que  $\vec{J}_e$  est uniforme dans tout le conducteur.

10. Calculer la puissance cédée par le champ  $\vec{E}$  à la tranche de conducteur comprise entre les sections d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

En déduire l'expression de  $\sigma$ , entropie créée par unité de temps et de volume.

11. Mettre  $\sigma$  pour la forme  $\sigma = \vec{J}_e \cdot \vec{X}_e$ , où  $\vec{X}_e$  sera exprimée en fonction de  $V$  et  $T$ .

12. Le barreau conducteur est parcouru par un courant de 100 mA; sa section vaut  $\Sigma = 1 \text{ mm}^2$ . Il est constitué de cuivre de conductivité électrique  $\gamma = 5,9 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . La température du barreau vaut  $T = 293 \text{ K}$ .

Calculer numériquement  $\sigma$ .

## 3 Forces thermodynamiques

Soit  $\vec{J}_i$  le flux d'une grandeur extensive (énergie thermique pour  $\vec{J}_q$ , charge électrique pour  $\vec{J}_e$ ). On associe la force thermodynamique  $\vec{X}_i$  telle que la production d'entropie par unité de volume et de temps sous l'effet de ce flux s'écrit

$$\sigma = \vec{J}_i \cdot \vec{X}_i.$$

13. D'après l'étude précédente, donner l'expression :

- de la force thermodynamique  $\vec{X}_q$  relative à la conduction thermique seule en fonction de  $T$ ;
- de la force thermodynamique  $\vec{X}_e$  relative à la conduction électrique seule en fonction de  $V$  et  $T$ .

14. À l'équilibre thermodynamique, le flux  $\vec{J}_q$  (respectivement  $\vec{J}_e$ ) est nul.

Montrer que  $T$  (respectivement  $V$ ) est alors uniforme. Que peut-on dire de la force thermodynamique correspondante?

Pour qu'il y ait transport de chaleur ou de charges, il faut donc être hors d'équilibre : la force thermodynamique  $\vec{X}$  n'est alors plus nulle.

Si l'on n'est pas trop loin de l'équilibre, la théorie de la réponse linéaire de Onsager considère que la densité  $\vec{J}_q$  (resp.  $\vec{J}_e$ ) est proportionnelle à la force thermodynamique.

## Partie 3 — Phénomènes thermoélectriques couplés

Lorsque le milieu est simultanément le siège de phénomènes de conduction électrique et de conduction thermique, on admet que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit

$$\sigma = \vec{J}_q \cdot \vec{X}_q + \vec{J}_e \cdot \vec{X}_e.$$

On parle alors de couplage thermoélectrique. Il est à noter que ce résultat est absolument non trivial, contrairement à ce que l'on pourrait penser.

### 1 Théorie de la réponse linéaire de Onsager

Dans le cadre d'un couplage thermoélectrique, si l'on n'est pas trop loin de l'équilibre, les densités de courant s'expriment linéairement en fonction des forces thermodynamiques<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \vec{J}_q &= L_{qq} \vec{X}_q + L_{qe} \vec{X}_e \\ \vec{J}_e &= L_{eq} \vec{X}_q + L_{ee} \vec{X}_e \end{cases}$$

avec la relation dite de Onsager  $L_{qe} = L_{eq}$ .

1. Si vous n'avez pas su établir les expressions des forces thermodynamiques :  $\vec{X}_q = \overrightarrow{\left(\frac{1}{T}\right)}$  et  $\vec{X}_e = -\frac{\overrightarrow{\text{grad } V}}{T}$ .

Les coefficients  $L_{qq}$ ,  $L_{ee}$  et  $L_{qe}$  sont des coefficients phénoménologiques. Ceci constitue la théorie de la réponse linéaire mise au point par le physicien norvégien Lars Onsager en 1931, prix Nobel de chimie en 1938.

On se propose de calculer les coefficients de Onsager en fonction des données expérimentales dont on dispose sur le milieu étudié :

- sa conductivité thermique  $\lambda$  ;
- sa conductivité électrique  $\gamma$  ;
- son pouvoir thermoélectrique, ou coefficient Seebeck,  $\varepsilon$ , défini plus loin.

**15.** Pour un conducteur à température uniforme, montrer que l'on retrouve la loi d'Ohm locale. En déduire l'expression de  $L_{ee}$  en fonction de  $\gamma$  et  $T$ .

**16.** Pour un conducteur où ne circule aucun courant électrique et dont la température n'est pas uniforme, montrer que l'on retrouve la loi de Fourier. En déduire l'expression de la conductivité thermique  $\lambda$  en fonction des coefficients  $L_{ee}$ ,  $L_{qq}$ ,  $L_{qe}$  et de la température  $T$ .

Montrer qu'il existe alors au sein du conducteur un champ électrique  $\vec{E}$  tel que

$$\vec{E} = \varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T$$

où  $\varepsilon$  est le coefficient de Seebeck. Donner l'expression de ce coefficient  $\varepsilon$  en fonction de  $L_{ee}$ ,  $L_{qe}$  et  $T$ .

**17.** En déduire l'expression de  $\vec{J}_q$  et  $\vec{J}_e$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $T$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}} T$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} V$ .

**18.** En déduire la relation

$$\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \varepsilon T \vec{J}_e.$$

Commenter. On supposera cette relation valable dans toute la suite.

## 2 Effet Seebeck : mesure de température

L'effet Seebeck est à la base du fonctionnement des thermocouples. Le principe de la mesure d'une température à l'aide d'un thermocouple est indiqué sur la figure I-1 : la jonction (ou soudure) chaude ( $j$ ) de deux conducteurs A et B de nature différente est portée à la température  $T_c$ , tandis que les jonctions de référence ( $j_1$ ) et ( $j_2$ ) sont maintenues à la même température de référence  $T_{\text{réf}}$  prise usuellement à  $0^\circ\text{C}$ .

Entre les jonctions froides, il apparaît une f.é.m.  $e_{AB}$  fonction de la différence de température  $T_c - T_{\text{réf}}$ . Cette f.é.m. est comptée positivement si elle a tendance à faire circuler un courant dans le sens de A vers B comme indiqué sur la figure I-1. Pour mesurer cette f.é.m. on réalise en ( $j_1$ ) et ( $j_2$ ) deux soudures avec des fils de connexion utilisant un même métal conducteur comme le cuivre.

On mesure la d.d.p.  $V_M - V_N$  aux extrémités M et N de ces deux fils pris à la température ambiante  $T_a$  à l'aide d'un microvoltmètre électronique de très grande impédance.

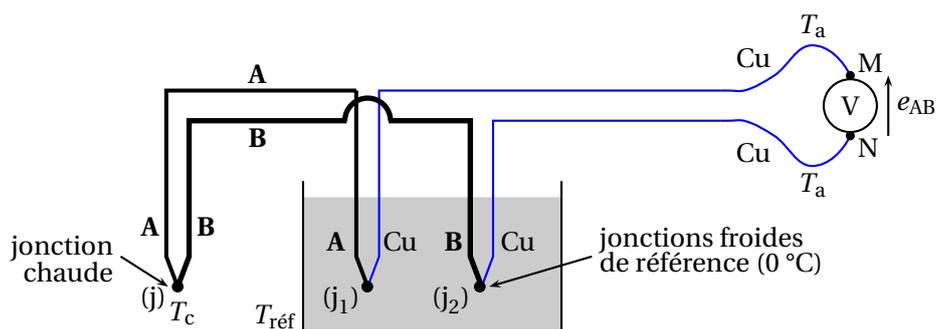


FIGURE I-1 – Thermocouple avec température de référence

**19.** Comment peut-on réaliser au laboratoire, sous pression atmosphérique normale, une source idéale de chaleur à la température de référence de  $0^\circ\text{C}$  ?

**20.** On désigne par  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  et  $\varepsilon_{\text{Cu}}$  les coefficients Seebeck respectifs des conducteurs A, B et du cuivre.

Montrer que si le voltmètre est de résistance infinie, on a

$$V_M - V_N = \int_{T_{\text{réf}}}^{T_c} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) dT = e_{AB}$$

dont la valeur ne dépend pas de la température ambiante  $T_a$ .

21. On peut en première approximation, et dans un intervalle restreint de température, considérer que  $e_{AB}$  est fonction affine de  $T_c$ . En réalité  $e_{AB}$  n'est en général pas fonction linéaire de l'écart de température. Pour quelle raison?

22. Application numérique : pour le thermocouple nickel-chrome/nickel-aluminium, dit de type K, que l'on peut utiliser de 0 à 1100 °C, on relève, lorsque les jonctions de référence sont à 0 °C, les valeurs des f.é.m., pour différentes valeurs de  $T_c$  :

$T$	450 °C	500 °C	550 °C
$e_{AB}$	18513 $\mu\text{V}$	20640 $\mu\text{V}$	22772 $\mu\text{V}$

En déduire la valeur de  $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B$ .

23. Pour des mesures courantes de température, on peut n'utiliser que la soudure chaude à la température  $T_c$  et connecter directement les extrémités aux points de connexion du microvoltmètre considérés comme une source froide à la température locale  $T_f$  (figure I-2).

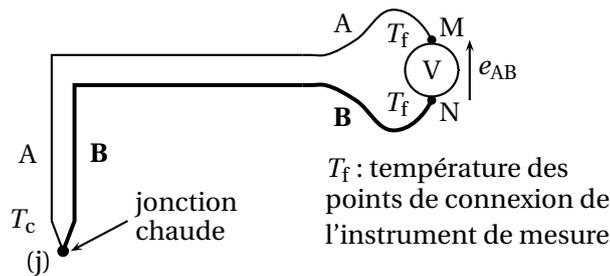


FIGURE I-2 – Thermocouple sans température de référence

Montrer qu'il est alors nécessaire de compenser cette température pour ramener la mesure à la référence 0 °C. Les progrès réalisés en électronique permettent de disposer d'appareils à affichage numérique à compensation électronique intégrée; ils affichent directement la température.

### 3 Effet Peltier

L'effet Peltier est l'effet thermique, autre que l'effet Joule, qui résulte du passage d'un courant électrique à travers une jonction (soudure) entre deux métaux A et B à la même température.

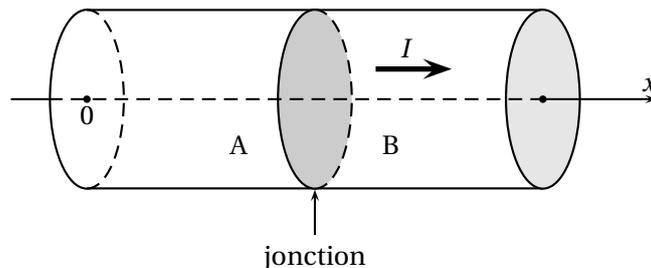


FIGURE I-3 – Effet Peltier à une jonction

24. Quelle est la relation entre  $\vec{J}_q$  et  $\vec{J}_e$  pour un conducteur à température uniforme?

Une jonction entre deux conducteurs cylindriques A et B de nature différente est en contact par sa surface latérale avec une source idéale de chaleur. Elle est ainsi maintenue à la température  $T$ . Elle est traversée du conducteur A vers le conducteur B par un courant électrique d'intensité  $I$  (figure I-3).

25. Montrer que la puissance thermique  $\mathcal{P}_P$  reçue à la jonction (c'est-à-dire reçue par le circuit conducteur à travers les sections amont et aval de la jonction supposée de très faible épaisseur) vaut

$$\mathcal{P}_P = \Pi_{AB} I,$$

où  $\Pi_{AB}$  est le coefficient Peltier pour les deux conducteurs A et B. Exprimer  $\Pi_{AB}$  en fonction de la température  $T$  et du coefficient Seebeck  $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B$  pour les deux conducteurs A et B.

26. Conclure quant au signe de la puissance thermique  $\mathcal{P}_P$  dégagée par effet Peltier au niveau d'une jonction parcourue par un courant électrique d'intensité  $I$ .

## Solution

### Partie 1 — Effet Joule

1. Loi de Fourier :  $\vec{J}_q(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ , où  $\lambda$  est la conductivité thermique du milieu.

2. Considérons comme système la portion de conducteur comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . En régime stationnaire, le bilan d'énergie s'écrit

$$0 = J_q(x)\Sigma dt - J_q(x+dx)\Sigma dt + \delta RI^2 dt,$$

où  $\delta R$  est la résistance électrique de la portion de conducteur.

En notant  $\rho$  la résistivité électrique du milieu, la résistance s'écrit, en prenant en compte l'énergie reçue par effet Joule,

$$\delta R = \frac{\rho dx}{\Sigma}.$$

La résistance totale du barreau étant donnée par  $R = \frac{\rho L}{\Sigma}$ , on peut écrire  $\delta R = R \frac{dx}{L}$ .

Le bilan s'écrit alors

$$0 = -\frac{dJ_q}{dx} \Sigma dx + RI^2 \frac{dx}{L}.$$

La loi de Fourier s'écrivant  $J_q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$ , on en déduit l'équation différentielle

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} \Sigma + \frac{R}{L} I^2.$$

3. On a

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{RI^2}{\lambda \Sigma L},$$

d'où

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{RI^2}{\lambda \Sigma L} x + A \quad \text{et} \quad T(x) = -\frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} x^2 + Ax + B,$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes à déterminer à partir des conditions aux frontières.

On a d'une part

$$T(0) = T_c = B.$$

D'autre part

$$T(L) = T_f = B.$$

d'où

$$A = \frac{T_f - T_c}{L} + \frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} L.$$

On a donc

$$T(x) = -\frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} x^2 + \frac{T_f - T_c}{L} x + \frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} Lx + T_c.$$

La température dans le barreau s'écrit

$$T(x) = T_c - \frac{T_c - T_f}{L} x + \frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} x(L-x).$$

4. Le vecteur densité de courant thermique est donnée par

$$J_q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda(T_c - T_f)}{L} - \frac{RI^2}{2\Sigma} + \frac{RI^2}{\Sigma} \frac{x}{L}.$$

La puissance thermique reçue de la part de la source chaude, en  $x = 0$ , est donnée par

$$\mathcal{P}_c = J_q(0)\Sigma,$$

soit

$$\mathcal{P}_c = \frac{\lambda \Sigma}{L} (T_c - T_f) - \frac{RI^2}{2}.$$

Compte tenue de l'orientation, la puissance thermique reçue de la part de la source froide en  $x = L$  est donnée par

$$\mathcal{P}_f = -J_q(L)\Sigma,$$

soit

$$\mathcal{P}_f = -\frac{\lambda \Sigma}{L} (T_c - T_f) - \frac{RI^2}{2}.$$

On calcule

$$\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_f = -RI^2.$$

On retrouve le bilan de puissance appliqué au barreau en régime stationnaire :

$$0 = \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_j$$

où  $\mathcal{P}_j = RI^2$  est la puissance reçue par effet Joule.

### Partie 2 — Forces thermodynamiques

#### 1 Conduction thermique pure

5. Le bilan d'énergie appliqué à la portion de conducteur comprise entre  $x$  et  $x + dx$  s'écrit, en régime stationnaire

$$0 = J_q(x)\Sigma dt - J_q(x+dx)\Sigma dt = -\frac{dJ_q}{dx} \Sigma dx dt.$$

On a donc  $\frac{dJ_q}{dx} = 0$  : **la densité de courant thermique  $J_q$  est uniforme dans le barreau.**

6. Le transfert thermique à travers l'interface à l'abscisse  $x$ , à la température  $T(x)$ , s'accompagne d'une entropie reçue  $\frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x)}{T(x)}$ ; de même l'entropie reçue à travers la section d'abscisse  $x + dx$  à la température  $T(x+dx)$  est  $\frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x+dx)}{T(x+dx)}$ . Finalement pour la tranche considérée,

$$\delta S_e = \frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x)}{T(x)} + \frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x+dx)}{T(x+dx)}.$$

Comme

$$\delta Q_{\text{reçu}}(x) = J_q(x)\Sigma dt = J_q\Sigma dt$$

et

$$\delta Q_{\text{reçu}}(x+dx) = -J_q(x+dx)\Sigma dt = -J_q\Sigma dt,$$

On a

$$\delta S_e = \left[ \frac{J_q}{T(x)} - \frac{J_q}{T(x+dx)} \right] \Sigma dt.$$

7. Le bilan d'entropie pour la tranche comprise entre  $x$  et  $x+dx$  s'écrit

$$dS = \delta S_e + \delta S_c.$$

En régime stationnaire,  $dS = S(t+dt) - S(t) = 0$ , d'où

$$\begin{aligned} \delta S_c &= -\delta S_e = J_q \left[ \frac{1}{T(x+dx)} - \frac{1}{T(x)} \right] \Sigma dt \\ &= J_q \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right) \Sigma dx dt. \end{aligned}$$

Le volume de la tranche étant  $d\tau = \Sigma dx$ , l'entropie créée par unité de temps et de volume est donnée par

$$\sigma = \frac{\delta S_c}{\Sigma dx dt} = J_q \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right).$$

Dans le cas unidimensionnel, on a  $\vec{J}_q = J_q \vec{e}_x$  et  $T(M) = T(x)$ , soit  $\vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{T} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right) \vec{e}_x$ . On peut donc écrire

$$\sigma = J_q \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right) = \vec{J}_q \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{T} \right).$$

8. On a

$$\sigma = J_q \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \right) = -\frac{J_q}{T^2} \frac{dT}{dx} \quad \text{avec} \quad J_q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

soit

$$\sigma = \frac{\lambda}{T^2(x)} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2.$$

► On remarque que  $\sigma > 0$  si la température n'est pas uniforme, ce qui traduit le caractère irréversible de la conduction thermique.

Comme  $J_q$  est uniforme le profil de température est affine dans le barreau, et

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T(L) - T(0)}{L}.$$

La température au milieu du barreau est donnée par

$$T(L/2) = \frac{T(L) + T(0)}{2}.$$

On a donc

$$\sigma = \frac{4\lambda}{L^2} \left( \frac{T(L) - T(0)}{T(L) + T(0)} \right)^2.$$

On calcule  $\sigma = 200 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ .

► On peut écrire  $\sigma = 200 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## 2 Conduction électrique pure

9. En régime stationnaire, la conservation de la charge électrique s'écrit

$$\text{div } \vec{J}_e = 0 = \frac{dJ_e}{dx}.$$

**Le vecteur densité de courant  $\vec{J}_e$  est donc uniforme dans le conducteur.**

10. La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière valant  $\vec{J}_e \cdot \vec{E}$ , la tranche considérée reçoit la puissance

$$\delta \mathcal{P}_e = \vec{J}_e \cdot \vec{E} \Sigma dx.$$

Le bilan enthalpique en régime stationnaire pour cette tranche s'écrit

$$0 = \delta W + \delta Q$$

où le travail reçu par la force électrique est donné par  $\delta W = \mathcal{P}_e dt$ . On a donc

$$\delta Q = -\vec{J}_e \cdot \vec{E} \Sigma dx dt.$$

L'entropie reçue est alors donnée par

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T} = -\frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T} \Sigma dx dt.$$

Le bilan d'entropie  $0 = \delta S_e + \delta S_c$  en régime stationnaire conduit à

$$\delta S_c = \sigma \Sigma dx dt = \frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T} \Sigma dx dt.$$

On en déduit le taux volumique de création d'entropie :

$$\sigma = \frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T}.$$

11. Avec  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ , l'expression précédente s'écrit

$$\sigma = -\frac{\vec{J}_e \cdot \vec{\text{grad}} V}{T}.$$

On peut donc écrire

$$\sigma = \vec{J}_e \cdot \vec{X}_e \quad \text{avec} \quad \vec{X}_e = -\frac{\vec{\text{grad}} V}{T}$$

12. La loi d'Ohm locale s'écrit  $\vec{J}_e = \gamma \vec{E}$ , d'où

$$\sigma = \frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T} = \frac{J_e^2}{\gamma T}.$$

L'intensité étant donnée par  $I = J_e \Sigma$ , on a

$$\sigma = \frac{I^2}{\gamma T \Sigma^2}.$$

On calcule  $\sigma = 0,58 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### 3 Forces thermodynamiques

13. Récapitulons les résultats précédents.

Force thermodynamique pour la conduction thermique seule :

$$\vec{X}_q = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

Force thermodynamique pour la conduction électrique seule :

$$\vec{X}_e = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}.$$

#### 14. Équilibre thermodynamique : conduction thermique seule

On a  $\vec{J}_q = \vec{0}$ . D'après la loi de Fourier,  $\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ , donc  $\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$ . On en déduit

$$\vec{X}_q = -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}.$$

#### Équilibre thermodynamique : conduction électrique seule

On a  $\vec{J}_e = \vec{0}$ . D'après la loi d'Ohm,  $\vec{J}_e = \gamma \vec{E}$ , donc  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$ . On en déduit

$$\vec{X}_e = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T} = \vec{0}.$$

À l'équilibre thermodynamique, les forces thermodynamiques sont nulles.

## Partie 3 — Phénomènes thermoélectriques couplés

### 1 Théorie de la réponse linéaire de Onsager

15. La densité de courant électrique vérifie l'équation

$$\vec{J}_e = -\frac{L_{eq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T - L_{ee} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}. \quad (1)$$

La température étant uniforme,  $\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$ . On en déduit

$$\vec{J}_e = -L_{ee} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}.$$

On retrouve donc la loi d'Ohm locale

$$\vec{J}_e = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$$

avec  $\gamma = \frac{L_{ee}}{T}$ .

16. Le vecteur densité de courant thermique vérifie l'équation

$$\vec{J}_q = -\frac{L_{qq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T - L_{qe} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}. \quad (2)$$

Si aucun courant électrique ne circule, on a  $\vec{J}_e = \vec{0}$  et l'équation (1) s'écrit

$$\vec{0} = -\frac{L_{eq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T - L_{ee} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T},$$

d'où

$$-\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T} = \frac{L_{eq}}{L_{ee} T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

L'équation (2) s'écrit alors

$$\vec{J}_q = -\frac{L_{qq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T + \frac{L_{qe}^2}{L_{ee} T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

En identifiant avec  $\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$  on en déduit

$$\lambda = \frac{1}{T^2} \left( L_{qq} - \frac{L_{qe}^2}{L_{ee}} \right).$$

Le gradient de température entraîne l'existence dans le conducteur d'un champ électrique donné par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{TL_{eq}}{L_{ee} T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T,$$

soit

$$\vec{E} = \varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{L_{qe}}{TL_{ee}}.$$

17. Nous pouvons exprimer les coefficients phénoménologiques en fonction des caractéristiques du milieu.

On a montré à la question 15

$$L_{ee} = \gamma T.$$

D'après la question précédente, on a

$$L_{qe} = \varepsilon \gamma T^2.$$

De l'expression de  $\lambda$  établie à la question précédente on peut déduire

$$L_{qq} = \lambda T^2 + \frac{L_{qe}^2}{L_{ee}} = \lambda T^2 \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 T^4}{\gamma T}$$

soit

$$L_{qq} = \lambda T^2 + \varepsilon^2 \gamma T^3.$$

On en déduit

$$\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \varepsilon T \left[ -\varepsilon \gamma \overrightarrow{\text{grad}} T - \gamma \overrightarrow{\text{grad}} V \right]$$

et

$$\vec{J}_e = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V - \varepsilon \gamma \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

18. D'après les relations précédentes, on a

$$\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \varepsilon T \vec{J}_e.$$

La loi de Fourier n'est valable qu'en l'absence de courant électrique. Le terme  $\varepsilon T \vec{J}_e$  traduit un transfert thermique dans le sens du courant électrique si  $\varepsilon > 0$  et dans le sens contraire si  $\varepsilon < 0$ .

## 2 Effet Seebeck : mesure de température

19. Un **mélange eau-glace** permet de réaliser une source idéale de chaleur à la température de  $0\text{ }^\circ\text{C}$ .

20. Si le voltmètre est de résistance infinie, l'intensité électrique est nulle dans le circuit, soit  $\vec{J}_e = \vec{0}$ .

De la relation précédente on déduit alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = -\varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

On peut donc écrire

$$\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = -\varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot d\vec{\ell}$$

d'où

$$dV = -\varepsilon dT.$$

On peut décomposer le calcul de la différence de potentiel :

$$V_M - V_N = \int_N^{j_2} dV + \int_{j_2}^j dV + \int_j^{j_1} dV + \int_{j_1}^M dV.$$

On utilise la relation  $dV = -\varepsilon dT$  en utilisant le coefficient  $\varepsilon$  relatif au métal constituant chaque segment :

$$\begin{aligned} V_M - V_N &= - \int_{T_a}^{T_{\text{réf}}} \varepsilon_{\text{Cu}} dT - \int_{T_{\text{réf}}}^{T_e} \varepsilon_B dT - \int_{T_e}^{T_{\text{réf}}} \varepsilon_A dT \\ &\quad - \int_{T_{\text{réf}}}^{T_a} \varepsilon_{\text{Cu}} dT \\ &= - \int_{T_{\text{réf}}}^{T_e} \varepsilon_B dT - \int_{T_e}^{T_{\text{réf}}} \varepsilon_A dT, \end{aligned}$$

soit

$$e_{AB} = V_M - V_N = \int_{T_{\text{réf}}}^{T_c} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) dT.$$

► Il faut utiliser deux conducteurs de même nature (par exemple en cuivre) pour connecter l'appareil de mesure afin que  $V_M - V_N$  ne dépende pas de la température ambiante  $T_a$ .

21. A priori, les coefficients  $\varepsilon_A$  et  $\varepsilon_B$  dépendent de la température; la loi  $e_{AB}(T)$  n'est alors pas affine.

► Si  $\varepsilon_A$  et  $\varepsilon_B$  sont indépendants de  $T$ , on peut écrire  $e_{AB}(T) = (\varepsilon_A - \varepsilon_B)(T - T_{\text{réf}})$ .

22. En considérant que l'on puisse écrire  $e_{AB}(T) = (\varepsilon_A - \varepsilon_B)(T - T_{\text{réf}})$ , on calcule  $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B$  pour les différentes températures.

$T$	$450\text{ }^\circ\text{C}$	$500\text{ }^\circ\text{C}$	$550\text{ }^\circ\text{C}$
$\varepsilon_{AB}$	$41,1\text{ }\mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$	$41,3\text{ }\mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$	$41,4\text{ }\mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$

La réponse n'est pas complètement affine. On peut prendre  $\varepsilon_{AB} = 41,3\text{ }\mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$ .

23. On décompose le long des conducteurs :

$$V_M - V_N = \int_N^j dV + \int_j^M dV$$

soit

$$V_M - V_N = - \int_{T_f}^{T_c} \varepsilon_B dT - \int_{T_f}^{T_c} \varepsilon_A dT.$$

On a donc

$$V_M - V_N = \int_{T_f}^{T_c} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) dT, .$$

**La tension mesurée dépend de  $T_c$ .**

## 3 Effet Peltier

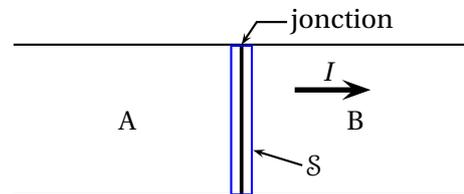
24. On a montré à la question 18 que

$$\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \varepsilon T \vec{J}_e.$$

Si la température est uniforme, on a  $\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$ , d'où

$$\vec{J}_q = \varepsilon T \vec{J}_e. \quad (3)$$

25. On considère comme système  $S$  une fine tranche englobant la jonction.



Le transfert thermique reçu par le système est

$$\delta Q = J_{Q,A} \Sigma dt - J_{Q,B} \Sigma dt,$$

soit compte tenu de la relation (3), on peut écrire

$$\delta Q = \varepsilon_A T J_e \Sigma dt - \varepsilon_B T J_e \Sigma dt = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) T I dt.$$

La puissance thermique  $\mathcal{P}_P = \delta Q/dt$  reçue par la jonction est alors donnée par

$$\mathcal{P}_P = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) T I,$$

soit

$$\mathcal{P}_P = \Pi_{AB} I \quad \text{avec} \quad \Pi_{AB} = T \varepsilon_{AB}.$$

► La relation (3) indique d'un courant électrique entraîne l'apparition d'un courant thermique. Il est nécessaire d'avoir une jonction entre deux matériaux différents pour que cette effet se traduit par le dégagement (algébrique) d'une puissance thermique : la densité de courant électrique  $\vec{J}_e$  étant continue, c'est la variation de  $\varepsilon$  qui permet d'avoir une densité de courant thermique  $\vec{J}_q$  discontinue d'après  $\vec{J}_q = \varepsilon T \vec{J}_e$ .

26. Considérons  $I > 0$ .

Si  $\varepsilon_A > \varepsilon_B$  on a  $\mathcal{P}_P > 0$  et la jonction absorbe de la chaleur.

Si  $\varepsilon_A < \varepsilon_B$  on a  $\mathcal{P}_P < 0$  et la jonction libère de la chaleur.

► Le comportement dépend du sens du courant. Si  $I < 0$ , on obtient le comportement inverse.