Sujet d'entraînement **Électrostatique, gravitation III**

Partie 1 — Sondage par gravimétrie

La gravimétrie est l'étude et la mesure très fine du champ de pesanteur [1] local. Des mesures gravimétriques sur le terrain permettent de détecter des anomalies gravitationnelles dans le sous-sol pouvant avoir diverses origines. Couplée généralement à d'autres techniques (telles que des forages ou des études sismiques), la gravimétrie permet de localiser des cavités, des failles, des aquifères, etc. On se propose d'étudier deux situations.

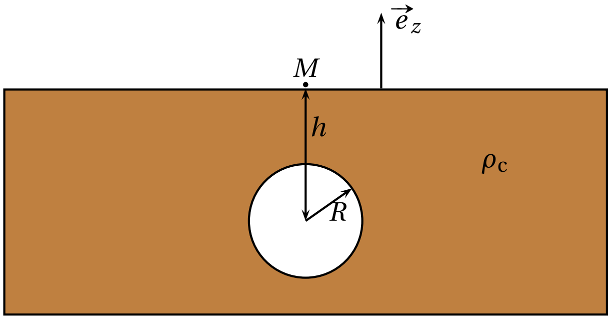
1 Détection d'une cavité

On considère une cavité karstique de forme supposée sphérique de rayon R et dont le centre se situe à une profondeur h. Un milieu karstique étant relativement poreux, cette cavité a été créée dans un milieu rocheux calcaire (de masse volumique ρ_c) par la lente dissolution de la roche et par l'écoulement souterrain, qui évacue au fur et à mesure les matières dissoutes. La détention de ce type de cavité est très importante dans le domaine du génie civil avant la construction de grandes structures (ponts, immeubles...) construites à la surface.

1. Rappeler le théorème de Gauss relatif à la gravitation. On pourra s'appuyer sur une analogie avec l'électrostatique pour retrouver ce résultat.

2. On considère une sphère de centre O, de rayon R et de masse volumique ρ_c.
Exprimer le champ de gravité $\vec{g}_1(M)$ créé par cette sphère en tout point M *extérieur à la sphère*.

3. On veut étudier l'influence de la cavité sphérique sur le champ de gravité en un point M au-dessus du sol.



On note $\vec{g}_0(M)$ le champ de gravité créé en M par le sous-sol homogène, en l'absence de cavité.
On appelle anomalie gravimétrique $\Delta\vec{g}(M)$ la variation du champ de pesanteur à la verticale du centre de la cavité (point M sur la figure) du fait de sa présence. On parle d'anomalie positive si la variation du champ de pesanteur est dirigée vers le bas, et d'anomalie négative si celle-ci est dirigée vers le haut.
À l'aide du principe de superposition, exprimer l'anomalie gravimétrique $\Delta\vec{g}(M)$ en fonction de $\vec{g}_0(M)$ et $\vec{g}_1(M)$.

4. En déduire l'expression de $\Delta\vec{g}(M) = \Delta g(M)\vec{e}_z$ en fonction de R, h, ρ_c et G, constante de gravitation universelle. On notera $\vec{e}_z$ le vecteur normal vertical ascendant en M.
L'anomalie est-elle positive ou négative ?

5. Sans calcul supplémentaire, donner l'allure du graphe représentant la composante $\Delta g(M)$ de l'anomalie gravitationnelle en fonction de la position de M à la surface (quand M se déplace, ne restant plus à l'aplomb de la cavité). Justifiez votre construction.

6. Comment ces résultats sont-ils modifiés si la cavité est remplie d'eau, de masse volumique ρ_e ?

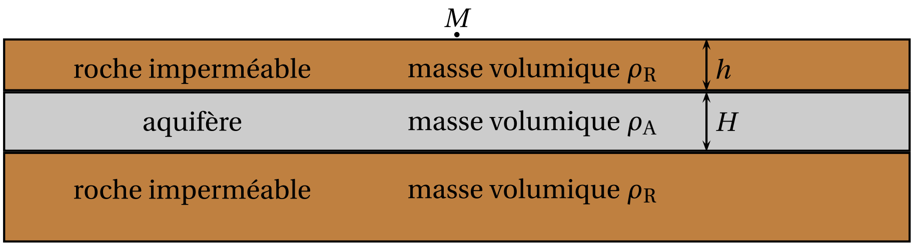
En gravimétrie, on utilise une unité spéciale, le gal, pour quantifier l'anomalie gravitationnelle, avec pour définition $1\ \text{Ga} = 1\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$.
On rappelle la valeur de la constante de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{kg}^{-1}$.
Le gravimètre Autograv CG-5 de la marque Scintrex (voir photo) est un gravimètre portatif (8 kg) permettant d'atteindre une résolution effective d'environ 10 µGal.

1. Dans toute cette étude, on considère la Terre comme un référentiel galiléen, assimilant ainsi le champ de pesanteur au champ de gravité. On parlera donc indifféremment de champ de pesanteur ou de champ de gravité.

7. Ce gravimètre est-il capable de détecter une cavité vide de 10 m de diamètre et donc le centre est situé à 10 m de profondeur ? On prendra pour la masse volumique du calcule $\rho_c = 2{,}6\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.
Même question si cette cavité est remplie d'eau. On rappelle la masse volumique de l'eau $\rho_e = 1\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.

2 Détection d'un aquifère

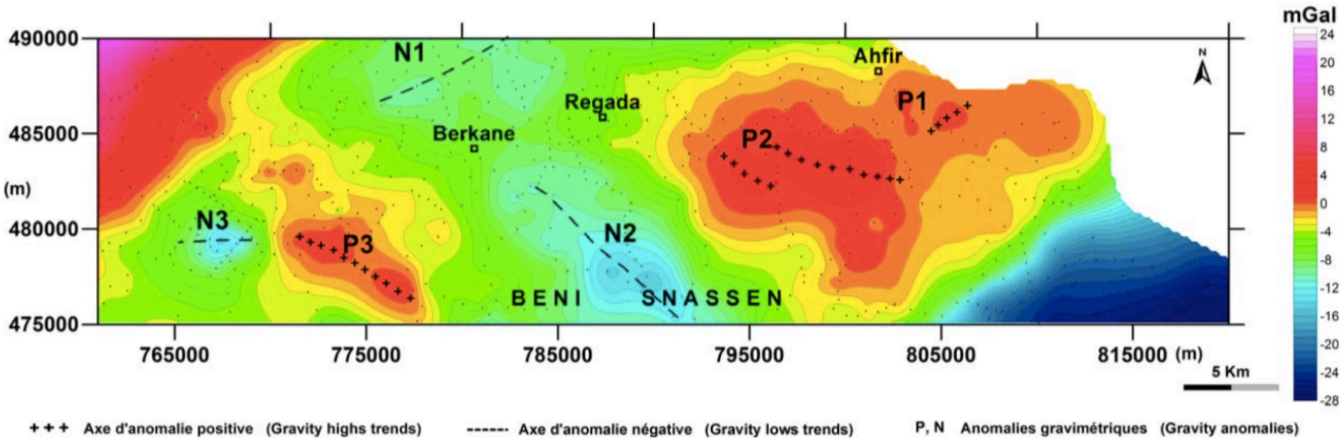
On considère maintenant le cas d'un aquifère de grande dimension. Un aquifère est une couche de terrain, suffisamment poreuse et perméable pour pouvoir contenir une nappe d'eau souterraine. Il est ici supposé parfaitement horizontal, d'épaisseur H et dont la partie supérieure est située à une profondeur H. On le suppose très large (horizontalement) comparé à h et H.



8. Exprimer la composante de l'anomalie gravimétrique $\Delta g(M)$ en fonction de G, ρ_A, ρ_R et H.

9. Application numérique avec $\rho_A - \rho_R = -0{,}5\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, $h = 1$ km et $H = 500$ m. L'anomalie est-elle positive ou négative ?

10. On donne la carte de l'anomalie gravimétrique dans les Béni Snassen, un ensemble montagneux situé au nord-est du Maroc. On peut y distinguer trois zones d'anomalies négatives N1, N2 et N3, et deux zones d'anomalies positives P1 et P2.



Cette carte indique-t-elle des aquifères ? Où ? Les valeurs d'anomalie gravimétrique sont-elles cohérentes avec l'application numérique précédente ?

Solution

1 Détection d'une cavité

1. Le théorème de Gauss relatif à la gravitation s'écrit

$$\boxed{\oiint_{M\in\Sigma} \vec{g}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = -4\pi G M_{\text{int}}}$$

où M_{int} est la masse intérieure à la surface fermée Σ, le champ de gravitation en M étant noté $\vec{g}(M)$.

2. La distribution étant à symétrie sphérique, le champ de gravitation créé est de la forme [2]

$$\vec{g}_1(M) = g_1(r)\,\vec{e}_r$$

en coordonnées sphériques de centre O.

On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r ; le flux vaut alors

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{g}_1(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = 4\pi r^2 g_1(r)\,.$$

La masse intérieure vaut, pour $r > R$

$$M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{c}}\,.$$

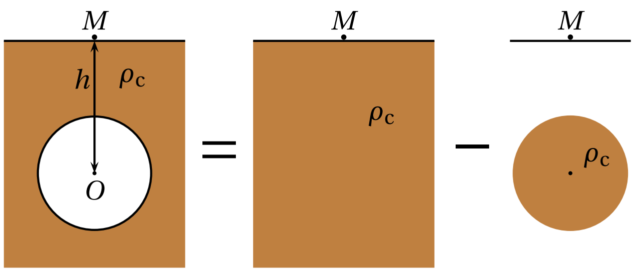
Le théorème de Gauss donne

$$4\pi r^2 g_1(r) = -4\pi G \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{c}}$$

d'où

$$\boxed{\vec{g}_1(M) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_{\text{c}} R^3 \frac{\vec{e}_r}{r^2}}\,.$$

3. On décompose la distribution de masse :



(a) (b) (c)

En notant $\vec{g}_0(M)$ le champ créé par la distribution (b) en l'absence de cavité et $\vec{g}_1(M)$ le champ créé par la distribution (c), le champ créé par le sol avec la cavité est donné par le principe de superposition :

$$\boxed{\vec{g}(M) = \vec{g}_0(M) - \vec{g}_1(M)}\,.$$

4. D'après la question précédente, pour un point M à la surface du sol on peut écrire

$$\vec{g}_1(M) = -\frac{4\pi G \rho_{\text{c}} R^3}{3h^2}\,\vec{e}_z\,.$$

L'anomalie gravimétrique est définie par

$$\Delta\vec{g}(M) = \vec{g}(M) - \vec{g}_0(M)\,,$$

soit

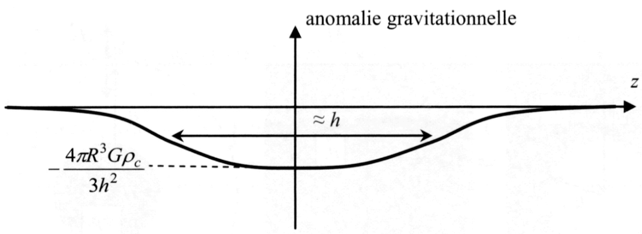
$$\boxed{\Delta\vec{g}(M) = -\vec{g}_1(M)}\,.$$

On en déduit

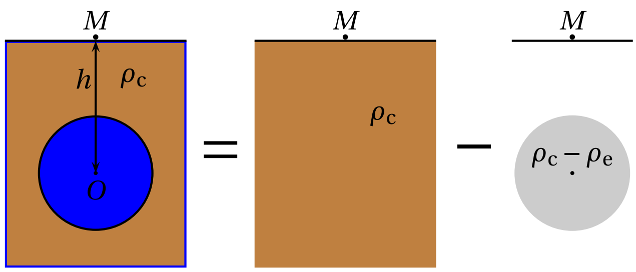
$$\boxed{\Delta\vec{g}(M) = \frac{4\pi G \rho_{\text{c}} R^3}{3h^2}\,\vec{e}_z}\,.$$

L'anomalie est dirigée selon $\vec{e}_z$, c'est-à-dire vers le haut : **l'anomalie est négative**.

5. Quand on s'éloigne de la verticale de la cavité, la distance au centre O augmente, donc $\|\vec{g}_1(M)\| \propto \dfrac{1}{OM^2}$ diminue. Le gravimètre mesurant selon toute vraisemblance la composante verticale du champ de gravité, la projection selon la verticale vérifie $\vec{g}_1(M)\cdot\vec{e}_z < \Delta g$. L'anomalie gravitationnelle diminue donc quand on s'éloigne de la cavité :



6. Si la cavité est remplie d'eau, il faut décrire la superposition ainsi :



(a) (b) (c)

La distribution (c) crée donc le champ

$$\vec{g}_1(M) = -\frac{4}{3}\pi G(\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{e}}) R^3 \frac{\vec{e}_r}{r^2}\,,$$

et l'anomalie gravitationnelle est donnée par

$$\boxed{\Delta\vec{g}(M) = \frac{4\pi G(\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{e}}) R^3}{3h^2}\,\vec{e}_z}\,.$$

L'anomalie gravitationnelle est plus faible.

2. Se reporter au cours pour le détail de la discussion sur les symétries et invariances de cette distribution classique.

7. On calcule

$$\Delta g = \frac{4\pi G\rho_c R^3}{3h^2} = \frac{4\pi \times 6{,}67\times 10^{-11}\times 2{,}6\times 10^3 \times 5^3}{3\times 100}$$
$$= 9{,}1\times 10^{-7}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 9{,}1\times 10^{-5}\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$$

soit $\boxed{\Delta g = 91\ \mu\mathrm{Gal}}$.

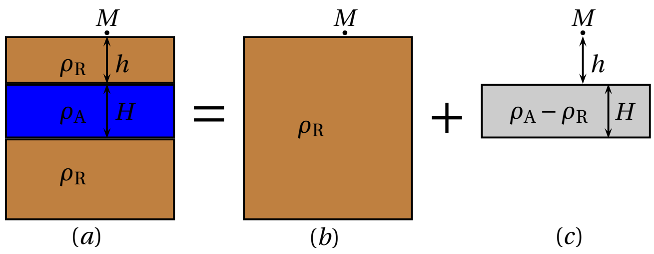
Cette cavité pourra être détectée par le gravimètre.

Dans le cas où la cavité est remplie d'eau, on remplace ρ_c par $\rho_c - \rho_e$, ce qui revient à multiplier le résultat précédent par $\frac{2{,}6-1}{2{,}6} = 0{,}615$. On obtient $\boxed{\Delta g = 56\ \mu\mathrm{Gal}}$.

Cette cavité pourra être détectée par le gravimètre.

2 Détection d'un aquifère

8. On décompose la distribution de masse ainsi :



Le théorème de superposition conduit à

$$\vec{g}_a(M) = \vec{g}_b(M) + \vec{g}_c(M)\,.$$

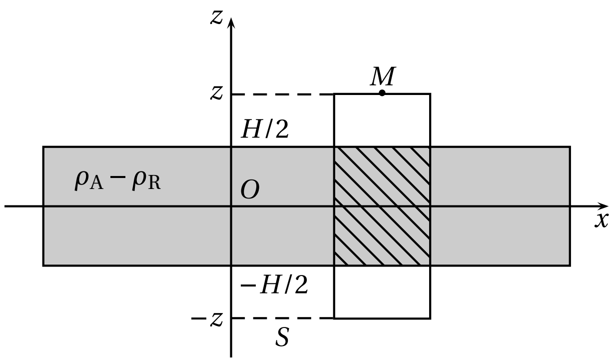
L'anomalie gravitationnelle est donnée par

$$\Delta\vec{g}(M) = \vec{g}_a(M) - \vec{g}_b(M)$$

soit $\Delta\vec{g}(M) = \vec{g}_c(M)$.

On est donc ramené au calcul du champ gravitationnelle créé par une couche plane infini d'épaisseur H, de masse volumique $\rho_A - \rho_R$.

Plaçons-nous en cartésiennes, en prenant l'origine des axes au milieu de la couche d'épaisseur H :



La distribution étant invariante par translation selon Ox et Oy (on néglige les effets de bord), les composantes de $\vec{g}_c(M)$ ne dépendent ni de x, ni de y.

Les plans $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z$ et $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z$ étant des plans de symétries, les composantes de $\vec{g}_c(M)$ selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_x$ sont nulles ; finalement

$$\vec{g}_c(M) = g_c(z)\,\vec{e}_z\,.$$

Le plan $z = 0$ étant un plan de symétrie, le champ gravitationnel se transforme selon $g_x(-z) = -g_c(z)$.

On mène l'étude pour $z > 0$.

Prenons comme surface de Gauss Σ le cylindre de section S, dont les extrémités sont en z et $-z$.

On a d'une part

$$\oint\!\!\!\oint_{P\in\Sigma} \vec{g}_c(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = 2Sg_c(z)\,.$$

D'autre part

$$M_{\mathrm{int}} = HS(\rho_A - \rho_R)\,.$$

Le théorème de Gauss s'écrit

$$2Sg_c(z) = -4\pi GHS(\rho_A - \rho_R)\,,$$

d'où

$$\vec{g}_c(M) = -2\pi GH(\rho_A - \rho_R)\,\vec{e}_z\,.$$

La composante de l'anomalie gravimétrique vaut donc

$$\boxed{\Delta g(M) = -2\pi GH(\rho_A - \rho_R)}\,.$$

➤ On constate que l'anomalie est indépendante de la profondeur h de l'aquifère.

9. On calcule

$$\Delta g(M) = 2\pi \times 6{,}67\times 10^{-11}\times 500 \times (-0{,}5\times 10^3)$$
$$= 1{,}0\times 10^{-4}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 10\times 10^{-3}\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$$

soit $\boxed{\Delta g(M) = 10\ \mathrm{mGal}}$.

L'anomalie est dirigée selon $\vec{e}_z$, c'est-à-dire vers le haut : **l'anomalie est négative**.

10. Les aquifères correspondent aux anomalies négatives.

On a donc des aquifères en N1, N2 et N3.

Les anomalies mesurées, de l'ordre du milliGal, correspondent bien à l'ordre de grandeur de notre calcul.