

Sujet d'entraînement

Acoustique

Partie I : étude simplifiée des fréquences propres

On étudie une onde acoustique se propageant dans un tuyau, décrite par le champ de vitesse $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$. La pression dans le tuyau est donnée par $P(x, t) = P_0 + p_1(x, t)$, où $p_1(x, t)$ est la surpression acoustique. La masse volumique de l'air est donnée par $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$.

On travaille dans le cadre de l'approximation acoustique.

On rappelle les expressions de coefficients de réflexion en amplitude pour la surpression acoustique et la vitesse entre deux milieux (impédance acoustique Z' pour $x < 0$ et Z'' pour $x > 0$) :

$$r_v = \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \quad \text{et} \quad r_p = \frac{Z'' - Z'}{Z' + Z''} = -r_v.$$

L'impédance acoustique est définie par le rapport

$$Z = \frac{p_1(x, t)}{v_1(x, t)}.$$

Partie 1 — Réflexion à une extrémité

On considère un tuyau de longueur L , de section S constante, d'axe Ox (avec $0 \leq x \leq L$).

Une onde sonore plane progressive harmonique se propage dans le sens des x croissants :

$$\underline{p}_i(x, t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)}.$$

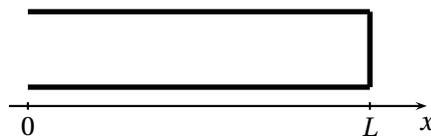
On étudie l'onde réfléchie sur l'extrémité $x = L$ et l'onde résultante.

On note $\underline{v}_i(x, t)$ l'onde de vitesse correspondante.

1. Donner l'expression de $\underline{v}_i(x, t)$ en fonction de p_0 , ω , k et des caractéristiques du milieu de propagation. On note μ_0 la masse volumique moyenne de l'air et c la vitesse de propagation des ondes sonores progressives dans l'air.

1 Extrémité fermée

L'extrémité $x = L$ est fermée.



2. Que peut-on dire du champ des vitesses $v_1(x, t)$ en $x = L$?

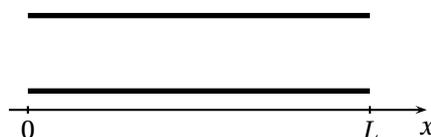
3. En déduire la valeur du coefficient de réflexion r_v , puis du coefficient r_p .

4. Donner alors l'expression des ondes réfléchies $\underline{p}_r(x, t)$ et $\underline{v}_r(x, t)$.

5. En déduire l'expression de l'onde de pression $p(x, t)$ et de l'onde de vitesse $v(x, t)$ régnant dans le tuyau. Commenter.

2 Extrémité ouverte

L'extrémité $x = L$ est ouverte.



On considère que l'extrémité ouverte, mettant l'air intérieur au tuyau au contact avec l'atmosphère à la pression P_0 , impose la condition $P(x = L, t) = P_0$.

6. Que vaut la surpression acoustique à l'extrémité fermée $p_1(x = L, t)$?
En déduire l'expression des coefficients de réflexion r_p et r_v .
7. Donner alors l'expression des ondes réfléchies $\underline{p}_r(x, t)$ et $\underline{v}_r(x, t)$.
8. En déduire l'expression de l'onde de pression $p(x, t)$ et de l'onde de vitesse $v(x, t)$ régnant dans le tuyau.
Commenter.

Partie 2 — Modes propres

Les deux extrémités du tuyau de longueur L peuvent être chacune soit fermée, soit ouverte, ce qui donne trois configurations possibles.

9. Pour chaque configuration, montrer que parmi les ondes stationnaires précédentes, seuls certains modes propres peuvent être observés, dont on précisera :

- l'expression de la longueur d'onde λ_n en fonction de L ;
- l'expression de la fréquence f_n en fonction de c et L .

Représenter graphiquement le champ de surpression pour les trois configurations, pour le fondamental d'une part et pour l'harmonique suivant (dont on indiquera le rang) d'autre part.

10. Une flûte traversière est un tuyau de section constante, de longueur $L = 65$ cm.



10.a) Quelle est la nature de la condition à l'extrémité opposée à l'embouchure?

10.b) Lorsque tous les plateaux sont fermés, l'instrument émet un *do* de fréquence $f_1 = 261,6$ Hz. En déduire la nature de la condition au niveau de l'autre extrémité (l'embouchure).

10.c) En forçant le souffle, on peut émettre l'harmonique correspondant au mode propre suivant. Quel est le rapport de sa fréquence avec celle du fondamental?

11. La longueur d'une clarinette est $L = 60$ cm.



Reprendre les questions précédentes¹ sachant que le son le plus grave émis par une clarinette est le *ré* de fréquence $f_1 = 146,8$ Hz.

Partie II : étude plus complète des fréquences propres ; impédance ramenée

Partie 1 — Impédance ramenée

Le tuyau sonore est fermé en $x = L$ par un matériau d'impédance acoustique \underline{Z}_c définie en régime harmonique par

$$\underline{Z}_c = \frac{p(L)}{\underline{v}(L)}.$$

On considère une onde incidente $\underline{p}_i = p_0 e^{i(\omega t - kx)}$; elle donne naissance à une onde réfléchie $\underline{p}_r(x, t)$.
On définit le coefficient de réflexion en $x = L$ par

$$\underline{r} = \frac{\underline{p}_r(L, t)}{\underline{p}_i(L, t)}.$$

12. Déterminer l'expression de l'onde réfléchie $\underline{p}_r(x, t)$ en fonction de \underline{r} .

1. Dans le cas de la clarinette, l'émission de l'harmonique suivant est facilitée à l'aide d'une clef commandant l'ouverture d'un petit trou près du bec.

13. En déduire l'expression des ondes de vitesse incidente $\underline{v}_i(x, t)$ et réfléchi $\underline{v}_r(x, t)$ en fonction, entre autres, de ρ_0 , μ_0 et μ .

14. Déterminer \underline{r} en fonction de $\frac{Z_c}{\mu_0 c}$.
Interpréter la valeur de \underline{r} pour $Z_c = \mu_0 c$.

15. On définit l'impédance ramenée

$$\underline{Z}(x) = \frac{p(x)}{\underline{v}(x)}.$$

15.a) Déterminer l'expression de $\underline{Z}(x)$ en fonction de $\mu_0 c$, $\frac{Z_c}{\mu_0 c}$ et $\tan k(L - x)$.

La notion d'impédance ramenée permet de calculer l'impédance acoustique en un point d'abscisse x en fonction de l'impédance de charge à l'extrémité du tuyau.

15.b) À quelle valeur de Z_c correspond l'extrémité fermée?

En déduire l'expression de l'impédance ramenée $\underline{Z}(x)$, puis son expression $\underline{Z}(0)$ au niveau de l'embouchure $x = 0$. Retrouver l'expression des longueurs d'onde des modes propres du tuyau fermé aux deux extrémités établies en I.2.1.

15.c) À quelle valeur de Z_c correspond l'extrémité ouverte?

En déduire l'expression de l'impédance ramenée $\underline{Z}(x)$, puis son expression $\underline{Z}(0)$ au niveau de l'embouchure $x = 0$. Retrouver l'expression des longueurs d'onde des modes propres du tuyau ouvert aux deux extrémités et du tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre établies en I.2.1.

15.d) Que vaut l'impédance ramenée dans le cas où $Z_c = \mu_0 c$?

Partie 2 — Fréquences propres d'un tuyau sonore

1 Modèle simplifié de la flûte

L'extrémité $x = L$ est considérée comme ouverte, ainsi que l'extrémité $x = 0$.

16. Quelle valeur ce dispositif impose-t-il à l'impédance ramenée en $x = 0$?

En déduire l'équation vérifiée par k .

17. Déterminer alors les valeurs k_n vérifiées par les modes propres, puis leur fréquence f_n en fonction de c et L .

2 Prise en compte de l'impédance de rayonnement

18. Calculer le vecteur densité de flux de puissance sonore $\vec{\Pi}$ à l'extrémité $x = L$ ouverte d'un instrument à vent. En quoi ce résultat est-il paradoxal?

Modéliser une extrémité fermée par $Z_c = \infty$ conduit à un résultat correct. En revanche, si $Z_c \ll \mu_0 c$ pour une extrémité ouverte, l'approximation $Z_c = 0$ conduit à un résultat peu réaliste.

L'impédance acoustique à l'extrémité d'un tuyau ouvert est appelée *impédance de rayonnement*; en première approximation, elle est donnée, pour un tuyau cylindrique de section circulaire de rayon a , par

$$\underline{Z}_c = \mu_0 c \left[\frac{(ka)^2}{4} + i \cdot 0,61ka \right].$$

19. Une flûte moderne à un diamètre de 19 mm; sachant que les notes qu'elle peut émettre ont des fréquences comprises entre 200 Hz et 3 kHz, que peut-on dire de la grandeur ka ?

On prendra $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vitesse du son dans l'air.

20. En déduire une expression approchée de l'impédance ramenée $\underline{Z}(x)$ de la flûte en fonction de μ_0 , c , k , L et a .

21. L'impédance au niveau de l'embouchure étant nulle, en déduire l'équation vérifiée par k dont les solutions donnent les modes propres.

22. On considérant que pour le fondamental, $kL \ll 1$, montrer que la flûte se comporte alors comme un tuyau ouvert idéal (impédance de rayonnement nulle), de longueur $L' = L + \Delta L$, où ΔL — que l'on exprimera en fonction de a — est un terme prenant en compte l'impédance de rayonnement.

23. L'instrument est-il toujours harmonique²?

24. En notant l'impédance de rayonnement $\underline{Z}_c = r + ix$, montrer que la partie réelle, si elle n'influe quasiment pas sur les fréquences propres, est nécessaire pour expliquer le rayonnement de l'instrument.

On notera $\underline{v}(L, t) = v_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ et on calculera la puissance moyenne transmise en $x = L$.

25. On prend en compte la partie réelle de l'impédance de rayonnement :

$$\underline{Z}_c = \mu_0 c \left[\frac{(ka)^2}{4} + i \cdot 0,61ka \right].$$

Donner l'expression de l'impédance ramenée au niveau de l'embouchure ($x = 0$).

Cette dernière ne pouvant s'annuler, les résonances se produisent quand le module de l'impédance d'entrée est minimum.

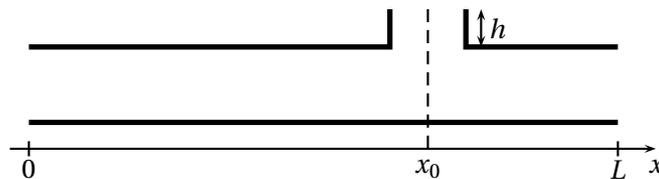
La flûte moderne (Boehm) est un tuyau de longueur $L = 67$ cm, de 19 mm de diamètre. La vitesse du son dans l'air est $c = 343$ m · s⁻¹ et la masse volumique de l'air $\mu_0 = 1,292$ kg · m⁻³.

Tracer le graphe³ de $\log |Z(f)|$ en fonction de la fréquence f , et déterminer numériquement les fréquences des 7 premiers partiels.

Conclure quant à l'influence de la partie réelle de l'impédance de rayonnement sur les fréquences de résonance de la flûte.

Partie 3 — Influence de l'ouverture d'un trou

Dans cette partie, on néglige les impédances de rayonnement : l'impédance à la sortie d'un tuyau ouvert est $\underline{Z}_c = 0$. Le tuyau, de longueur L et de rayon a , est muni d'une dérivation de même rayon a , de hauteur h , dont le centre est situé à la distance x_0 de l'embouchure.



26. Déterminer les impédances calculées au point de rencontre des trois branches $x = x_0$:

- l'impédance \underline{Z}_1 , ramenée depuis l'extrémité $x = 0$;
- l'impédance \underline{Z}_2 , ramenée depuis l'extrémité $x = L$;
- l'impédance \underline{Z}_3 , ramenée depuis l'extrémité ouverte de la dérivation.

27. La pression étant identique pour les trois branches au point de rencontre, montrer que la conservation du débit conduit à

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = 0.$$

28. Montrer que k est solution de l'équation

$$\sin kh \sin kL + \cos kh \sin kx_0 \sin k(L - x_0) = 0$$

qui permet de calculer les fréquences de résonance du tube.

29. Que devient cette équation dans l'hypothèse où la hauteur h de la dérivation est petite?

30. Le trou est situé au milieu du tube : $x_0 = L/2$. Montrer que l'équation précédente conduit alors à

$$\tan \frac{kL}{2} = -2kh.$$

Le tuyau avec le trou ouvert peut-il être considéré comme un tuyau ouvert de longueur $L/2$?

2. L'instrument est dit harmonique si ses fréquences propres sont des multiples entiers d'une fréquence fondamentale.

3. On pourra utiliser un logiciel.

Solution

Partie 4 — Réflexion à une extrémité

1. Vu en cours : pour une onde plane progressive dans le sens des x croissants, on a $\underline{p}_i(x, t) = \mu_0 c \underline{v}_i(x, t)$. On a donc

$$\underline{v}_i(x, t) = \frac{p_0}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - kx)}.$$

1 Extrémité fermée

2. La composante normale à un obstacle de la vitesse étant nulle, on a $\underline{v}_1(x=L, t) = 0$.

3. Le champ des vitesses est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$v(x, t) = v_i(x, t) + v_r(x, t).$$

On a donc

$$v_i(L, t) + v_r(L, t) = 0,$$

d'où

$$r_v = \frac{v_r(L, t)}{v_i(L, t)} = -1.$$

Comme $r_p = -r_v$, on a $r_v = -1$ et $r_p = 1$.

4. L'onde réfléchie, progressive dans le sens des x décroissants, s'écrit

$$\underline{p}_r(x, t) = \underline{p}_{r0} e^{i(\omega t + kx)}.$$

La relation $\underline{p}_r(L, t) = r_p \underline{p}_i(L, t) = \underline{p}_i(L, t)$ s'écrit alors

$$\underline{p}_{r0} e^{i(\omega t + kL)} = p_0 e^{i(\omega t - kL)},$$

d'où

$$\underline{p}_{r0} = p_0 e^{-2ikL}.$$

On a donc

$$\underline{p}_r(x, t) = p_0 e^{i(\omega t + k(x-2L))}.$$

L'onde de vitesse réfléchie est une onde progressive dans le sens des x décroissants; elle est donc reliée à l'onde de pression par (cf. cours)

$$\underline{v}_r(x, t) = -\frac{\underline{p}_r(x, t)}{\mu_0 c},$$

soit

$$\underline{v}_r(x, t) = -\frac{p_0}{\mu_0 c} e^{i(\omega t + k(x-2L))}.$$

On peut aussi établir l'expression précédente sans passer par le champ de surpression; on a $\underline{v}_r(x, t) = \underline{v}_{r0} e^{i(\omega t + kx)}$. La relation $\underline{v}_r(L, t) = r_v \underline{v}_i(L, t) = -\underline{v}_i(L, t)$ s'écrit alors

$$\underline{v}_{r0} e^{i(\omega t + kL)} = -\frac{p_0}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - kL)},$$

d'où $\underline{v}_{r0} = -\frac{p_0}{\mu_0 c} e^{-2ikL}$.

On retrouve $\underline{v}_r(x, t) = -\frac{p_0}{\mu_0 c} e^{i(\omega t + k(x-2L))}$.

5. L'onde de pression régnant dans le tuyau est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_i(x, t) + p_r(x, t) \\ &= p_0 \cos(\omega t - kx) + p_0 \cos[\omega t + k(x-2L)], \end{aligned}$$

soit

$$p(x, t) = 2p_0 \cos[k(x-L)] \cos(\omega t - kL).$$

De même pour l'onde de vitesse :

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_i(x, t) + v_r(x, t) \\ &= \frac{p_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kx) - \frac{p_0}{\mu_0 c} \cos[\omega t + k(x-2L)], \end{aligned}$$

soit

$$v(x, t) = \frac{2p_0}{\mu_0 c} \sin[k(x-L)] \sin(\omega t - kL).$$

- Les ondes de surpression acoustique et de vitesse sont des **ondes stationnaires**.
- À une extrémité fermée, on observe un **nœud de vitesse** et un **ventre de surpression**.
- Les ondes de vitesse et de surpression sont en quadrature temporelle.
- À un ventre de vitesse correspond un nœud de surpression, et réciproquement.

2 Extrémité ouverte

L'extrémité $x=L$ est ouverte.

6. La pression dans le tuyau est donnée par

$$P(x, t) = P_0 + p_1(x, t).$$

À l'extrémité ouverte, on a $P(L, t) = P_0$, d'où $p_1(L, t) = 0$.

L'onde étant la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, on a donc

$$p_1(L, t) = p_i(L, t) + p_r(L, t) = 0,$$

d'où $r_p = p_r(L, t) / p_i(L, t) = -1$.

On a donc $r_p = -1$ et $r_v = +1$.

7. L'onde réfléchi en surpression est de la forme

$$\underline{p}_r(x, t) = \underline{p}_{r0} e^{i(\omega t + kx)}.$$

On a $\underline{p}_r(L, t) = r_p \underline{p}_i(L, t) = -\underline{p}_i(L, t)$, soit

$$\underline{p}_{r0} e^{i(\omega t + kL)} = -p_0 e^{i(\omega t - kL)}$$

d'où

$$\underline{p}_{r0} = -p_0 e^{-2ikL}.$$

On a donc

$$\underline{p}_r(x, t) = -p_0 e^{i[\omega t + k(x-2L)]}.$$

On a $\underline{v}_r(x, t) = -\frac{\underline{p}_r(x, t)}{\mu_0 c}$, soit

$$\underline{v}_r(x, t) = \frac{p_0}{\mu_0 c} e^{i[\omega t + k(x-2L)]}.$$

8. L'onde de surpression régnant dans le tuyau s'écrit

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_i(x, t) + p_r(x, t) \\ &= p_0 \cos(\omega t - kx) - p_0 \cos[\omega t + k(x - 2L)], \end{aligned}$$

soit

$$p(x, t) = 2p_0 \sin[k(x - L)] \sin(\omega t - kL).$$

L'onde de vitesse s'écrit

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_i(x, t) + v_r(x, t) \\ &= \frac{p_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kx) + \frac{p_0}{\mu_0 c} \cos[\omega t + k(x - 2L)], \end{aligned}$$

soit

$$v(x, t) = \frac{2p_0}{\mu_0 c} \cos[k(x - L)] \cos(\omega t - kL).$$

- Les ondes de surpression acoustique et de vitesse sont des **ondes stationnaires**.
- À une extrémité fermée, on observe un **nœud de surpression** et un **ventre de vitesse**.
- Les ondes de vitesse et de surpression sont en quadrature temporelle.
- À un ventre de vitesse correspond un nœud de surpression, et réciproquement.

Partie 5 — Modes propres

9. On doit considérer les trois configurations suivantes :

Tuyau ouvert aux deux extrémités :

Le champ de surpression est celui donné par la question 5; on doit avoir $p_1(0, t) = 0$, soit $\sin kL = 0$

0. Seuls peuvent exister les modes propres $k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, d'où

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

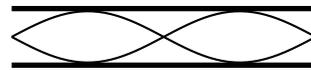
De $\lambda = c/f$, on déduit les fréquences propres

$$f_n = n \frac{c}{2L}.$$

Champ de surpression du mode fondamental $n = 1$:



Harmonique suivant non nul : $n = 2$ avec $\lambda_2 = \lambda_1/2$ et $f_2 = 2f_1$:



Tuyau fermé aux deux extrémités :

Le champ de vitesse est celui donné par la question 5; on doit avoir $v(0, t) = 0$, soit $\sin kL = 0$. Seuls peuvent exister les modes propres $k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, d'où

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

De $\lambda = c/f$, on déduit les fréquences propres

$$f_n = n \frac{c}{2L}.$$

Champ de surpression du mode fondamental $n = 1$:



Harmonique suivant non nul : $n = 2$ avec $\lambda_2 = \lambda_1/2$ et $f_2 = 2f_1$:



Tuyau ouvert à une extrémité, fermé à l'autre :

L'extrémité $x = L$ étant fermé, les champs de surpression et de vitesse sont donnés par la question 5 on doit avoir $p_1(0, t) = 0$, soit $\cos kL = 0$. Seuls peuvent exister les modes propres $k_n = \frac{\pi}{2L} + \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, d'où

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n + 1}.$$

De $\lambda = c/f$, on déduit les fréquences propres

$$f_n = (2n + 1) \frac{c}{4L}.$$

La fréquence du fondamental vaut $f_1 = \frac{c}{4L}$; on a donc $f_n = (2n + 1)f_1$: seuls les harmoniques impairs peuvent exister.

Champ de surpression du mode fondamental $n = 1$:



Champ de surpression de l'harmonique suivant non nul : $n = 3$ avec $\lambda_3 = \lambda_1/3$ et $f_3 = 3f_1$:



10. Flûte traversière.

10.a) L'extrémité opposée à l'embouchure est une extrémité ouverte; on a donc un nœud de surpression.

10.b) Faisons l'hypothèse d'une extrémité ouverte au niveau de l'embouchure. La fréquence du mode fondamental vaut donc

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{340}{2 \times 0,65} = 261,5 \text{ Hz.}$$

Cette hypothèse est validée.

10.c) La flûte se comporte comme un tuyau ouvert aux deux extrémités; d'après la question 9, l'harmonique suivant est le deuxième harmonique de fréquence $f_2 = 2f_1$.

Cette note est située une octave plus haut que le fondamental.

11. L'extrémité opposée au bec est une extrémité ouverte; on a donc un nœud de surpression.

Faisons l'hypothèse d'une extrémité ouverte au niveau de l'embouchure. La fréquence du mode fondamental vaut donc

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{340}{2 \times 0,60} = 283,3 \text{ Hz.}$$

Cette hypothèse est manifestement fautive. Dans le cas où l'extrémité au niveau de l'embouchure est fermée, la fréquence du mode fondamental vaut

$$f_1 = \frac{c}{4L} = \frac{340}{4 \times 0,60} = 141,7 \text{ Hz.}$$

Cette hypothèse est validée.

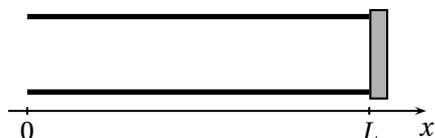
La clarinette se comporte donc comme un tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre. D'après la question 9, l'harmonique suivant est le troisième harmonique, de fréquence $f_3 = 3f_1$.

Cette note est à un intervalle de douzième — c'est-à-dire de quinte redoublée — par rapport au fondamental.

Partie II : étude plus complète des fréquences propres; impédance ramenée

Partie 1 — Impédance ramenée

Le tuyau sonore est fermé en $x = L$ par un matériau d'impédance acoustique \underline{Z}_c :



31. L'onde réfléchi est une onde progressive dans le sens des x décroissant, d'expression

$$\underline{p}_r = \underline{p}_{r0} e^{i(\omega t + kx)}.$$

Le coefficient de réflexion est défini par

$$\underline{r} = \frac{\underline{p}_{r0} e^{i(\omega t + kL)}}{\underline{p}_0 e^{i(\omega t - kL)}} = \frac{\underline{p}_{r0}}{\underline{p}_0} e^{2ikL}.$$

On a donc

$$\underline{p}_{r0} = \underline{r} \underline{p}_0 e^{-2ikL},$$

d'où

$$\underline{p}_r(x, t) = \underline{r} \underline{p}_0 e^{i[\omega t + k(x-2L)]}.$$

32. Dans le cas d'une onde progressive dans le sens des x croissants, on a $\underline{v}_i(x, t) = \frac{\underline{p}_i(x, t)}{\mu_0 c}$, soit

$$\underline{v}_i(x, t) = \frac{\underline{p}_0}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - kx)}.$$

Dans le cas d'une onde progressive dans le sens des x décroissants, on a $\underline{v}_r(x, t) = -\frac{\underline{p}_r(x, t)}{\mu_0 c}$, soit

$$\underline{v}_r(x, t) = -\frac{\underline{r} \underline{p}_0}{\mu_0 c} e^{i[\omega t + k(x-2L)]}.$$

33. L'onde de surpression dans le tuyau s'écrit $\underline{p}(x, t) = \underline{p}_i(x, t) + \underline{p}_r(x, t)$ soit

$$\underline{p}(x, t) = \left[e^{-ikx} + \underline{r} e^{ik(x-2L)} \right] \underline{p}_0 e^{i\omega t},$$

d'amplitude complexe

$$\underline{p}(x) = \left[e^{-ikx} + \underline{r} e^{ik(x-2L)} \right] \underline{p}_0.$$

L'onde de vitesse dans le tuyau s'écrit $\underline{v}(x, t) = \underline{v}_i(x, t) + \underline{v}_r(x, t)$ soit

$$\underline{v}(x, t) = \left[e^{-ikx} - \underline{r} e^{ik(x-2L)} \right] \frac{\underline{p}_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t},$$

d'amplitude complexe

$$\underline{v}(x) = \left[e^{-ikx} - \underline{r} e^{ik(x-2L)} \right] \frac{p_0}{\mu_0 c}$$

L'impédance de charge imposée à l'extrémité du tuyau la condition

$$\frac{p(L)}{v(L)} = \underline{Z}_c$$

soit

$$\underline{Z}_c = \mu_0 c \frac{e^{-ikL} + \underline{r} e^{-ikL}}{e^{-ikL} - \underline{r} e^{-ikL}} = \mu_0 c \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}}$$

On en déduit

$$\underline{r} = \frac{\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} - 1}{\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} + 1}$$

Pour $\underline{Z}_c = \mu_0 c$, on a $\underline{r} = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie. Le tuyau « voit » à son extrémité la même impédance que son impédance propre; tout se passe comme s'il était infini.

34. 34.a) L'impédance ramenée est donnée par

$$\begin{aligned} \underline{Z}(x) &= \frac{p(x)}{v(x)} = \mu_0 c \frac{e^{-ikx} + \underline{r} e^{ik(x-2L)}}{e^{-ikx} - \underline{r} e^{ik(x-2L)}} \\ &= \mu_0 c \frac{\left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} + 1 \right] e^{-ikx} + \left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} - 1 \right] e^{ik(x-2L)}}{\left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} + 1 \right] e^{-ikx} - \left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} - 1 \right] e^{ik(x-2L)}} \\ &= \mu_0 c \frac{\left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} + 1 \right] e^{ik(L-x)} + \left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} - 1 \right] e^{-ik(L-x)}}{\left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} + 1 \right] e^{ik(L-x)} - \left[\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} - 1 \right] e^{-ik(L-x)}} \\ &= \mu_0 c \frac{\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} [e^{ik(L-x)} + e^{-ik(L-x)}] + [e^{ik(L-x)} - e^{-ik(L-x)}]}{\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} [e^{ik(L-x)} - e^{-ik(L-x)}] + [e^{ik(L-x)} + e^{-ik(L-x)}]} \\ &= \mu_0 c \frac{\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} \cos k(L-x) + i \sin k(L-x)}{i \frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} \sin k(L-x) + \cos k(L-x)} \end{aligned}$$

On a donc

$$\underline{Z}(x) = \mu_0 c \frac{\frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} + i \tan k(L-x)}{1 + i \frac{\underline{Z}_c}{\mu_0 c} \tan k(L-x)}$$

34.b) L'extrémité fermée impose $v(L) = 0$; elle correspond donc à $\underline{Z}_c = \infty$.

On a alors $\underline{Z}_{\text{fermée}}(x) = -i\mu_0 c \cotan k(L-x)$.

Au niveau de l'embouchure, on a

$$\underline{Z}(0)_{\text{fermée}} = -i\mu_0 c \cotan kL$$

34.c) L'extrémité ouverte impose $p(L) = 0$; elle correspond donc à une impédance de charge $\underline{Z}_c = 0$.

On a alors

$$\underline{Z}_{\text{ouvert}}(x) = i\mu_0 c \tan k(L-x)$$

Au niveau de l'embouchure, on a

$$\underline{Z}(0)_{\text{ouvert}} = i\mu_0 c \tan kL$$

34.d) Dans le cas où $\underline{Z}_c = \mu_0 c$, on a $\underline{Z}(x) = \mu_0 c$.

Partie 2 — Fréquences propres d'un tuyau sonore

1 Modèle simplifié de la flûte

35. L'extrémité $x = 0$ étant considérée comme ouverte, l'impédance ramenée au niveau de l'embouchure est fixée à $\underline{Z}(0) = 0$, soit $\tan kL = 0$.

On a donc $k_n L = n\pi$, soit $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

36. Les fréquences des modes propres sont donc données par $f_n = n \frac{c}{2L}$.

On retrouve, à l'aide de l'impédance ramenée, le résultat établi à la première partie.

2 Prise en compte de l'impédance de rayonnement

37. L'impédance de charge étant nulle, on a $p(L) = 0$; le vecteur densité de flux de puissance sonore $\vec{\Pi}$ à l'extrémité $x = L$ est donc nul : $\vec{\Pi}(x=L) = \vec{0}$.

Ce résultat est paradoxal, car pour pouvoir être entendu, l'instrument de musique doit rayonner de la puissance sonore vers l'extérieur!

Le fonctionnement d'un tel instrument à vent est le résultat d'un compromis :

- l'instrument doit rayonner de la puissance sonore vers l'extérieur; on ne doit donc pas avoir réflexion totale à l'extrémité ouverte;
- l'instrument doit résonner selon ses modes propres, ce qui nécessite une réflexion importante à l'extrémité ouverte pour pouvoir donner naissance à des ondes stationnaires.

38. On a

$$ka = \frac{2\pi f}{c} a \approx \frac{f}{5746}$$

Pour des fréquences $200 \text{ Hz} \leq f \leq 3000 \text{ Hz}$, on a donc

$$ka \ll 1$$

39. On a donc $(ka)^2 \ll ka$, et l'impédance de rayonnement s'écrit à l'ordre le plus petit en ka :

$$\underline{Z}_c = i \cdot 0,61 \mu_0 c ka$$

L'expression de l'impédance ramenée établie en 1.4.a s'écrit

$$\underline{Z}(x) = i\mu_0 c \frac{0,61 ka + \tan k(L-x)}{1 - 0,61 ka \tan k(L-x)}$$

40. L'embouchure impose $\underline{Z}(0) = 0$, soit

$$0,61ka + \tan kL = 0.$$

41. En considérant $kL \ll 1$, l'impédance ramenée à l'entrée d'un tuyau ouvert idéal (impédance de rayonnement nulle) s'écrit, d'après l'expression établie précédemment

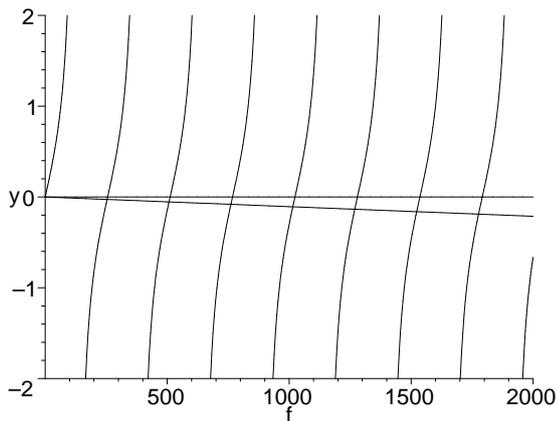
$$\underline{Z}(0)_{\text{ouvert}} \approx i\mu_0 ckL.$$

L'impédance de rayonnement s'écrit

$$\underline{Z}_c \approx i \cdot 0,61\mu_0 cka;$$

elle est donc équivalente à l'impédance ramenée à l'entrée d'un tuyau ouvert idéal de longueur $\Delta L = 0,61a$. On peut donc prendre en compte l'impédance de rayonnement d'un tuyau sonore de longueur L en le modélisant par un tuyau « idéalement » ouvert, de longueur $L' = L + \Delta L$.

42. La résolution graphique de l'équation de la question 2.4 peut se faire en représentant les graphes de $f \rightarrow \tan 2\pi fL/c$ et de $f \rightarrow -0,61 \times 2\pi fa/c$:



Les fréquences propres du tuyau idéal sont données par l'intersection de $f \rightarrow \tan 2\pi fL/c$ avec l'axe des abscisses; elles sont équidistantes (la flûte idéale est harmonique).

On voit sur le graphe que les fréquences propres de la flûte réelle sont plus basses et ne sont plus équidistantes, et que l'écart avec la fréquence propre de la flûte idéale est d'autant plus grand que le rang de l'harmonique est élevé.

Résolution numérique :

$$a_2 = 507,5545708$$

$$a_3 = 761,3397088$$

$$a_4 = 1015,134195$$

$$a_5 = 1268,941023$$

$$a_6 = 1522,763084$$

$$a_7 = 1776,603144$$

On retiens les fréquences propres :

$f_1 = 253,8 \text{ Hz}$	$f_2 = 507,6 \text{ Hz}$	$f_3 = 761,3 \text{ Hz}$
$f_4 = 1015,1 \text{ Hz}$	$f_5 = 1268,9 \text{ Hz}$	$f_6 = 1522,8 \text{ Hz}$
$f_7 = 1776,6 \text{ Hz}$	$f_8 = 2030,5 \text{ Hz}$	

La flûte n'est pas rigoureusement harmonique; on peut cependant calculer l'écart relatif de fréquence entre les deux modèles, donné en pour cents.

$$0., .0006209814182, .001652417145, .003089046629, \\ .004923639077, .007147190472, .009748653383$$

L'écart maximum relatif des fréquences est inférieur à 0,01 %. Dans la pratique, la flûte peut être considérée comme harmonique.

43. La vitesse à l'extrémité du tube étant donnée par $\underline{v}(L, t) = v_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, la pression y vaut

$$\underline{p}(L, t) = \underline{Z}_c \underline{v}(L, t) = (r + ix)\underline{v}(L, t).$$

Les grandeurs réelles valent donc

$$v(L, t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

et

$$p(L, t) = r v_0 \cos(\omega t + \varphi) - x \sin(\omega t + \varphi).$$

La densité de flux de puissance sonore à la sortie du tuyau vaut donc

$$\Pi(L, t) = p(L, t) v(L, t) = r v_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ - x v_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi)$$

En valeur moyenne, on a donc

$$\langle \Pi \rangle = \frac{r v_0^2}{2}.$$

C'est la partie réelle de l'impédance qui permet de prendre en compte le rayonnement vers l'extérieur.

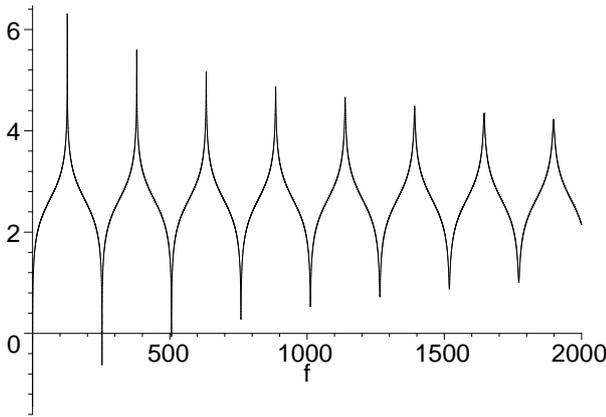
44. L'impédance de rayonnement étant donnée par $\underline{Z}_c = r + ix$, l'impédance ramenée au niveau de l'embouchure ($x = 0$) s'écrit

$$\underline{Z}(0) = \mu_0 c \frac{0,25k^2 a^2 + i[0,61ka + \tan kL]}{1 + [0,25k^2 a^2 + i0,61ka] \tan kL}$$

On en déduit

$$\log |\underline{Z}(0)| = \frac{1}{2} \log \frac{0,0625k^4 a^4 + [0,61ka + \tan kL]^2}{[1 + 0,25k^2 a^2]^2 + 0,3721k^2 a^2 \tan^2 kL} \\ + \log \mu_0 c.$$

Avec les valeurs données pour la flûte moderne, on obtient le graphe suivant :



Les fréquences de résonance sont données par les minima de la courbe. Une détermination numérique conduit à :

$$f'_1 = 253,0 \text{ Hz}; f'_2 = 506,1 \text{ Hz}; f'_3 = 759,1 \text{ Hz};$$

$$f'_4 = 1012,2 \text{ Hz}; f'_5 = 1265,2 \text{ Hz}; f'_6 = 1518,3 \text{ Hz}; f'_7 = 1771,4 \text{ Hz}.$$

L'écart de fréquence relatif si l'on prend en compte la partie réelle de l'impédance de rayonnement est de l'ordre de 0,3 %.

Partie 3 — Influence de l'ouverture d'un trou

45. On utilise le résultat de la question 1.4.c :

$$\underline{Z}_1 = i\mu_0 c \tan kx_0; \quad \underline{Z}_2 = i\mu_0 c \tan k(L - x_0)$$

et

$$\underline{Z}_3 = i\mu_0 c \tan kh.$$

46. L'écoulement étant incompressible, on a $Sv_1 + Sv_2 + Sv_3 = 0$ au point d'abscisse x_0 , soit $\frac{p}{\underline{Z}_1} + \frac{p}{\underline{Z}_2} + \frac{p}{\underline{Z}_3} = 0$. On a donc

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = 0.$$

47. L'expression précédente s'écrit

$$\frac{\cos kx_0}{\sin kx_0} + \frac{\cos k(L - x_0)}{\sin k(L - x_0)} + \frac{\cos kh}{\sin kh} = 0,$$

soit

$$\cos kx_0 \sin k(L - x_0) + \cos k(L - x_0) \sin kx_0$$

$$+ \frac{\cos kh \sin kx_0 \sin k(L - x_0)}{\sin kh} = 0$$

qui se simplifie en

$$\sin kL + \frac{\cos kh \sin kx_0 \sin k(L - x_0)}{\sin kh} = 0.$$

On a donc

$$\sin kL \sin kh + \cos kh \sin kx_0 \sin k(L - x_0) = 0,$$

équation en $k = 2\pi f/c$ dont la résolution donne les fréquences de résonance possibles.

48. Si h est petit (soit $kh \ll 1$), l'équation précédente devient

$$kh \sin kL + \sin kx_0 \sin k(L - x_0) = 0.$$

49. On considère $x_0 = L/2$. On a donc

$$kh \sin kL + \sin k\frac{L}{2} \sin k\frac{L}{2} = 0.$$

En remarquant que $\sin kL = 2 \sin k\frac{L}{2} \cos k\frac{L}{2}$, on a

$$2kh \cos \frac{kL}{2} + \sin \frac{kL}{2} = 0$$

d'où

$$\tan \frac{kL}{2} = -2kh.$$

Si $kh \ll 1$, on a $\frac{kL}{2} \approx \pi$, soit

$$f = \frac{c}{L}$$

qui, d'après l'étude précédente, est la fréquence propre d'un tuyau ouvert de longueur $L/2$.

Notons $\frac{kL}{2} = \pi - \varepsilon$; on a $\tan(\pi - \varepsilon) = -2kh$, soit au premier ordre $-\varepsilon = -2kh$. On a donc

$$\frac{kL}{2} = \pi - 2kh,$$

soit avec $k = 2\pi f/c$,

$$f = \frac{c}{2(L/2 + 2h)} = \frac{c}{L(1 + 4h/L)} \approx \frac{c}{L} \left(1 - \frac{4h}{L}\right).$$

L'erreur faite en assimilant le tuyau troué en son milieu avec un tuyau de longueur $L/2$ est $4h/L$. Pour une flûte, on a $h \approx 2$ mm, soit $4h/L \approx 0,01$; l'erreur faite est de l'ordre de 1 %.