TD d'électromagnétisme — Condensateurs

1 — Le carillon électrostatique

Lorsque l'on applique une différence de potentiel entre les plaques, l'un se charge positivement, l'autre négativement.
Il se produit alors un phénomène d'influence électrostatique qui modifie la répartitions des charges dans la boule :

- la partie proche de la plaque positive se charge négativement;
- la patrie proche de la plaque négative se charge positivement.

La boule n'étant pas rigoureusement à égale distance des deux plaques, la force d'attraction de la plaque la plus proche l'emporte, et elle est attirée vers cette dernière.
Considérons la boule attirée par la plaque négative.
Au moment où la boule touche la plaque, il se produit alors un transfert de charge entre la boule et la plaque, les électrons libres allant combler le défaut d'électrons dans la partie chargée positivement de la boule. La boule, initialement neutre, devient alors négative et est repoussée par la plaque négative, tout en étant attirée par la plaque positive.
Elle vient alors toucher cette plaque, et le processus se répète alternativement.
Un lien vers une vidéo Youtube illustrant et expliquant le phénomène :
`https://www.youtube.com/watch?v=9tOyhIPoiWg`

2 — Condensateur cylindrique

1. La distribution étant considérée à symétrie cylindrique, le champ est de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$. Le théorème de Gauss est opérationnel pour calculer le champ.
On choisit comme surface fermée un cylindre coaxial aux armatures, de rayon r ($a < r < b$), de hauteur L.
Le flux du champ s'écrit :

$$\Phi = 2\pi r L E(r)$$

La charge intérieure vaut Q_1. La théorème de Gauss s'écrit :

$$2\pi r L E(r) = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

On a donc :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 L r}\vec{e}_r \quad \text{pour } a < r < b$$

2. La capacité du condensateur est définie par $Q_1 = C(V_1 - V_2)$.

La différence de potentiel est reliée à la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_a^b E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r}\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$$

La capacité du condensateur s'écrit donc :

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{b}{a}}}\,.$$

La capacité d'un condensateur est une grandeur positive, qui ne dépend que de la géométrie du condensateur quand les armatures sont séparées par du vide.

3. On a $b = a + e$, d'où :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{a+e}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(1+\dfrac{e}{a}\right)} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\dfrac{e}{a}}$$

La surface des armatures vaut $S = 2\pi a L$; la capacité s'écrit donc :

$$\boxed{C \approx \frac{\varepsilon_0 S}{e}}\,.$$

On retrouve l'expression de la capacité du condensateur plan idéal (l'épaisseur est négligeable devant le rayon de courbure des armatures).

3 — Condensateur sphérique

1. La distribution étant à symétrie sphérique, le champ s'écrit en coordonnées sphériques sous la forme

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r\,.$$

On prend comme surface de Gauss Σ une sphère de rayon $r \in]a, b[$.
On a d'une part

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = 4\pi r^2 E(r)\,.$$

D'autre part, $Q_{\text{int}} = Q$. Le théorème de Gauss donne alors

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

On en déduit le champ entre les armatures

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}\,.$$

2. Notons V_1 le potentiel de la sphère de rayon a (porte la charge Q).
De $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, avec $V(M) = V(r)$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

d'où

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C.$$

Avec $V(a) = V_1$, on obtient

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + V_1}.$$

3. Notons V_2 le potentiel de la sphère de rayon b (portant la charge $-Q$).
La capacité du condensateur est définie par $Q = C(V_1 - V_2)$.
On a

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + V_1 = Q\frac{a-b}{4\pi\varepsilon_0 ab} + V_1.$$

On en déduit

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

d'où

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}}.$$

Si $b = a + e$ avec $e \ll a$, on a $ab \approx a$ et

$$C \approx \frac{\varepsilon_0 4\pi a^2}{e}.$$

La surface des armatures étant $S = 4\pi a^2$, on retrouve l'expression

$$C = \frac{epsi_0 S}{e}$$

caractéristique du condensateur plan idéal (l'épaisseur est négligeable devant le rayon de courbure des armatures).

4 — Le niveau monte

1. Discussion classique sur les symétries et les invariances, pour montrer

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

Théorème de Gauss en prenant un cylindre de rayon r, de hauteur L :

$$2\pi r L E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

d'où

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}}.$$

2. Capacité définie par $Q = (V_1 - V_2)C_0$ (attention au signe!).
De $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, on obtient

$$\mathrm{d}V = -E(r), \mathrm{d}r = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

d'où

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln(b/a).$$

On en déduit

$$\boxed{C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}.$$

3. On décompose le système en deux condensateurs :

— l'un de hauteur h, contenant le diélectrique, de capacité $C_1 = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$;

— l'autre de hauteur $L - h$ de capacité $C_2 = \dfrac{2\pi\varepsilon_0(L-h)}{\ln(b/a)}$.

On a les mêmes potentiels appliqués à chaque armature : ces condensateurs sont associés en parallèle.

La capacité équivalente à leur association est donc $C(h) = C_1 + C_2$, soit

$$C(h) = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}(\varepsilon_\mathrm{r} h + L - h) = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}\left(h\frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{L} + 1\right) = C_0\left(h\frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{L} + 1\right).$$

On a donc

$$\boxed{C(h) = C_0(Ah + B)} \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{L}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = 1}.$$

La mesure de la capacité permet de déterminer le niveau h de liquide.