Électromagnétisme — IV — Symétries du champ magnétique

Distribution de courant

Soit Σ une surface élémentaire orientée située en M. Si δQ est la charge traversant Σ pendant $\mathrm{d}t$, l'intensité électrique I à travers cette surface est définie par

$$\boxed{\delta Q = I\,\mathrm{d}t}\,.$$

- L'intensité s'exprime en ampère (A). On a $1\ \mathrm{A} = 1\ \mathrm{C}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
- L'intensité électrique est une grandeur scalaire algébrique dont le signe dépend de l'orientation de la surface Σ.

Par définition du vecteur densité volumique de courant $\vec{\jmath}(M)$, l'intensité électrique est le flux de ce vecteur à travers la surface Σ :

$$\boxed{I = \iint_{M\in\Sigma} \vec{\jmath}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M}\,.$$

- Si le courant est dû à un déplacement de charge q identiques à la même vitesse $\vec{v}$ on a $\vec{\jmath} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$, où n est la densité volumique de porteurs de charge et ρ la densité volumique de charge correspondante.

> Le vecteur densité volumique de courant $\vec{\jmath}(M)$ est un vecteur polaire.

Invariances d'une distribution de courant et champ magnétique

Invariance par translation

> Une distribution de courant est **invariante par translation** d'axe Δ si elle reste inchangée par *toute* translation selon cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz, les composantes de $\vec{\jmath}(M)$ sont indépendantes de z.
- Une distribution invariante par translation selon Oz est nécessairement d'**extension spatiale infinie**[1] selon cet axe.

> Si une distribution de courant est invariante par translation d'axe Δ, le champ magnétique créé est inchangé par toute translation selon Δ.

- Si Δ est l'axe Oz, les composantes de $\vec{B}(M)$ sont indépendantes de z.

Invariance par rotation

> Une distribution de courant est **invariante par rotation** d'axe Δ si elle reste inchangée par *toute* rotation autour de cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz, les composantes de $\vec{\jmath}(M)$ sont indépendantes de θ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

> Si une distribution de courant est invariante par rotation d'axe Δ, le champ magnétique créé est inchangé par toute rotation autour de Δ.

- Si Δ est l'axe Oz, les composantes de $\vec{B}(M)$ sont indépendantes de θ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Propriétés de symétrie du champ magnétostatique

1. C'est une modélisation, qui revient à négliger les « effets de bord » ; une distribution de longueur L peut-être considérée comme infini si elle est vue d'une distance $r \ll L$.

Le champ magnétique $\vec{B}$ est un vecteur axial.

Les vecteurs axiaux suivent des règles de transformation particulières lors d'une symétrie par rapport à un plan Π. On note $\vec{U} = \vec{U}_{/\!/} + \vec{U}_{\perp}$, où $\vec{U}_{/\!/}$ est la composante du vecteur $\vec{U}$ parallèle au plan Π et $\vec{U}_{\perp}$ sa composante perpendiculaire au plan.

Règles de transformation d'un vecteur axial selon une symétrie plane :

$$\begin{cases} \vec{U}'_{/\!/} = -\vec{U}_{/\!/} \\ \vec{U}'_{\perp} = \vec{U}_{\perp} \end{cases} \tag{1}$$

Plan de symétrie d'une distribution de courant

Une distribution de courant admet un plan de symétrie Π si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport à Π lui est en tout point identique.

Le vecteur densité de courant étant un vecteur polaire, si $M' = \mathrm{sym}_{\Pi}(M)$ on a alors

$$\begin{cases} \vec{j}_{/\!/}(M') = \vec{j}_{/\!/}(M) \\ \vec{j}_{\perp}(M') = -\vec{j}_{\perp}(M) \end{cases}$$

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ étant un vecteur axial, $\vec{B}(M')$ est identique au transformé de $\vec{B}(M)$ par symétrie plane, soit

$$\begin{cases} \vec{B}_{/\!/}(M') = -\vec{B}_{/\!/}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

Si $M \in \Pi$, on a donc $\vec{B}_{/\!/}(M) = \vec{0}$.

En tout point M d'un plan de symétrie Π d'une distribution de courants, le champ magnétique créé est normal à ce plan : $\vec{B}_{/\!/}(M) = \vec{0}$.

Plan d'antisymétrie d'une distribution de courant

Une distribution de courant admet un plan d'antisymétrie Π^* si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport à Π^* lui est en tout point opposée.

➤ La distribution est invariante par la transformation $-\mathrm{Id} \circ_{\Pi^*}$.

Le vecteur densité de courant étant un vecteur polaire, si $M' = \mathrm{sym}^*_{\Pi}(M)$ on a alors

$$\begin{cases} \vec{j}_{/\!/}(M') = -\vec{j}_{/\!/}(M) \\ \vec{j}_{\perp}(M') = \vec{j}_{\perp}(M) \end{cases}$$

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ étant un vecteur axial, $\vec{B}(M')$ est opposé au transformé de $\vec{B}(M)$ par symétrie plane, soit

$$\begin{cases} \vec{B}_{/\!/}(M') = \vec{B}_{/\!/}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

Si $M \in \Pi^*$, on a donc $\vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$.

En tout point M d'un plan d'antisymétrie Π^* d'une distribution de courants, le champ magnétique créé est contenu dans ce plan : $\vec{B}(M) \perp= \vec{0}$.