Équations de Maxwell

Dans un référentiel galiléen, le champ électromagnétique vérifie les équations de Maxwell :

Maxwell-Thomson	$\operatorname{div}\vec{B}(M,t)=0$	**Maxwell-Gauss**	$\operatorname{div}\vec{E}(M,t)=\dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M,t)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t)$	**Maxwell-Ampère**	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}(M,t)=\mu_0\left(\vec{j}(M,t)+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)\right)$

- La permittivité diélectrique du vide ε_0 et la perméabilité magnétique du vide μ_0 vérifient de façon exacte $\boxed{\varepsilon_0\mu_0\mathrm{c}^2=1}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide. On a fixé $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$.
- Le terme $\vec{j}_{\mathrm{d}}(M,t)=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)$, homogène à une densité volumique de courant, est appelé *courant de déplacement*. Sans ce terme, l'équation de Maxwell-Ampère conduit à $\operatorname{div}\vec{j}=0$, ce qui est incompatible avec la conservation de la charge.
- $\boxed{\text{La conservation de la charge } \dfrac{\partial\rho}{\partial t}(M,t)+\operatorname{div}\vec{j}(M,t)=0 \text{ découle des équations de Maxwell}}$.
- Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère relient le champ $\left[\vec{E}(M,t),\vec{B}(M,t)\right]$ à la matière *via* $\left[\rho(M,t),\vec{j}(M,t)\right]$.
- Les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Faraday sont des relations de structure du champ électromagnétique ; elles ne font pas intervenir le milieu ($\rho(M,t)$ et $\vec{j}(M,t)$).
- Les équations de Maxwell étant **linéaires**, on peut utiliser le **principe de superposition**, et utiliser la **notation complexe pour le régime harmonique**.
- Les équations de Maxwell sont valables dans n'importe quel milieu. Elles ne sont cependant utilisables sous cette forme que si l'on sait expliciter la source $\left[\rho,\vec{j}\right]$ du champ dans le milieu considéré ; c'est le cas :
  - dans les milieux non diélectriques et non magnétiques, en particulier les conducteurs ohmiques ;
  - dans le vide ;
  - dans les plasmas.
- On peut interpréter chaque membre de droite des équations de Maxwell comme une source du champ figurant dans le membre de gauche.
- Les membres de droites décrivant les causes et les membres de gauche l'effet, on pourra utiliser le principe de Curie : **les causes ont au moins les symétries des effets**.
- Le champ électromagnétique est défini par la force de Lorentz subie par une une particule de charge q animée d'une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$: $\vec{F}=q\left(\vec{E}_{/\mathcal{R}}(M,t)+\vec{v}_{/\mathcal{R}}\wedge\vec{B}_{/\mathcal{R}}(M,t)\right)$. Le champ électromagnétique dépend du référentiel d'étude.

ARQS magnétique

Cadre général de l'ARQS

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) revient à négliger les phénomènes de propagation : on étudie les champs à une distance D des sources suffisamment faible pour que les effets des variations temporelles des sources soient instantanément ressenties au point étudié.

Si T est la durée caractéristique d'évolution des sources du champ électromagnétique, l'ARQS suppose une étude des champs à des distances D des sources telles que $D\ll\mathrm{c}T$.

- Pour des signaux périodiques de fréquence $f=1/T$, l'ARQS revient à considérer $D\ll\dfrac{\mathrm{c}}{f}=\lambda$, longueur d'onde. Pour $f=1$ MHZ, on obtient $\lambda=300$ m ; l'ARQS est tout à fait justifiée au laboratoire compte tenu des dimensions des circuits.

ARQS à dominante magnétique

Dans l'**ARQS « magnétique »**, les courants dominent sur les charges : $\|\vec{\jmath}\| \gg |\rho|\mathrm{c}$. Cela revient à $\|\vec{E}\| \ll \mathrm{c}\|\vec{B}\|$.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors sous la forme simplifiée :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \operatorname{div}\vec{B}(M,t)=0 & ; & \operatorname{div}\vec{E}(M,t)=\dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M,t)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t) & ; & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}(M,t)=\mu_0\vec{\jmath}(M,t) \end{array}}$$

- Le champ magnétique se calcule comme en régime permanent, et a les mêmes propriétés topographqiues (flux conservatif).
- La conservation de la charge s'écrit $\boxed{\operatorname{div}\vec{\jmath}=0}$. On en retrouve les conséquences établies en régime permanent :
  - dans un conducteur filiforme, l'intensité est la même en tout point ;
  - la loi des nœuds est vérifiée.
- Le champ électrique ne se calcule pas comme en régime permanent : il n'est pas à circulation conservative. L'induction se traite dans le cadre de l'ARQS magnétique.
- Dans la plupart des cas (conducteurs ohmiques par exemple), on a $\rho=0$ et l'équation de Maxwell-Gauss se ramène à $\operatorname{div}\vec{E}=0$.

Induction

Le champ électrique n'est pas à circulation conservative en régime variable

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M,t)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(M,t) \iff \oint_{M\in\Gamma}\vec{E}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{P\in\Sigma}\vec{B}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

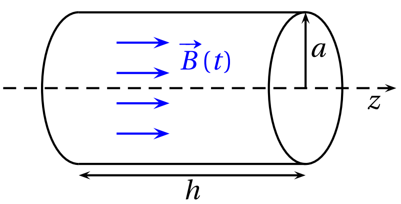
- En régime variable, $\cancel{\vec{E}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V}$: le champ électrique ne dérive *a priori* pas d'un potentiel scalaire. Les lignes de champ de $\vec{E}$ peuvent être des courbes fermées sur elles-mêmes.
- Un champ magnétique variable est source d'un champ électrique à circulation non conservative, dont les lignes de champ sont des courbes fermées.

  En considérant un circuit électrique pris comme contour, la circulation du champ électrique sur ce circuit donne la f.é.m. induite : $e(t)=\oint_{M\in\Gamma}\vec{E}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M$. On retrouve la loi de Faraday $e=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

Courants de Foucault

On appelle *courants de Foucault* des courants volumiques induits (courants induits dans la masse d'un matériau soumis à un champ magnétique variable).

On considère un conducteur cylindrique de rayon a, de longueur h, de conductivité électrique γ, soumis à un champ magnétique variable et uniforme $\vec{B}(t)$ parallèle à son axe Oz : $\vec{B}(t)=B_0\cos(\omega t)\vec{e}_z$. On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz.



- Un tel champ magnétique peut être créé par un solénoïde parcouru par un courant sinusoïdal $I(t)=I_0\cos(\omega t)$.

Le champ magnétique variable crée un champ électrique induit de la forme $\vec{E}(M,t)=E(r,t)\vec{e}_\theta$. La relation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale, sur un contour circulaire de rayon r, conduit à

$$\vec{E}(M,t)=\frac{B_0\omega r}{2}\sin(\omega t)\vec{e}_\theta.$$

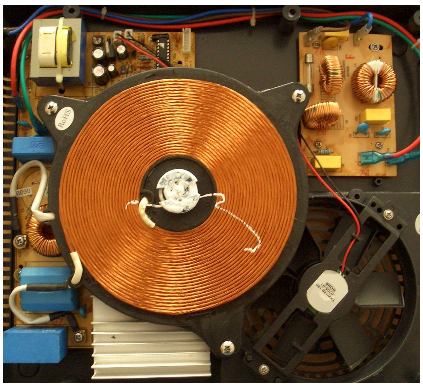
Les courants induits sont donnés par la loi d'Ohm locale $\vec{\jmath}=\gamma\vec{E}$, soit $\vec{\jmath}=\dfrac{\gamma B_0\omega r}{2}\sin(\omega t)\vec{e}_\theta$.

La puissance volumique reçue par le conducteur est donnée par $p_v(M,t) = \vec{j}\cdot\vec{E} = \dfrac{\gamma B_0^2\omega^2}{4} r^2 \sin^2(\omega t)$.

La puissance moyenne totale reçue par le conducteur vaut $\langle \mathcal{P}\rangle = \dfrac{\gamma\pi B_0^2 h a^4\omega^2}{16}$. Cette puissance est dissipée dans le conducteur par effet Joule.

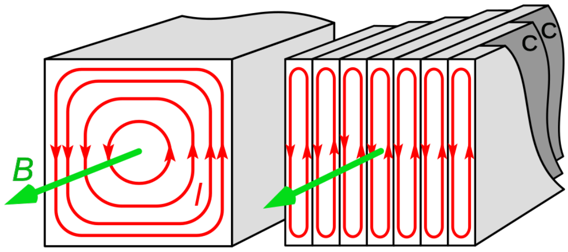
Utilité des courants de Foucault

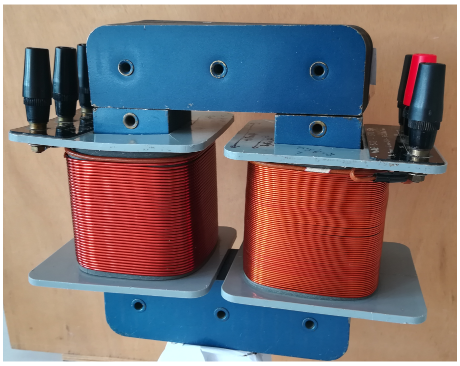
Les courants de Foucault permettent de chauffer le milieu conducteur (principe de la plaque à induction). On cherche alors à rendre $\langle \mathcal{P}\rangle$ maximale. Une bobine crée une champ magnétique à fréquence élevée (25 kHz), les courants de Foucault prennent naissance dans le métal du récipient posé sur la plaque.
Ci-contre la bobine d'une plaque de cuisson à induction.

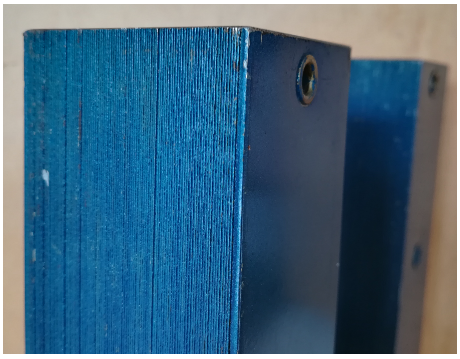


Inconvénient des courants de Foucault

Dans les milieux ferromagnétiques utilisés dans les transformateurs ou les moteurs électriques, les courants de Foucault entraînent des pertes d'énergie qu'il faut minimiser. La puissance dissipée étant proportionnelle au rayon a du cylindre, on réalise un feuilletage du milieu parallèlement à son axe, en plaques minces isolées électriquement entre elles, afin de limiter le développement des courants de Foucault. Ci-dessous un transformateur utilisé en TP.







Énergie magnétique

Bobines couplées

L'énergie magnétique d'une bobine seule d'inductance propre L parcourue par un courant d'intensité i a pour expression

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2}.$$

L'énergie magnétique d'un système de deux bobines couplées a pour expression

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$$

où i_1 est l'intensité parcourant la bobine d'inductance L_1, i_2 celle parcourant la bobine d'inductance L_2 et M est le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux bobines.

Densité volumique d'énergie magnétique

On considère un solénoïde d'axe Oz, de longueur ℓ, constitué de N spires circulaires de rayon a, de section $S = \pi a^2$, parcouru par un courant d'intensité i. On note $n = N/\ell$ le nombre de spires par unité de longueur.
Le champ magnétique dans le solénoïde[1] vaut $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$. Le flux propre est donné par $\Phi_\text{p} = NBS = Li$; on en déduit l'inductance propre du solénoïde

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}}.$$

L'énergie magnétique s'écrit $\mathcal{E}_\text{m} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\mathcal{V}$, où $\mathcal{V} = S\ell$ est le volume du solénoïde.

Un domaine de l'espace où règne un champ magnétique porte une énergie magnétique avec une densité volumique

$$w_\text{m} = \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0}.$$

Couplage partiel, couplage parfait

L'énergie magnétique d'un système de deux bobines couplées s'écrit

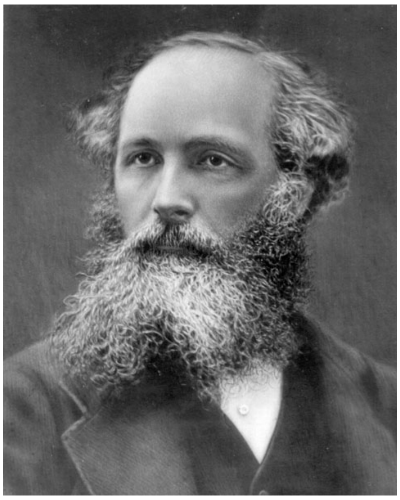
$$\mathcal{E}_\text{m} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = \iiint_\text{espace} \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0}\,\mathrm{d}\tau_M \geqslant 0$$

car $B^2/2\mu_0 \geqslant 0$.
On doit donc avoir $\frac{1}{2}Li_1^2\left(\frac{L_2}{L_1}X^2 + \frac{2M}{L_1}X + 1\right) \geqslant 0$ avec $X = i_2/i_1$. Le polynôme $\frac{L_2}{L_1}X^2 + \frac{2M}{L_1}X + 1$ ne possède donc pas de racine, soit $\Delta \leqslant 0$. On en déduit

$$\boxed{M^2 \leqslant L_1 L_2}.$$

- Le cas $M^2 = L_1 L_2$ correspond au **couplage parfait** : toutes les lignes de champ magnétique issues d'un circuit traversent l'autre circuit.
- Le cas $M^2 < L_1 L_2$ correspond au **couplage partiel**.
- La cas $M = 0$ correspond au couplage nul : aucune ligne de champ créé par un circuit ne traverse l'autre circuit.

Mais qui était-il ?



James Clerk Maxwell (1831-1879).
Physicien britannique d'origine écossaise. Nous lui devons une théorie profondément originale de l'électrodynamique, inspirée des travaux antérieurs de Faraday et de William Thomson. Il publie ses quatre équations unifiées de l'électromagnétisme en 1873. Ces équations, prédisant l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière, ouvrent la voie à la relativité restreinte (Einstein) et à la mécanique quantique (Plank). Il est aussi l'un des principaux fondateurs de la théorie cinétique des gaz et de la mécanique statistique. En tant que premier directeur du laboratoire Cavendish, il promeut la physique expérimentale de précision à Cambridge. Son approche de la physique s'accompagne d'une réflexion philosophique.
Les équations de Maxwell ont été reformulées sous la forme que nous connaissons par Heaviside en 1880.

1. Il est nul à l'extérieur.