

Le sujet comporte trois parties indépendantes.

Merci de suivre les conseils suivants :

- laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires;
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points;
- respecter et indiquer la numérotation des questions;
- souligner ou encadrer les résultats.

Partie I — Il y a de l'orage dans l'air

Le processus de formation des nuages dans l'atmosphère suit un ensemble complexe d'étapes dont la connaissance est à la base de la météorologie. Le *cumulonimbus* est le stade ultime du nuage formé dans un courant d'air chaud ascendant en contact avec un air froid et sec. Son profil en forme d'enclume, dont le sommet atteint le haut de la troposphère, et sa taille colossale sont caractéristiques... et annonciateurs d'un orage imminent! On se propose de modéliser la répartition des charges électriques dans le nuage et de comprendre l'apparition de la foudre.



FIGURE I-1 – Le cumulonimbus est un nuage typique en forme d'enclume

Les mécanismes de séparation des charges électriques au sein du nuage ne sont pas encore parfaitement compris, mais on constate généralement l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives à son sommet. Dans certains cas, il peut même exister plusieurs zones chargées négativement ou positivement alternativement. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère au voisinage du sol. Des mesures effectuées par ballon-sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : environ $65 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ à 500 m d'altitude et jusqu'à $200 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

On considère un nuage typique situé entre les altitudes $h_1 = 2 \text{ km}$ et $h_2 = 10 \text{ km}$ (hauteur de la troposphère), de hauteur $H = h_2 - h_1 = 8 \text{ km}$ et de section horizontale $S = 1 \text{ km}^2$. Au niveau du sol, les charges positives se répartissent sur une épaisseur $h = 500 \text{ m}$. On rappelle la permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. Dans la modélisation proposée, on néglige tout effet de bord et on suppose que les grandeurs étudiées ne dépendent que de l'altitude z , comme indiqué sur la figure I-2.

On donne le champ disruptif de l'air sec $E_{\text{dis}} = 3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, et pour l'air saturé en humidité $E_{\text{dis}} = 1,0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Les charges positives près du sol sont réparties avec la densité volumique de charge uniforme ρ_{sol} . Le champ électrique est supposé nul en $z = 0$. À l'intérieur du nuage, on considère simplement que la densité volumique de charges $\rho(z)$ varie linéairement, de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ en $z = h_2$ à la valeur opposée $-\rho_0$ en $z = h_1$.

□ 1 — Montrer qu'en tout point M de l'espace, le champ électrostatique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z.$$

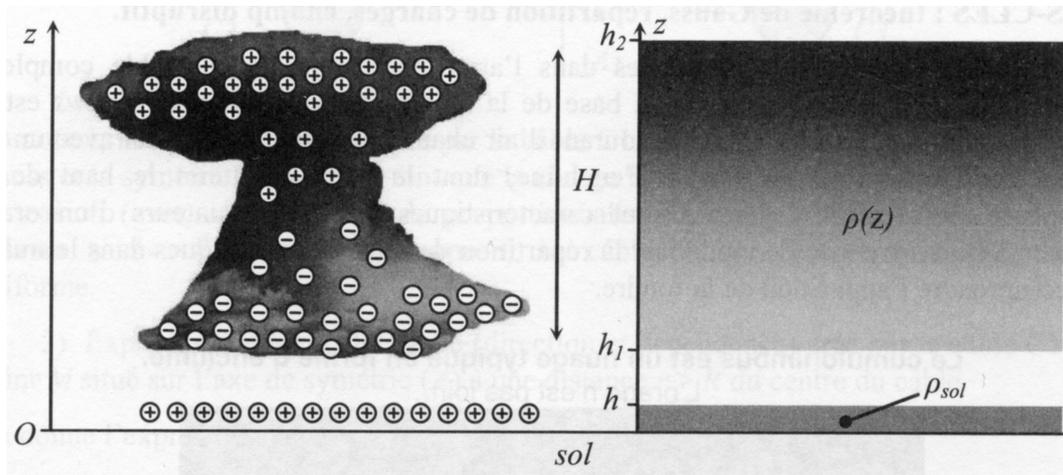


FIGURE I-2 – Répartition des charges électriques dans un nuage et au voisinage du sol — Modélisation unidimensionnelle

- 2 — En utilisant le théorème de Gauss et une surface bien choisie, déterminer le champ électrique $E(z)$ dans la zone charge $0 < z < h$ au niveau du sol. En déduire la valeur numérique de la densité volumique de charge ρ_{sol} , ainsi que la charge totale Q_{sol} existant dans cette zone.
- 3 — Montrer que le champ électrique dans la zone $h < z < h_1$ est uniforme et donner sa valeur.
- 4 — Établir l'expression de la densité volumique de charges $\rho(z)$ à l'intérieur du nuage.
- 5 — Montrer que l'équation locale de Maxwell-Gauss permet d'obtenir le champ électrique dans le nuage à une constante additive près. Justifier la valeur de cette constante.
- 6 — Représenter l'allure de $E(z)$ en fonction de l'altitude z .
- 7 — Déterminer la valeur numérique de ρ_0 , ainsi que les charges totales $-Q$ et $+Q$ portées respectivement par les moitiés inférieure et supérieure du nuage. Commenter.
- 8 — Exprimer le potentiel électrostatique $V(z)$ entre le sol et le nuage. On prendra $V = 0$ en $z = 0$. En déduire la différence de potentiel entre le sol et la base du nuage.
- 9 — Comparer la valeur du champ électrique obtenu précédemment et la valeur du champ disruptif de l'air. Commenter.

On constate que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus, comme les arbres, les clochers et... les paratonnerres. Pour illustrer cet *effet de pointe*, on propose la modélisation suivante.

Un objet pointu situé à l'altitude z est modélisé par une petite sphère de rayon R , de charge q et portée au potentiel $V(z)$. On ne considère ici que l'action de la sphère sur son environnement immédiat. Soit un point M situé à la distance $r > R$ du centre O de la sphère.

- 10 — Rappeler l'expression du champ électrique \vec{E} et du potentiel électrostatique créés en M par la sphère chargée. En déduire la relation entre la norme E du champ électrique créé au voisinage de la sphère et le potentiel $V(z)$ de celle-ci.
- 11 — Déterminer le rayon de la sphère permettant à l'air d'être ionisé à sa surface. Faire l'application numérique pour $z = 2$ m et $z = 10$ m. Commenter.
- 12 — Pourquoi dit-on qu'en l'absence d'obstacles, il vaut mieux s'allonger par terre et attendre que l'orage passe, plutôt que de rester debout? À quelle altitude l'air pourrait-il être ionisé au bout des doigts? Il apparaît alors un courant ionique et des effluves lumineux dus à la recombinaison des ions. Cet effet est connu sous le nom d'*effet corona* ou *effet couronne*.

Lorsque la foudre tombe, la décharge électrique ne dure que quelques centaines de microsecondes et libère une énorme quantité d'énergie sous forme thermique et sonore dans l'atmosphère.

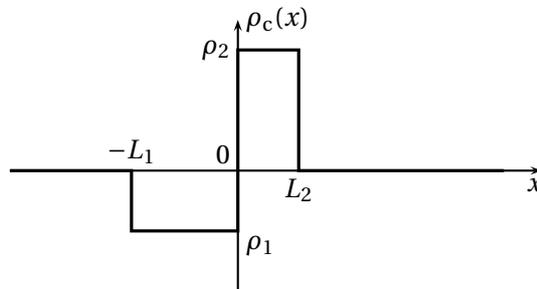
- 13 — Évaluer l'intensité électrique de la décharge.
- 14 — Déduire des résultats précédents l'énergie libérée par la foudre et la puissance correspondante. Quelle serait l'augmentation de la température de l'air à son voisinage? Conclure.

Partie II— Électrostatique d'une jonction PN à l'équilibre

Lorsqu'un semi-conducteur présente, dans une région très localisée de l'espace, une variation très brutale de la concentration en dopant, voire un changement de la nature du dopant, on dit que l'on a une jonction. Au voisinage de la jonction, dans une région dite « zone de charge d'espace », le cristal acquiert une distribution de charge électrique non nulle que l'on se propose d'étudier. Les propriétés qui en résultent sont à la base de la caractéristique des diodes, des transistors et de tous les circuits intégrés.

□ 1 — On supposera que dans le silicium on peut encore appliquer les lois de l'électrostatique à condition de remplacer ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, où ϵ_r est la permittivité relative du silicium. On suppose que la densité volumique de charge ρ_c autour d'une jonction située dans le plan $x = 0$ a l'allure suivante :

$$\begin{aligned} x < -L_1 : & \quad \rho_c = 0 \\ -L_1 < x < 0 : & \quad \rho_c = \rho_1 < 0 \\ 0 < x < L_2 : & \quad \rho_c = \rho_2 > 0 \\ L_2 < x : & \quad \rho_c = 0 \end{aligned}$$



La jonction est suffisamment large pour supposer que la distribution de charges est totalement invariante par toute translation dans le plan Oyz .

Sachant que la distribution de charges est globalement neutre, établir la relation vérifiée par L_1 , L_2 , ρ_1 et ρ_2 .

On admettra que, en dehors de la zone de charge d'espace, le champ électrostatique est nul en tout point d'abscisse x telle que $x < -L_1$ et $x > L_2$.

□ 2 — Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss où l'on remplacera ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$.

Déterminer alors le champ électrique en tout point M appartenant à la zone de charge d'espace ($-L_1 < x < L_2$). On distinguera entre les diverses régions de l'espace suivantes valeurs de x .

Représenter graphiquement l'allure de la composante selon x du champ électrique en fonction de x .

□ 3 — En déduire l'expression du potentiel électrostatique V dans les différentes régions de l'espace. On choisira l'origine des potentiels dans le plan $x = 0$.

Représenter graphiquement V en fonction de x .

□ 4 — Donner l'expression de la différence de potentiel $V_0 = V(L_2) - V(-L_1)$ entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charge d'espace en fonction de ρ_1 , L_1 , L_2 et ϵ .

□ 5 — La région $x > 0$ a été dopée avec du phosphore à raison de $N_2 = 1,6 \times 10^{21}$ atomes P par m^3 , tandis que la région $x < 0$ a été dopée avec du bore, avec un nombre d'atomes B par unité de volume $N_1 \gg N_2$. Dans la zone de charge d'espace, chaque atome P est ionisé en P^+ . Les électrons ainsi libérés traversent spontanément le plan $x = 0$, et chaque atome B situé dans la zone de charge d'espace capte un électron se transformant ainsi en ion B^- . On a réalisé une jonction PN.

En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de la charge élémentaire e , N_1 et N_2 .

□ 6 — Comparer L_1 à L_2 avec la condition $N_1 \gg N_2$.

En déduire l'expression, en fonction de L_2 , de la largeur totale de la zone de charge d'espace, que l'on appellera δ .

□ 7 — Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension seuil est voisine de V_0 .

En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charge d'espace en fonction de ϵ , V_0 , e et N_2 .

On donne $V_0 = 0,3 \text{ V}$, $\epsilon = 1,4 \times 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Calculer la valeur numérique de δ .

Partie III — Physique du skeleton

Le skeleton est un sport d'hiver qui se pratique dans un couloir de glace en pente : le coureur s'allonge sur une planche qui glisse sur la glace en prenant appui sur des patins.

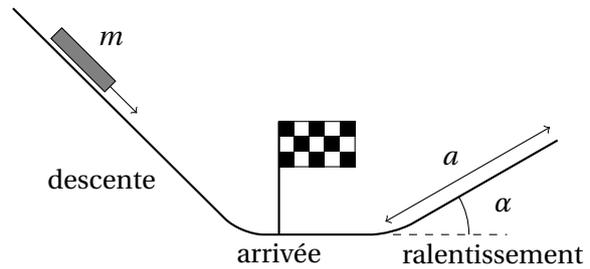


FIGURE I-3 – Skeleton

1 Question préliminaire

L'ensemble coureur + skeleton est assimilé à un solide de masse $m = 100 \text{ kg}$ pouvant glisser sans frottement. Il franchit la ligne d'arrivée avec une vitesse v_0 et se ralentit simplement en montant une pente faisant un angle α avec l'horizontale (cf. figure I-3).

Déterminer la longueur a de piste nécessaire au ralentissement.

Application numérique : on prendra $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et on considérera une pente de 5 %.

L'infrastructure ne se prêtant pas à la réalisation d'une piste inclinée de décélération, on envisage un freinage électromagnétique.

2 Freinage du skeleton

On fixe sous la planche un cadre métallique conducteur ayant la forme d'un rectangle de côtés $\ell \times L$ comme indiqué figure I-4

La piste de décélération est horizontale; on considérera un référentiel $(Oxyz)$ galiléen lié au sol : l'origine O est prise au point d'arrivée, l'axe Ox le long de la piste de décélération (qui correspond donc à $x > 0$), l'axe Oy selon la verticale ascendante. Un dispositif adéquat crée un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ stationnaire et uniforme sur toute ou partie de la longueur de la piste de décélération (et sur toute la largeur de la piste).

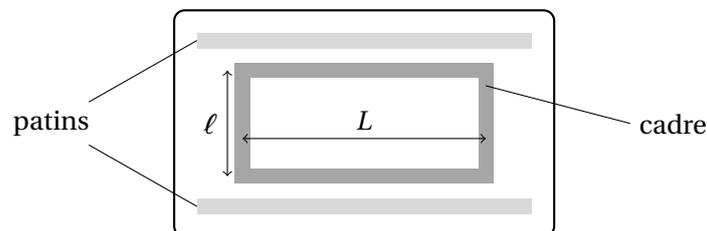


FIGURE I-4 – Skeleton vu de dessous

□ 1 — Le champ magnétique est étendu à toute la zone $x > 0$ comme représenté figure I-5.

1.a) La position du cadre est repérée par l'abscisse x de son extrémité avant et on suppose $x = 0$ à $t = 0$. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse $v = dx/dt$; on distinguera deux phases dans le mouvement.

Mettre en évidence un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de B_0 , m , ℓ et R (résistance du cadre).

1.b) Déterminer $x(t)$ pendant la phase de décélération et montrer que l'engin ne stoppe qu'à condition que L soit supérieure à une certaine valeur que l'on précisera. Montrer par une application numérique que ceci n'est

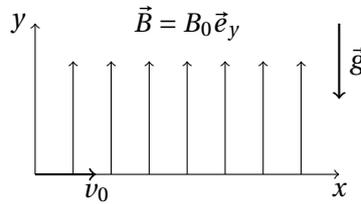


FIGURE I-5 – Champ magnétique sur la zone $x > 0$

pas réalisé et déterminer la vitesse finale du skeleton. En tout état de cause serait-il réaliste de n'envisager que ce freinage pour arrêter l'appareil?

On donne $\ell = 30$ cm, $L = 50$ cm, $B = 1,0$ T et $R = 1,0 \times 10^{-2} \Omega$.

□ 2 — On suppose à présent que le champ magnétique (stationnaire et uniforme) n'est non nul que dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = d$ comme indiqué figure I-6.

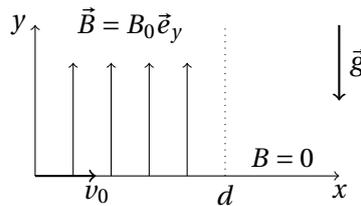


FIGURE I-6 – Champ magnétique sur la zone $0 < x < d$

2.a) Si $L \geq d$, montrer qualitativement qu'il existe deux phases de freinage séparées par une phase où la vitesse reste constante et déterminer la vitesse à l'issue des deux phases de freinage.

2.b) Même question si $L \leq d$.

2.c) Quelle valeur donner à d , en fonction de L , pour optimiser le freinage?

□ 3 — On place N zones de freinage identiques à la précédente, séparées les unes des autres d'une distance D . Quelle doit être la distance D pour encore une fois optimiser le freinage?

Quelle valeur donner à N pour stopper le skeleton? En déduire la distance d'arrêt et comparer sa valeur numérique aux valeurs trouvées à la question 1 et à la question préliminaire.

□ 4 — **Applications numériques**

4.a) Quelle est la durée de chaque phase de freinage? Quelle devrait être la durée totale du freinage? Conclusion.

4.b) On peut alors choisir un freinage « hybride » : freinage électromagnétique d'abord jusqu'à ce que la vitesse soit $v_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, puis freinage mécanique ensuite. Déterminer la durée du freinage électromagnétique ainsi que le nombre de zones de champ nécessaire.