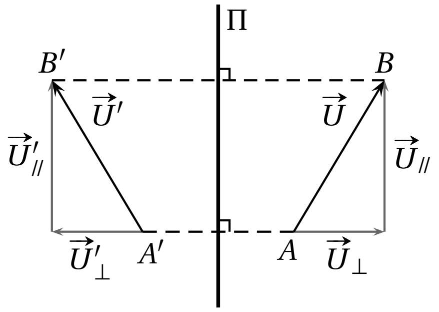
Complément — Vecteurs polaires et axiaux

Vecteur polaire

Construction

Considérons un vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$. Si $A' = \mathcal{S}_\Pi(A)$ et $B' = \mathcal{S}_\Pi(B)$ sont respectivement les symétriques des points A et B par rapport à Π, le vecteur $\vec{U}' = \mathcal{S}_\Pi(\vec{U})$ est le symétrique de $\vec{U}$ par rapport à Π.



On décompose

$$\vec{U} = \vec{U}_{//} + \vec{U}_\perp$$

où $\vec{U}_{//}$ est la composante de $\vec{U}$ parallèle au plan Π et $\vec{U}_\perp$ est sa composante normale à Π.
Il se transforme selon

$$\vec{U}'_{//} = \vec{U}_{//} \quad \text{et} \quad \vec{U}'_\perp = -\vec{U}_\perp\,.$$

Un vecteur dont les composantes vérifient (1) suivant une symétrie plane est appelé **vecteur polaire**, ou **vrai vecteur**.

Règles de transformation d'un vecteur polaire selon une symétrie plane :

$$\begin{cases} \vec{U}'_{//} = \vec{U}_{//} \\ \vec{U}'_\perp = -\vec{U}_\perp \end{cases} \tag{1}$$

- Le vecteur $\vec{U}'$ est le symétrie du vecteur $\vec{U}$ par rapport au plan Π.

Exemples en physique

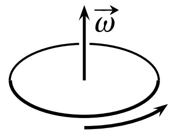
- Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est un vecteur polaire.
- Le vecteur-vitesse $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et le vecteur accélération $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$ sont des vecteurs polaires [1].
- La quantité de mouvement $\vec{p}$ est un vecteur polaire.
- Une force $\vec{F}$ est un vecteur polaire [2].
- Le champ électrique $\vec{E}$ est un vecteur polaire [3].
- Le vecteur densité de courant $\vec{\jmath}$ est un vecteur polaire [4].

1. La dérivation par rapport au temps ne modifie pas la construction du symétrique.
2. D'après le principe fondamental de la dynamique, $\vec{F} = m\vec{a}$.
3. Le champ électrique est défini par $\vec{F} = q\vec{E}$.
4. On a $\vec{\jmath} = \rho\vec{v}$. Il en est de même pour les vecteurs densité de flux de particules $\vec{\jmath}$ et de flux thermique $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}$.

Vecteur axial

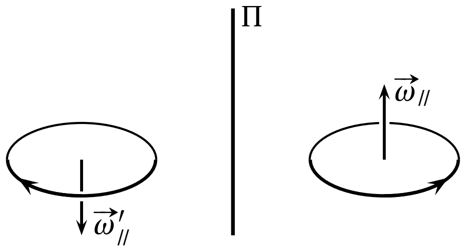
Propriétés de transformation par symétrie

On considère un disque en rotation autour de son axe, de vecteur-rotation $\vec{\omega}$.



Appliquons une symétrie plane à ce disque en mouvement dans deux cas particuliers :

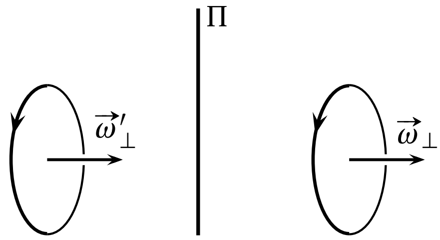
Le vecteur-rotation est parallèle au plan Π :



Il se transforme selon

$$\vec{\omega}'_{//} = -\vec{\omega}_{//}$$

Le vecteur-rotation est normal au plan Π



Il se transforme selon

$$\vec{\omega}'_{\perp} = \vec{\omega}_{\perp}$$

Un vecteur dont les composantes vérifient (2) est appelé **vecteur axial** ou **peudo-vecteur**.

Règles de transformation d'un vecteur axial selon une symétrie plane :

$$\begin{cases} \vec{U}'_{//} = -\vec{U}_{//} \\ \vec{U}'_{\perp} = \vec{U}_{\perp} \end{cases} \tag{2}$$

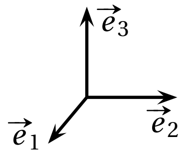
Propriétés importantes

- ➤ En tout point d'un plan Π de symétrie du système étudié :
  - — un vecteur polaire appartient au plan Π ;
  - — un vecteur axial est normal au plan Π.
- ➤ En tout point d'un plan Π^* de d'anti-symétrie du système étudié :
  - — un vecteur polaire est normal au plan Π^* ;
  - — un vecteur axial est contenu dans le plan Π^*.

Compléments

Convention d'orientation de l'espace et produit vectoriel

Le choix d'orientation du vecteur rotation associé au mouvement du disque est purement conventionnel. On pourrait choisir de l'orienter dans le sens opposé.



On choisit une orientation de l'espace en définissant l'orientation du **trièdre direct :**
La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, telle qu'orientée ici, définit la base directe conventionnelle.
Le sens du produit vectoriel dépend de la convention d'orientation de l'espace.
On a en effet pour une base orthonormée directe : $\boxed{\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}$.

- ➤ Un vecteur polaire est un vecteur dont le sens ne dépend pas de l'orientation du trièdre de référence.
- ➤ Un vecteur axial est un vecteur dont le sens dépend de l'orientation du trièdre de référence.

- ➤ Le sens d'un vecteur axial est donc purement conventionnel ; en revanche, les grandeurs physiques mesurables ne dépendent pas de ce sens.

On peut montrer — et on retiendra — que [5]

$$\textbf{polaire} \wedge \textbf{polaire} = \textbf{axial} \quad \text{et} \quad \textbf{polaire} \wedge \textbf{axial} = \textbf{polaire} \tag{3}$$

Opérateurs vectoriels

On montre — et on retiendra — que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, G = \textbf{polaire} \;; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\textbf{polaire}) = \textbf{axial} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\textbf{axial}) = \textbf{polaire}\,. \tag{4}$$

Exemples en physique

- ➤ Le champ magnétique $\vec{B}$ est un vecteur axial : $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ par exemple.
- ➤ Le moment cinétique $\vec{L}$ est un vecteur axial : $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{p}$.
- ➤ Le moment $\vec{\Gamma}$ d'une force est un vecteur axial : $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

Vérification de la pertinence d'un résultat

La nature polaire ou axiale des grandeurs vectorielles intervenant dans une expression est un moyen de vérifier la pertinence de cette expression au même titre que l'analyse dimensionnelle.

Écritures interdites :

polaire ~~**= axial**~~ ou ~~**polaire + axial**~~ = ⋯

Historique

Dans son traité d'électromagnétisme de 1873, Maxwell écrit :

> « *The direction and magnitude of a quantity may depend upon some action of effect which takes place entirely along a certain line, or it may depend upon something of the nature of rotation about that line as an axis.* »

Il définit les vecteurs polaires (grandeurs dont la direction et l'intensité font intervenir un effet qui se produit selon une droite) et les vecteurs axiaux (grandeurs qui font intervenir une grandeur de la même nature qu'une rotation).

5. On a aussi **axial** ∧ **axial** = **polaire**, mais ce cas de figure est moins fréquent en physique.

Qu'est-ce qu'un « pseudo-vecteur » au juste ?

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, un vecteur $\vec{U} = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3$ est défini par le triplet de ses composantes (a, b, c). Ce que l'on appelle pseudo-vecteur est en fait un tenseur antisymétrique d'ordre 2, défini par la donnée d'une matrice 3×3 dont la structure est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Cet objet mathématique n'étant défini que par trois scalaires a, b et c, on a décidé de le représenter par un vecteur de composante a, b et c. Ce « vecteur » ainsi construit n'a pas le comportement d'un vecteur $\vec{U}$ usuel.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}}_{\text{tenseur antisymétrique}} \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{...on va dire...}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\text{« vecteur »}}$$

Exercices

1. Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs polaires. Montrer que $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est un vecteur axial.

2. Soient $\vec{U}$ un vecteur polaire et $\vec{V}$ un vecteur axial. Montrer que $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est un vecteur polaire.

Correction des exercices

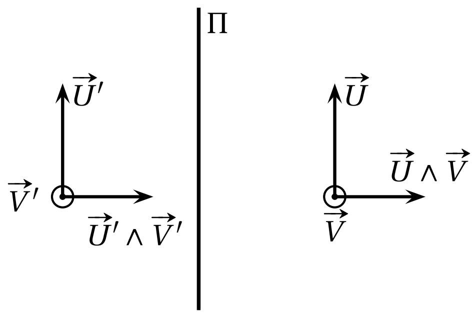
1. On considère $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs polaires.

1re méthode

Le plus simple est de décomposer l'étude.

Dans un premier temps, on prend $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tangents au plan Π.

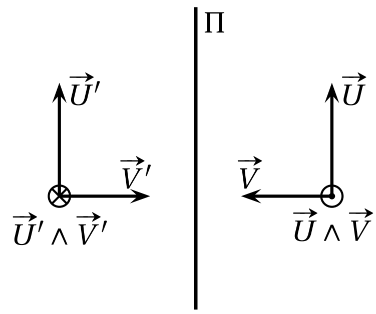
- On forme $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$.
- On construit les symétriques $\vec{U}'$ et $\vec{V}'$ sachant que ce sont des vecteurs polaires.
- On forme $\vec{W}' = \vec{U}' \wedge \vec{V}'$.
- On regarde comment le vecteur $\vec{W}$ se transforme.



Le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est ici normal à Π ; il se transforme selon :

$$\vec{W}'_\perp = \vec{W}_\perp . \tag{5}$$

Dans un second temps, on prend $\vec{U}$ tangent à Π et $\vec{V}$ normal à Π. Ainsi, le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est tangent à Π.



On obtient la transformation du produit vectoriel :

$$\vec{W}'_{//} = -\vec{W}_{//} \tag{6}$$

Les équations (5) et (6) caractérisent la transformation d'un vecteur axial.

Le produit vectoriel de deux vecteurs polaires est un vecteur axial.

2e méthode

On traite le cas général en décomposant chaque vecteur, sachant que :

- le produit vectoriel de deux vecteurs tangents à Π est normal à Π ;

— le produit vectoriel d'un vecteur tangent à Π avec un vecteur normal à Π est tangent à Π.

On décompose les vecteurs :

$$\vec{U} = \vec{U}_{/\!/} + \vec{U}_{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \vec{V}_{/\!/} + \vec{V}_{\perp}$$

Ces vecteurs étant des vecteurs polaires, leurs transformés selon la symétrie par rapport à Π s'écrivent :

$$\vec{U}' = \vec{U}_{/\!/} - \vec{U}_{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{V}' = \vec{V}_{/\!/} - \vec{V}_{\perp}$$

Le produit vectoriel se décompose sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} &= \left[\vec{U}_{/\!/} + \vec{U}_{\perp}\right] \wedge \left[\vec{V}_{/\!/} + \vec{V}_{\perp}\right] \\ &= \underbrace{\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{/\!/}}_{\vec{W}_{\perp}} + \underbrace{\left(\vec{U}_{\perp} \wedge \vec{V}_{/\!/}\right) + \left(\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{\perp}\right)}_{\vec{W}_{/\!/}}\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ se transforme, selon une symétrie par rapport à Π, en :

$$\begin{aligned}\vec{W}' = \vec{U}' \wedge \vec{V}' &= \left[\vec{U}_{/\!/} - \vec{U}_{\perp}\right] \wedge \left[\vec{V}_{/\!/} - \vec{V}_{\perp}\right] \\ &= \underbrace{\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{/\!/}}_{\vec{W}_{\perp}} - \underbrace{\left[\left(\vec{U}_{\perp} \wedge \vec{V}_{/\!/}\right) + \left(\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{\perp}\right)\right]}_{\vec{W}_{/\!/}}\end{aligned}$$

soit $\vec{W}' = -\vec{W}_{/\!/} + \vec{W}_{\perp}$. On retrouve les règle de transforme d'un vecteur axial.

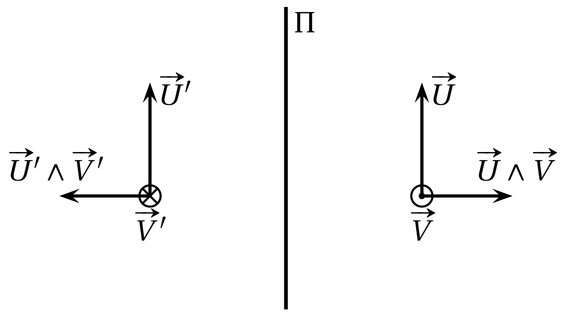
2. On considère $\vec{U}$ un vecteur polaire et $\vec{V}$ un vecteur axial.

1re méthode

Comme précédemment.

On transforme $\vec{U}$ comme un vecteur polaire, $\vec{V}$ comme un vecteur axial, et on forme le produit vectoriel.

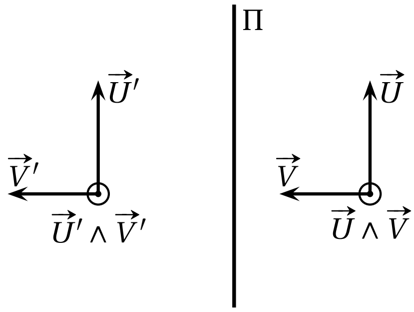
Dans un premier temps, on peut $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tangents à Π.



Le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est ici normal à Π ; il se transforme selon :

$$\vec{W}'_{\perp} = -\vec{W}_{\perp}. \tag{7}$$

Dans un second temps, on prend $\vec{U}$ (polaire) tangent à Π et $\vec{V}$ (axial) normal à Π.



Le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est ici tangent à Π ; il se transforme selon :

$$\vec{W}'_{/\!/} = \vec{W}_{/\!/}. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) caractérisent la transformation d'un vecteur polaire.

Le produit vectoriel de d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial est un vecteur polaire.

2e méthode

On traite le cas général en décomposant chaque vecteur, comme précédemment.

On décompose les vecteurs :

$$\vec{U} = \vec{U}_{/\!/} + \vec{U}_{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \vec{V}_{/\!/} + \vec{V}_{\perp}$$

Le vecteur $\vec{U}$ étant polaire et $\vec{V}$ étant axial, leurs transformés selon la symétrie par rapport à Π s'écrivent :

$$\vec{U}' = \vec{U}_{/\!/} - \vec{U}_{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{V}' = -\vec{V}_{/\!/} + \vec{V}_{\perp}$$

Le produit vectoriel se décompose sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} &= \left[\vec{U}_{/\!/} + \vec{U}_{\perp}\right] \wedge \left[\vec{V}_{/\!/} + \vec{V}_{\perp}\right] \\ &= \underbrace{\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{/\!/}}_{\vec{W}_{\perp}} + \underbrace{\left(\vec{U}_{\perp} \wedge \vec{V}_{/\!/}\right) + \left(\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{\perp}\right)}_{\vec{W}_{/\!/}}\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ se transforme, selon une symétrie par rapport à Π, en :

$$\begin{aligned}\vec{W}' = \vec{U}' \wedge \vec{V}' &= \left[\vec{U}_{/\!/} - \vec{U}_{\perp}\right] \wedge \left[-\vec{V}_{/\!/} + \vec{V}_{\perp}\right] \\ &= \underbrace{-\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{/\!/}}_{\vec{W}_{\perp}} + \underbrace{\left[\left(\vec{U}_{\perp} \wedge \vec{V}_{/\!/}\right) + \left(\vec{U}_{/\!/} \wedge \vec{V}_{\perp}\right)\right]}_{\vec{W}_{/\!/}}\end{aligned}$$

soit $\vec{W}' = \vec{W}_{/\!/} - \vec{W}_{\perp}$.