

Partie I — Il y a de l'orage dans l'air

□ 1 — On néglige les effets de bord, supposant que les grandeurs ne dépendent que de z . En particulier le potentiel électrostatique s'écrit $V(M) = V(z)$, et le champ $\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV(z)}{dz} \vec{e}_z$ est donc de la forme

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z.$$

□ 2 — Considérons comme surface fermée Σ un cylindre d'axe Oz , de section S , compris entre $z = 0$ et l'altitude $z < h$. Le champ étant nul en $z = 0$, son flux à travers Σ s'écrit

$$\oiint_{P \in \Sigma} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = SE(z).$$

La densité volumique de charge étant uniforme dans le sol, on a

$$Q_{\text{int}} = \rho_{\text{sol}} Sz.$$

Le théorème de Gauss

$$\oiint_{P \in \Sigma} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

conduit à

$$E(z) = \frac{\rho_{\text{sol}} z}{\epsilon_0}.$$

On donne $E(h) = \frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0} = 65 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$. On en déduit

$$\rho_{\text{sol}} = \frac{E(h) \epsilon_0}{h} = \frac{65 \times 10^3 \times 8,85 \times 10^{-12}}{500}$$

soit

$$\rho_{\text{sol}} = 1,15 \times 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

La charge totale dans cette zone est

$$Q_{\text{sol}} = \rho_{\text{sol}} h S = \rho_{\text{sol}} \times 500 \times 10^6$$

soit $Q_{\text{sol}} = 0,58 \text{ C}$.

□ 3 — La zone $h < z < h_1$ est vide de charge. La relation de Maxwell-Gauss s'écrit alors

$$\text{div} \vec{E} = \frac{dE(z)}{dz} = 0.$$

Le champ électrique est donc uniforme dans la zone $h < z < h_1$.

Il faut $E_1 = E(h)$ soit $E_1 = 65 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

□ 4 — La densité volumique de charge varie de façon affine de $-\rho_0$ en $z = h_1$ à ρ_0 en $z = h_2$; la pente de la variation est alors $\frac{2\rho_0}{h_2 - h_1} = \frac{2\rho_0}{H}$. On a donc

$$\rho(z) = \frac{2\rho_0}{H}(z - h_1) - \rho_0 = \frac{\rho_0}{H}(2z - 2h_1 - h_2 + h_1)$$

soit

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{H}[2z - (h_1 + h_2)].$$

□ 5 — L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit, comme $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$:

$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0} = \frac{2\rho_0}{\epsilon_0 H}(z - h_1) - \frac{\rho_0}{\epsilon_0}.$$

On en déduit à une constante additive A près

$$E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(z - h_1)^2 - \frac{\rho_0 z}{\epsilon_0} + A \quad \text{pour } h_1 < z < h_2.$$

Le champ étant uniforme dans la zone $h < z < h_1$, on en déduit par continuité en $z = h_1$:

$$E(h_1) = -\frac{\rho_0 h_1}{\epsilon_0} + A = \frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0},$$

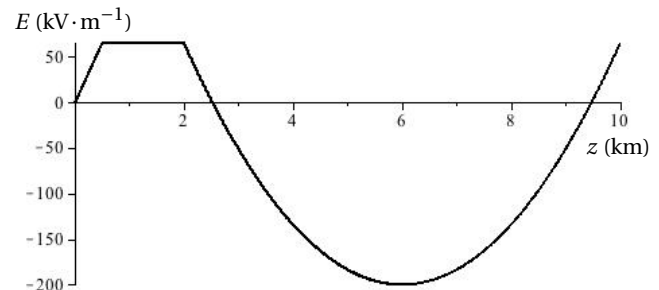
On a donc

$$A = \frac{\rho_{\text{sol}} h + \rho_0 h_1}{\epsilon_0}$$

et

$$E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(z - h_1)^2 - \frac{\rho_0(z - h_1)}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0}.$$

□ 6 — Le champ électrique croît de façon linéaire de 0 à $E(h)$ sur la zone $0 \leq z \leq h$. Il reste constante de h à h_1 . Il varie ensuite de façon parabolique de h_1 à h_2 .



□ 7 — Le champ passe par un extremum en z_m tel que

$$\begin{aligned} \frac{dE(z)}{dz} = 0 &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(2z_m - 2h_1 - H) \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(2z_m - h_1 + h_2) \end{aligned}$$

soit à l'altitude

$$z_m = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

On est alors en milieu du nuage. Le champ vaut à cette altitude

$$E_m = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H} \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - h_1 \right)^2 - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - h_1 \right) + \frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 H} (h_2 - h_1)^2 - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (h_2 - h_1) + \frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} H - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} H + \frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0} - \frac{\rho_0 H}{4\epsilon_0}.$$

On en déduit

$$\rho_0 = 4 \frac{\epsilon_0 E_m + \rho_{\text{sol}} h}{H}.$$

On calcule

$$\rho_0 = 4 \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 200 \times 10^3 + 1,15 \times 10^{-9} \times 500}{8000}$$

soit

$$\rho_0 = 1,17 \times 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

La moitié inférieure du nuage porte la charge

$$-Q = \int_{h_1}^{\frac{h_1+h_2}{2}} \rho(z) S dz = \frac{\rho_0 S}{H} \int_{h_1}^{\frac{h_1+h_2}{2}} [2z - (h_1 + h_2)] dz$$

$$= \frac{\rho_0 S}{H} \left[\frac{(h_1 + h_2)^2}{4} - h_1^2 \right] + \frac{\rho_0 S}{H} \left[-\frac{(h_1 + h_2)^2}{2} + (h_1 + h_2) h_1 \right]$$

$$= \frac{\rho_0 S}{H} \left[-\frac{(h_1 + h_2)^2}{4} + h_1 h_2 \right]$$

$$= -\frac{\rho_0 S}{H} \frac{h_1^2 + h_2^2 + 2h_1 h_2 - 4h_1 h_2}{4} = -\frac{\rho_0 S}{H} \frac{(h_2 - h_1)^2}{4}$$

soit comme $H = h_2 - h_1$:

$$Q = \frac{\rho_0 S H}{4}.$$

On calcule $Q = 2,35 \text{ C}$.

Cette valeur est en fait élevée, car le coulomb est une unité « forte ».

□ 8 — Entre $z = 0$ et $z = h$, on a

$$\frac{dV}{dz} = -E(z) = -\frac{\rho_{\text{sol}} z}{\epsilon_0}$$

d'où en prenant $V = 0$ en $z = 0$:

$$V(z) = -\frac{\rho_{\text{sol}}}{2\epsilon_0} z^2 \quad \text{pour } 0 < z < h.$$

Entre $z = h$ et $z = h_1$, le champ électrique est uniforme, soit

$$\frac{dV}{dz} = -E(h) = -\frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0},$$

d'où

$$V(z) = -\frac{\rho_{\text{sol}} h}{\epsilon_0} z + B.$$

Par continuité en $z = h$, on a

$$V(h) = -\frac{\rho_{\text{sol}}}{2\epsilon_0} h^2 = -\frac{\rho_{\text{sol}}}{\epsilon_0} h^2 + B,$$

d'où

$$B = \frac{\rho_{\text{sol}}}{2\epsilon_0} h^2$$

et

$$V(z) = \frac{\rho_{\text{sol}} h}{2\epsilon_0} (h - 2z) \quad \text{pour } h \leq z \leq h_1.$$

La différence de potentiel entre le sol et la base du nuage vaut

$$U = V(h_1) - V(0) = \frac{\rho_{\text{sol}} h}{2\epsilon_0} (h - 2h_1).$$

On calcule

$$U = \frac{1,15 \times 10^{-9} \times 500}{2 \times 8,85 \times 10^{-12}} \times (500 - 2 \times 2000)$$

soit

$$U = -1,14 \times 10^8 \text{ V}.$$

□ 9 — Le champ disruptif de l'air sec a pour ordre de grandeur $E_{\text{dis}} = 36 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1} = 3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Cependant, l'air dans le nuage est saturé en humidité. Une recherche nous permet de trouver que le champ disruptif de l'air saturé en humidité est $E_{\text{dis}} = 1,0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le champ maximum au milieu du nuage n'atteint que $0,2 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Il est donc trop faible pour ioniser l'air et provoquer l'apparition d'un éclair.

□ 10 — À l'extérieur d'une sphère chargée centrée en P , le champ en M est donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}.$$

Le potentiel en M vaut

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM}.$$

Au voisinage de la sphère, on a $PM \approx R$, soit

$$\|\vec{E}\| = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{et} \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Le champ et le potentiel sont alors reliés par

$$\|\vec{E}(M)\| = \frac{|V(M)|}{R}.$$

□ 11 — On se place au voisinage du sol (cf les valeurs de z pour l'application numérique), où le potentiel est donné par

$$V(z) = -\frac{\rho_{\text{sol}}}{2\epsilon_0} z^2.$$

L'air sera ionisé à la surface de la sphère si le champ électrique atteint le champ disruptif, c'est-à-dire pour un rayon

$$R = \frac{|V(z)|}{E_{\text{dis}}},$$

soit

$$R = \frac{\rho_{\text{sol}} z^2}{2\epsilon_0 E_{\text{dis}}}.$$

Pour l'air saturé en humidité, $E_{\text{dis}} = 1,0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. On calcule alors pour $z = 2 \text{ m}$:

$$R = \frac{1,15 \times 10^{-9} \times 2^2}{2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^6}$$

soit $R(z = 2 \text{ m}) = 0,26 \text{ mm}$.

Pour $z = 10 \text{ m}$:

$$R = \frac{1,15 \times 10^{-9} \times 10^2}{2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^6}$$

soit $R(z = 10 \text{ m}) = 6,5 \text{ mm}$.

Plus l'altitude est élevée, moins les objets ont besoin d'être pointus pour ioniser l'air.

□ 12 — En restant debout, on déforme les lignes de champ électrique; celui-ci devient plus intense sur les parties « pointues » et peut ioniser l'air; la foudre peut alors être attirée.

On peut estimer le rayon de l'extrémité d'un doigt à $R = 1 \text{ cm}$. L'altitude (par rapport au sol) à partir de laquelle l'air sera ionisé à l'extrémité des doigts est

$$z = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 E_{\text{dis}} R}{\rho_{\text{sol}}}}.$$

A.N. : $z = \sqrt{\frac{2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-2}}{1,15 \times 10^{-9}}}$, soit $z = 12 \text{ m}$.

□ 13 — La charge Q portée par le nuage est transférée pendant une durée Δt . L'intensité correspondante a pour ordre de grandeur

$$I \approx \frac{Q}{\Delta t}.$$

En prenant $\Delta t = 500 \mu\text{s}$, on calcule $I \approx 5 \times 10^3 \text{ A}$. Cette intensité est énorme.

□ 14 — La différence de potentielle entre le nuage et le sol est $U = -1,14 \times 10^8 \text{ V}$. La puissance correspondant à l'intensité de décharge est

$$P = |U| I \approx 5 \times 10^{11} \text{ W}.$$

L'énergie libérée pendant la durée Δt vaut $\mathcal{E} = P \Delta t$, soit $\mathcal{E} \approx 3 \times 10^8 \text{ J}$.

On peut considérer (après quelques recherches) que le canal par lequel transite la foudre a une diamètre d'environ 10 cm . On considère donc un cylindre d'air, de rayon $a = 5 \text{ cm}$, de hauteur $h_1 = 2 \text{ km}$ (il relie le sol à la base du nuage), contenant de l'air aux conditions normales de température et de pression, assimilé à un gaz parfait. Le volume étant $\pi a^2 h_1$, l'équation d'état s'écrit

$$P_0 \pi a^2 h_1 = n R T_0,$$

d'où la quantité

$$n = \frac{P_0 \pi a^2 h_1}{R T_0} = \frac{10^5 \times \pi \times (0,05)^2 \times 2 \times 10^3}{8,3 \times 300} = 630 \text{ mol}.$$

L'énergie \mathcal{E} est reçue par le gaz sous la pression atmosphérique; le premier principe s'écrit alors

$$\mathcal{E} = n C_{p,m} R \Delta T = \frac{7}{2} n R \Delta T$$

d'où une variation de température

$$\Delta T = \frac{2\mathcal{E}}{7nR} \approx 2 \times 10^4 \text{ K}.$$

La température de l'air augmente d'environ $20000 \text{ }^\circ\text{C}$. Cette valeur très importante provoque l'apparition d'un plasma lumineux (c'est l'éclair que l'on voit). L'air surchauffé se dilate brusquement, entraînant une onde de choc : le tonnerre.

Partie II — Électrostatique d'une jonction PN à l'équilibre

□ 1 — On considère un cylindre de section S compris entre $z = -L_1$ et $+L_2$. La distribution de charges étant globalement neutre, sa charge totale est nulle, soit

$$Q = \rho_1 L_1 S + \rho_2 L_2 S = 0,$$

d'où

$$\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = 0.$$

□ 2 — En remplaçant ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit

$$\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho_c}{\epsilon}.$$

Le plan $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie, donc $\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z = 0$; le plan $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie, donc $\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_y = 0$. Finalement, le champ n'a de composante que selon \vec{e}_x :

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_x.$$

La distribution est invariante par translation selon \vec{e}_y et \vec{e}_z , donc la composante du champ ne dépend ni de y ni de z , d'où

$$\vec{E}(M) = E(x) \vec{e}_x.$$

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit alors

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho_c}{\epsilon},$$

soit

$$\frac{dE}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x > L_2 \\ \frac{\rho_2}{\epsilon} & \text{pour } 0 < x \leq L_2 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon} & \text{pour } -L_1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{pour } x < -L_1 \end{cases}$$

On a donc

$$E(x) = \begin{cases} A_1 & \text{pour } x > L_2 \\ \frac{\rho_2 x}{\epsilon} + A_2 & \text{pour } 0 < x \leq L_2 \\ \frac{\rho_1 x}{\epsilon} + A_3 & \text{pour } -L_1 \leq x \leq 0 \\ A_4 & \text{pour } x < -L_1 \end{cases}$$

On a d'une part $E(x) = 0$ pour $x > L_2$, d'où $A_1 = 0$;

d'autre part $E(x) = 0$ pour $x < -L_1$, d'où $A_4 = 0$.

La continuité en $x = L_2$ implique

$$E(L_2) = 0 = \frac{\rho_2 L_2}{\epsilon} + A_2$$

d'où $A_2 = -\frac{\rho_2 L_2}{\epsilon}$.

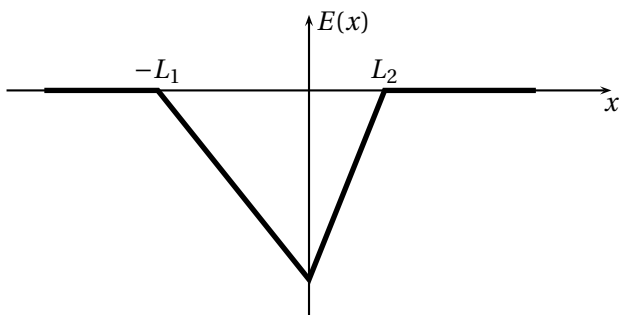
La continuité en $x = -L_1$ implique

$$E(-L_1) = 0 = -\frac{\rho_1 L_1}{\epsilon} + A_3$$

d'où $A_3 = \frac{\rho_1 L_1}{\epsilon}$.

Finalement

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } x \geq L_2 \\ \frac{\rho_2(x-L_2)}{\epsilon} \vec{e}_x & \text{si } 0 < x \leq L_2 \\ \frac{\rho_1(x+L_1)}{\epsilon} \vec{e}_x & \text{si } -L_1 < x \leq 0 \\ \vec{0} & \text{si } x \leq -L_1 \end{cases}$$



□ 3 — On détermine le potentiel à partir de la relation

$$\text{locale } E(x) = -\frac{dV}{dx}.$$

En intégrant chaque expression, on obtient un potentiel de la forme

$$V(x) = \begin{cases} C_1 & \text{pour } x \geq L_2 \\ -\frac{\rho_2(x-L_2)^2}{2\epsilon} + C_2 & \text{pour } 0 < x \leq L_2 \\ -\frac{\rho_1(x+L_1)^2}{2\epsilon} + C_3 & \text{pour } -L_1 < x \leq 0 \\ C_4 & \text{pour } x \leq -L_1 \end{cases}$$

où C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes.

On choisit $V(0) = 0$, soit d'une part

$$V(0) = -\frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon} + C_2 = 0$$

d'où $C_2 = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon}$. Pour $0 < x \leq L_2$ le potentiel s'écrit donc

$$V(x) = \frac{\rho_2}{2\epsilon} [L_2^2 - (x-L_2)^2] = \frac{\rho_2}{2\epsilon} x(2L_2 - x).$$

D'autre part

$$V(0) = -\frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon} + C_3 = 0$$

d'où $C_3 = \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon}$. Pour $-L_1 < x \leq 0$ le potentiel s'écrit donc

$$V(x) = \frac{\rho_1}{2\epsilon} [L_1^2 - (x+L_1)^2] = -\frac{\rho_1}{2\epsilon} x(2L_1 + x).$$

La continuité du potentiel en $x = L_2$ conduit à

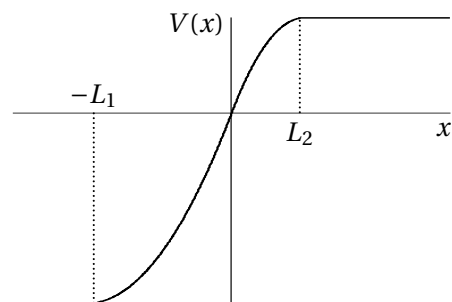
$$V(L_2) = C_1 = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon}.$$

La continuité en $x = -L_1$ s'écrit

$$V(-L_1) = C_4 = \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon}.$$

On a finalement

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon} & \text{pour } x \geq L_2 \\ \frac{\rho_2}{2\epsilon} x(2L_2 - x) & \text{pour } 0 < x \leq L_2 \\ -\frac{\rho_1}{2\epsilon} x(2L_1 + x) & \text{pour } -L_1 < x \leq 0 \\ \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon} & \text{pour } x \leq -L_1 \end{cases}$$



□ 4 — On a

$$V_0 = V(L_2) - V(-L_1) = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon} - \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon}$$

soit comme $\rho_1 L_1 = \rho_2 L_2$,

$$V_0 = -\frac{\rho_1 L_1 (L_1 + L_2)}{2\epsilon}.$$

□ 5 — Dans la région $x < 0$, la densité particulière est N_1 , et la charge de chaque particule $-e$; on a donc

$$\rho_1 = -N_1 e.$$

Les particules de la région $x > 0$ ayant pour charge $+e$, on a de même

$$\rho_2 = N_2 e.$$

□ 6 — On a

$$L_1 = -\frac{\rho_2 L_2}{\rho_1} = \frac{N_2}{N_1} L_2,$$

soit comme $N_1 \gg N_2$, $L_1 \ll L_2$.

La largeur totale de la zone de charge d'espace vaut $\delta = L_1 + L_2$, soit $\delta \approx L_2$.

□ 7 — On a

$$V_0 = -\frac{\rho_1 L_1 (L_1 + L_2)}{2\epsilon} \approx -\frac{\rho_1 L_1 L_2}{2\epsilon} = -\frac{\rho_1 N_2 L_2^2}{2N_1 \epsilon}$$

soit, avec $\rho_1 = -N_1 e$ et $L_2 = \delta$

$$V_0 = \frac{N_2 e \delta^2}{2\epsilon}.$$

On en déduit

$$\delta = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{e N_2}}.$$

On calcule $\delta = 570 \text{ nm}$.

Partie III — Physique du skeleton

1 Question préliminaire

L'ensemble coureur + skeleton est soumis au poids (force conservative), et la réaction du support ne travaille pas (glissement sans frottement). Son énergie mécanique est donc une constante du mouvement. En prenant comme origine de l'altitude (énergie potentielle de pesanteur nulle) l'arrivée sur la piste, on a donc

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + m g a \sin \alpha.$$

On en déduit

$$a = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}.$$

Pour une pente $\tan \alpha = 0,05$; on a

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = 0,05$$

et $2g \sin \alpha \approx 1$, d'où $a = 900 \text{ m}$.

2 Freinage du skeleton

□ 1 — Orientons le cadre comme indiqué sur la figure :

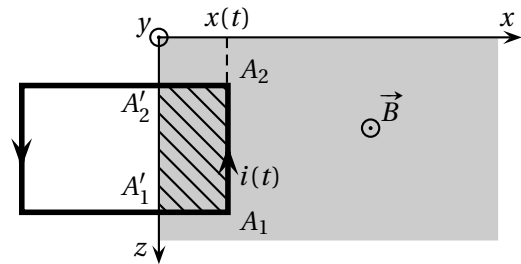


1.a) Pour $t > 0$ on distingue deux phases dans le mouvement du cadre :

$x(t) < L$ le cadre entre partiellement dans la zone où règne le champ magnétique;

$x(t) \geq L$ le cadre est entièrement dans la zone où règne le champ magnétique.

Première phase : $x < L$



(1) Le flux est donné par $\Phi(t) = B_0 \ell x(t)$. La f.é.m. s'en déduit par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 \ell v(t).$$

Le courant induit vaut donc

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{B_0 \ell}{R} v(t).$$

La force de Laplace subie par le cadre s'écrit alors

$$\vec{F}_L = i(t) \overrightarrow{A_1' A_1} \wedge \vec{B} + i(t) \overrightarrow{A_2 A_2'} \wedge \vec{B} + i(t) \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \vec{B}$$

soit comme $\overrightarrow{A_2 A_2'} = -\overrightarrow{A_1' A_1}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= i(t) \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \vec{B} = i(t) (-\ell \vec{e}_z) \wedge B_0 \vec{e}_y \\ &= B_0 \ell i(t) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au cadre s'écrit, en projection selon \vec{e}_x :

$$m \frac{dv}{dt} = B_0 \ell i(t) = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} v(t)$$

soit

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{B_0^2 \ell^2}.$$

Deuxième phase : $x \geq L$

Le cadre est entièrement dans la zone où règne le champ magnétique; le flux de \vec{B} à travers le cadre et donc constant et vaut $\Phi = B_0 \ell L$.

On a donc $e = 0$, d'où $i = 0$ et $\vec{F}_L = \vec{0}$. Le principe de la dynamique s'écrit alors

$$m \frac{dv}{dt} = 0.$$

La vitesse obéit donc à l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} &= 0 & \text{pour } 0 < x(t) < L \\ \frac{dv}{dt} &= 0 & \text{pour } x(t) \geq L \end{aligned}$$

avec

$$\tau = \frac{mR}{B_0^2 \ell^2}. \quad (2)$$

1.b) La phase de décélération est régie par

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0.$$

Avec $v(0) = v_0$, on en déduit

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} = \frac{dx}{dt}$$

On en déduit en intégrant

$$x(t) = -v_0 \tau e^{-t/\tau} + A.$$

Or $x(0) = -v_0 \tau + A = 0$, d'où

$$x(t) = v_0 \tau [1 - e^{-t/\tau}]. \quad (3)$$

La distance parcourue est finie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v_0 \tau = x_f.$$

La cadre est donc stoppé quand il atteint cette distance. La loi $x(t)$ établie n'est valable que pendant la phase de freinage, soit $x(t) < L$. La distance maximale atteinte doit être à l'intérieur de cette zone de freinage, soit $x_f < L$.

L'engin ne peut donc stopper que si

$$L > v_0 \tau = \frac{mRv_0}{B_0^2 \ell^2}. \quad (4)$$

On calcule $v_0 \tau = 333$ m. On a $L < v_0 \tau$: **l'engin n'est pas stoppé.**

La phase de décélération se termine à l'instant t_1 tel que $x(t_1) = L$, soit

$$v_0 \tau [1 - e^{-t_1/\tau}] = L$$

1. Il est inutile d'expliciter t_1 car on cherche seulement $v(t_1)$.

d'où¹

$$e^{-t_1/\tau} = 1 - \frac{L}{v_0 \tau}.$$

On en déduit la vitesse finale du skeleton :

$$v_1 = v(t_1) = v_0 e^{-t_1/\tau}$$

soit

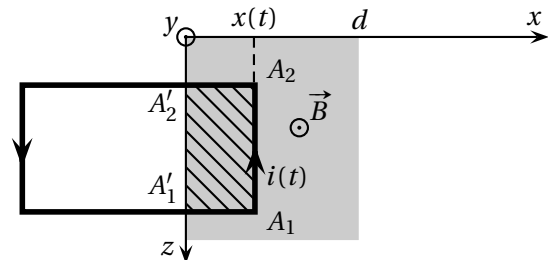
$$v_1 = v_0 - \frac{L}{\tau}. \quad (5)$$

On calcule $v_1 = 29,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: la diminution de vitesse est négligeable! **Il n'est pas réaliste de n'envisager que ce freinage pour arrêter l'appareil.**

2.a) On considère $L \geq d$.

Le mouvement se décompose en trois phases.

Première phase : $0 < x(t) < d$



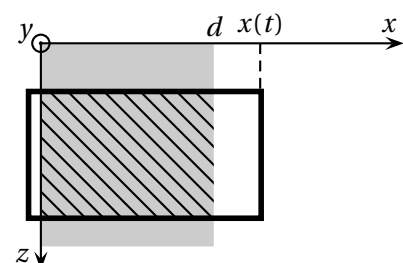
Le flux du champ magnétique varie quand le cadre pénètre dans la zone; on a établi à la question précédente :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{-t/\tau} \\ x(t) &= v_0 \tau [1 - e^{-t/\tau}] \end{aligned}$$

Cette phase se termine en t_1 tel que $x(t_1) = d$; on en déduit la vitesse à la fin de cette phase de freinage

$$v_1 = v_0 - \frac{d}{\tau}.$$

Deuxième phase : $d \leq x(t) < L$



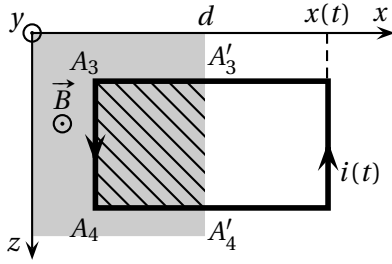
Le flux est constant; il n'y a pas de phénomène d'induction, la force de Laplace subie par le cadre est donc nulle, et son mouvement est régi par

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

d'où

$$v(t) = v_1 = v_0 - \frac{L}{\tau}.$$

Troisième phase : $L \leq x(t) < L + d$



Le flux est donné par

$$\Phi(t) = B_0 \ell [d - (x - L)] = B_0 \ell [d + L - x(t)].$$

La f.é.m. induite vaut donc

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \ell v(t)$$

et le courant induit

$$i(t) = \frac{B_0 \ell}{R} v(t).$$

La force de Laplace subie par le cadre s'écrit

$$\vec{F}_L = i(t) \overrightarrow{A_3 A_3'} \wedge \vec{B} + i(t) \overrightarrow{A_3 A_4} \wedge \vec{B} + i(t) \overrightarrow{A_4 A_4'} \wedge \vec{B}$$

soit comme $\overrightarrow{A_3 A_3'} + \overrightarrow{A_4 A_4'} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= i(t) \overrightarrow{A_3 A_4} \wedge \vec{B} = i(t) \ell \vec{e}_z \wedge B_0 \vec{e}_y \\ &= -B_0 \ell i(t) \vec{e}_x = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} v(t) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Le principe de la dynamique appliqué au skeleton conduit, après projection selon \vec{e}_x , à

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} v(t)$$

soit

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{B_0^2 \ell^2}$$

La loi régissant le mouvement est la même quand le cadre entre dans la zone où règne le champ magnétique et quand le cadre en sort.

Cette troisième phase débute à l'instant t_2 où $x(t_2) = L$, et $v(t_2) = v_1$ car la vitesse ne varie pas dans la deuxième phase. On a donc

$$v(t) = v_1 e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}.$$

On en déduit

$$x(t) = -v_1 \tau e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} + C$$

avec

$$x(t_2) = L = C - v_1 \tau$$

d'où $C = L + v_1 \tau$ et

$$x(t) = L + v_1 \tau \left[1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right].$$

Cette troisième phase prend fin à l'instant t_3 où $x(t_3) = L + d$ (le cadre sort de la zone), soit

$$x(t_3) = L + d = L + v_1 \tau \left[1 - e^{-\frac{t_3-t_2}{\tau}} \right]$$

On en déduit

$$e^{-\frac{t_3-t_2}{\tau}} = 1 - \frac{d}{v_1 \tau}$$

d'où l'expression de la vitesse à la fin de la traversée de la zone :

$$v_f = v(t_3) = v_1 e^{-\frac{t_3-t_2}{\tau}} = v_1 - \frac{d}{\tau}.$$

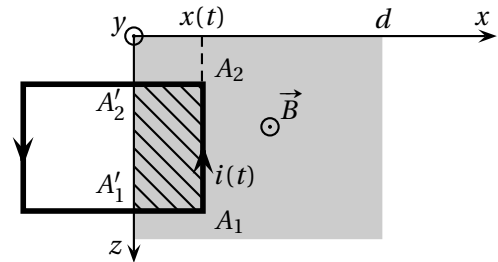
Comme $v_1 = v_0 - d/\tau$, on a finalement

$$v_f = v_0 - \frac{2d}{\tau}. \quad (6)$$

2.b) On considère $L \leq d$.

Le mouvement se décompose en trois phases.

Première phase : $0 < x(t) < L$



Le flux du champ magnétique varie quand le cadre pénètre dans la zone; on a établi à la question précédente :

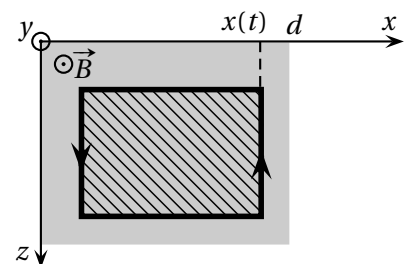
$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$x(t) = v_0 \tau [1 - e^{-t/\tau}]$$

Cette phase se termine en t_1 tel que $x(t_1) = L$; on en déduit la vitesse à la fin de cette phase de freinage

$$v_1 = v_0 - \frac{L}{\tau}.$$

Deuxième phase : $L \leq x(t) < d$

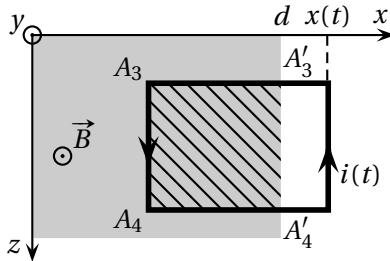


Le flux est constant; il n'y a pas de phénomène d'induction, la force de Laplace subie par le cadre est donc nulle, et son mouvement est régi par

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\text{d'où } v(t) = v_1 = v_0 - \frac{L}{\tau}$$

Troisième phase : $d \leq x(t) < d + L$



Elle est identique à celle traitée à la question 2.a; la vitesse à l'issue de cette phase est donc

$$v_f = v_0 - \frac{2L}{\tau} \quad (7)$$

2.c) Le freinage sera optimisé si l'on minimise la zone où la vitesse est constante.

Dans le cas $L \geq d$, cette zone est $d \leq x(t) < L$; dans le cas $L \leq d$, cette zone est $L \leq x(t) < d$.

On voit que dans tous les cas, on fait disparaître cette phase de non décélération en prenant $d = L$.

□ 3 — Nous venons de voir que le freinage par une zone est optimisé si sa largeur est $d = L$.

Si l'on place plusieurs zones successives, le freinage sera optimisé si dès que le cadre est sorti d'une zone, il pénètre dans la zone suivante. Deux zones successives devront donc être séparées d'une distance égale à la longueur du cadre, soit $D = L$.

Dans le cas où $d = L$, les relations (6) comme (7) indiquent que la vitesse diminue de $\frac{2L}{\tau}$ après chaque zone de freinage.

Pour obtenir l'arrêt après N zones de freinages, il faut

$$v_0 - \frac{2N_m L}{\tau} = 0$$

soit un nombre minimal

$$N_m = \frac{v_0 \tau}{2L} \quad (8)$$

Il faut donc que N soit le plus petit entier tel que

$$N \geq \frac{v_0 m R}{2L B_0^2 \ell^2} \quad (9)$$

On calcule $N \geq 333,3$; il faut donc $N = 334$ zones de freinage.

Remarque : le mobile sera stoppé avant de ressortir de la dernière zone.

Chaque zone est de longueur L , et deux zones successives sont séparées de $D = L$. Les N zones occupent donc la longueur totale $D_a = 2L \times N$, d'où une distance d'arrêt $D_a = 334 \text{ m}$.

Cette distance est nettement inférieure à celle nécessaire avec un freinage mécanique, donnée par (1).

□ 4 — Applications numériques

4.a) Dans le cas du freinage optimisé, le cadre est constamment soumis à la force de Laplace de composante selon \vec{e}_x :

$$F_L = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} v(t),$$

et sa vitesse est régie par

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0.$$

Avec $v(0) = v_0$, on en déduit

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

et

$$x(t) = v_0 \tau [1 - e^{-t/\tau}] \quad (10)$$

Attention : chaque zone de freinage est de longueur $2L$; on a montré que la vitesse diminue de $2L/\tau$ à la traversée de chacune de ces zones. Les zones ayant même longueur, mais le cadre allant de moins en moins vite, il met une durée de plus en plus longue à traverser chaque zone.

La k -ième zone correspond à l'intervalle

$$2(k-1)L \leq x(t) \leq 2kL.$$

Le cadre entre dans cette zone à l'instant t'_k tel que $x(t'_k) = 2(k-1)L$, et en ressort à l'instant t''_k tel que $x(t''_k) = 2kL$, soit

$$x(t'_k) = v_0 \tau [1 - e^{-t'_k/\tau}] = 2(k-1)L$$

$$x(t''_k) = v_0 \tau [1 - e^{-t''_k/\tau}] = 2kL$$

soit

$$1 - e^{-t'_k/\tau} = \frac{2(k-1)L}{v_0 \tau} \quad \text{et} \quad 1 - e^{-t''_k/\tau} = \frac{2kL}{v_0 \tau}.$$

On en déduit

$$t'_k = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - 2(k-1)L} \right) \quad \text{et} \quad t''_k = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - 2kL} \right).$$

La durée de traversée de la k -ième zone vaut donc

$$T_k = t''_k - t'_k = \tau \left[\ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - 2kL} \right) - \ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - 2(k-1)L} \right) \right]$$

soit

$$T_k = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau + 2L - 2kL}{v_0 \tau - 2kL} \right). \quad (11)$$

La durée totale du freinage est

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^N T_k = \tau \sum_{k=1}^N \ln \left(\frac{v_0 \tau + 2L - 2kL}{v_0 \tau - 2kL} \right) \\ &= \tau \ln \left[\prod_{k=1}^N \left(\frac{v_0 \tau + 2L - 2kL}{v_0 \tau - 2kL} \right) \right] \end{aligned}$$

soit, après simplification des produits

$$T = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - 2NL} \right)$$

► Établir l'expression de T_k n'offre pas un grand intérêt. On peut remarquer que pendant toute la phase de freinage, on a

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0$$

d'où

$$x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

La distance x est parcourue au bout de la durée

$$t = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau} \right) = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - x} \right).$$

La durée nécessaire pour parcourir la distance $2NL$ est donc

$$T = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau} \right) = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - 2NL} \right).$$

Dans le cas d'un freinage optimisé (vitesse nulle à la sortie de la dernière zone), on a d'après (8)

$$2NL = v_0 \tau$$

d'où $T \rightarrow \infty$: la durée totale de freinage est infinie.

Remarque : la durée de la dernière phase de freinage est infinie $T_N = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau + 2(1-N)L}{v_0 \tau - 2NL} \right) \rightarrow \infty$.

L'utilisation de N zones de freinages identiques, de façon optimisée, permet de stopper le skeleton sur une distance acceptable, mais il faut pour cela une durée infini : ce n'est pas réalisable.

4.b) On veut une vitesse à la sortie de la zone de freinage

$$v_f = v_0 e^{-T/\tau} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La durée de la phase de freinage vaut alors

$$T = \tau \ln \frac{v_0}{v_f} = 12,2 \text{ s}.$$

Le nombre de zones est donné par

$$v_f = v_0 - \frac{2NL}{\tau}$$

d'où

$$N = \frac{(v_0 - v_f)\tau}{2L} = 222,2.$$

Il faut 223 zones de champ pour réduire la vitesse à la valeur désirée.

Remarque : la longueur nécessaire est alors de 222 m.