

Électromagnétisme

VI — Milieux magnétiques

Moment magnétique d'un aimant permanent

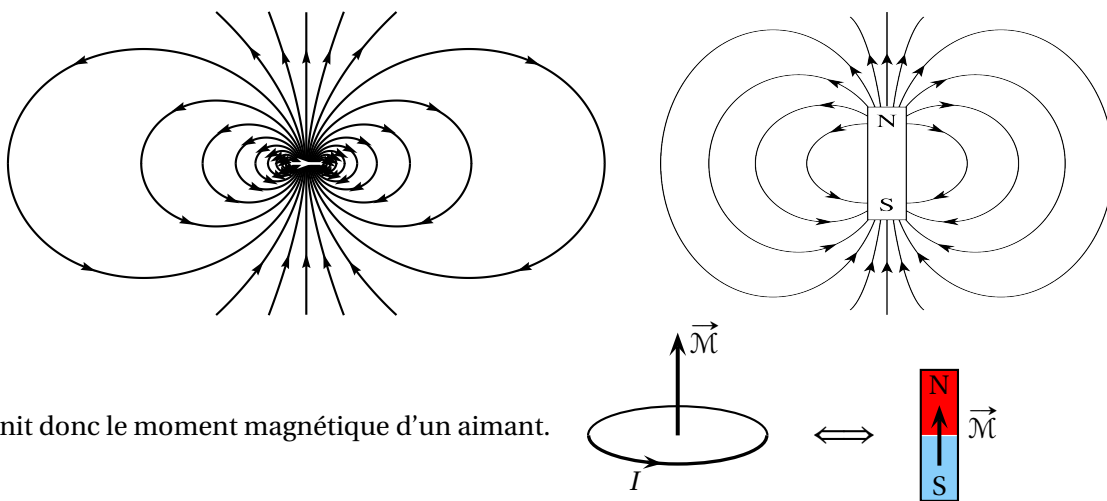
Le moment magnétique d'une spire de surface S parcourue par un courant d'intensité i est défini par

$$\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S}$$

où $\vec{S}$ est le vecteur surface de la spire, orienté par le sens du courant.

► Le moment magnétique est un vecteur axial, dont l'intensité s'exprime en $A \cdot m^2$.

Les lignes de champ magnétique d'un aimant sont semblables à celles du champ magnétique créé à grande distance d'une spire.



On définit donc le moment magnétique d'un aimant.

Une source de champ magnétique caractérisée par un moment magnétique est appelée **dipôle magnétique**.

Soit un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{e}_z$ placé à l'origine O . Le champ magnétique est donné en coordonnées sphériques ($r = OM$) par

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

► On a $B_\varphi = 0$: le champ est contenu dans le plan incluant le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$.

Magnéton de Bohr

Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène : électron de masse m sur une orbite circulaire de rayon r .

Intensité correspondante : $I = -\frac{e}{T}$. Moment magnétique : $\vec{\mathcal{M}} = I \pi r^2 \vec{u}_z$.

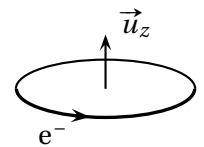
Moment cinétique : $\vec{L} = m r v \vec{u}_z$, avec $2\pi r = vT$ (T : période du mouvement de l'électron à la vitesse v).

On en déduit $\vec{\mathcal{M}} = \frac{IT}{2m} \vec{L} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_O$. Quantification du moment cinétique dans le modèle de Bohr : $\vec{L} = n\hbar \vec{u}_z$.

On définit le magnéton de Bohr par $\|\vec{\mathcal{M}}\| = n\mu_B$ avec $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m}$.

► La magnéton de Bohr joue le rôle de quantum de moment magnétique pour l'électron.

► On a $\mu_B = 9,274 \times 10^{-24} A \cdot m^2$.



Actions subies par un dipôle magnétique

L'énergie potentielle d'un dipôle magnétique rigide placé dans un champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ d'origine extérieure s'écrit

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}.$$

- L'énergie potentielle est minimale quand $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}_{\text{ext}}$ sont alignés, dans le même sens (position d'équilibre stable).

Les actions subies par un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$ sont :

$$\text{moment } \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}; \quad \text{résultante } \vec{F} = \text{grad}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}).$$

- Le moment $\vec{\Gamma}$ tend à aligner $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}_{\text{ext}}$ dans le même sens.
- La résultante $\vec{F}$ tend à attirer le dipôle vers les zones de champ magnétique intense.
Si $\vec{B}_{\text{ext}}$ est uniforme, on a $\vec{F} = \vec{0}$.

Milieu magnétique

Aimantation

Le volume élémentaire $d\tau$ d'un milieu magnétique possédant le moment magnétique $\delta\vec{\mathcal{M}}$, on définit l'aimantation $\vec{M}$ du milieu par

$$\vec{M} = \frac{\delta\vec{\mathcal{M}}}{d\tau}.$$

- Le champ d'aimantation du milieu est un vecteur axial dont l'intensité s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Courants d'aimantation

Le champ magnétique créé par un milieu magnétique possédant une aimantation $\vec{M}$ est le même que celui qui serait créé par la distribution volumique de courant

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \text{rot } \vec{M}.$$

- Ces courants d'aimantation sont qualifiés de **courants liés**, sur la base d'un modèle décrivant les orbites atomiques des électrons comme des boucles de courant (liées aux atomes).

Vecteur excitation magnétique — équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère prend en compte toutes les sources du champ magnétique :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}})$$

où $\vec{j}_{\text{libre}}$ désigne les courants de conduction (charges libres) et $\vec{j}_{\text{lié}} = \text{rot } \vec{M}$ les courants d'aimantation.

On définit le vecteur excitation magnétique d'un milieu d'aimantation $\vec{M}$ par

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

- L'excitation magnétique est un vecteur axial dont l'intensité s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Dans l'ARQS magnétique, l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique s'écrit

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}}.$$

- L'excitation $\vec{H}$ est créée par les courants électriques libres ($\vec{j}_{\text{libre}}$).
- Le champ magnétique $\vec{B}$ est créé par les courants électriques libres et l'aimantation.

Dans un milieu magnétique, le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{H}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = I_{\text{libre, enlacé}}$$

Équations de Maxwell dans un milieu magnétique

Dans un milieu magnétique, dans le cadre de l'ARQS magnétique, les équations de Maxwell s'écrivent

Maxwell-Thomson	$\text{div } \vec{B}(P, t) = 0$	Maxwell-Gauss	$\text{div } \vec{E}(P, t) = \frac{\rho(P, t)}{\epsilon_0}$
Maxwell-Faraday	$\text{rot } \vec{E}(P, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(P, t)$	Maxwell-Ampère	$\text{rot } \vec{H}(P, t) = \vec{j}_{\text{libre}}(P, t)$

- *A priori* $\rho = 0$ dans un milieu magnétique et l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit $\text{div } \vec{E} = 0$.
- La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $e(t) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$.
La loi de Faraday s'écrit toujours avec le flux du **champ magnétique**.
- Le **champ magnétique est à flux conservatif** : $\text{div } \vec{B} = 0$.

Milieu ferromagnétique

Un milieu ferromagnétique est un milieu susceptible d'acquérir une aimantation permanente.

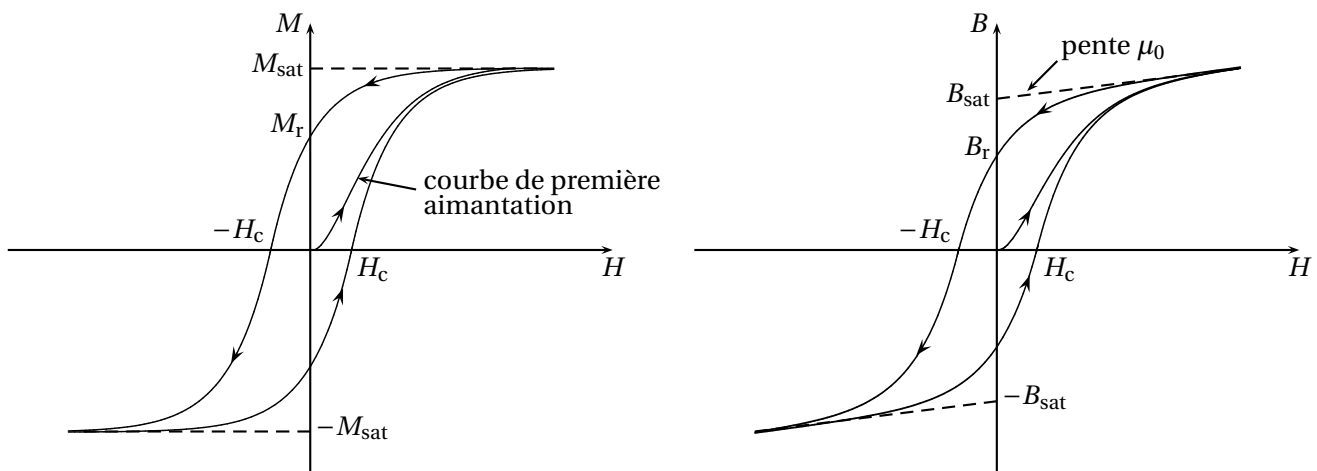
- Il est constitué de dipôles magnétiques atomiques interagissant fortement.
- Le fer, le nickel, le cobalt, certains de leurs alliages sont ferromagnétiques.

Cycle d'hystérésis

Un milieu ferromagnétique est décrit par une relation constitutive $M(H)$: l'aimantation est *a priori* acquise sous l'effet de l'excitation magnétique H .

- Le champ magnétique étant créé par les courants libres (comme H) mais aussi par l'aimantation, on peut aussi considérer la relation $B(H)$.

Les courbes $M(H)$ et $B(H)$ sont similaires, présentant un **cycle d'hystérésis** :



Aimantation de saturation : aimantation maximum M_{sat} que peut acquérir le matériau.

Aimantation rémanente : aimantation M_r qui demeure quand l'excitation magnétique est nulle (on a alors un aimant permanent). Le champ magnétique rémanent B_r est le champ magnétique créé par l'aimantation en l'absence d'excitation.

Excitation coercitive : excitation H_c qui annule l'aimantation.

On distingue deux types de matériaux ferromagnétiques :

Matériaux doux : l'aire du cycle est faible comparée à l'aire du rectangle dans lequel il s'inscrit. L'aimantation rémanente B_r et l'excitation coercitives sont faibles ($H_c \approx 10 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$).

Matériaux durs : l'aire du cycle est du même ordre de grandeur que l'aire du rectangle. L'aimantation rémanente B_r et l'excitation coercitives sont élevées ($H_c > 10^4 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-1}$).

- Les matériaux ferromagnétiques durs sont utilisés pour créer des aimants permanents. Exemples : aciers, ferrites, alliage néodyme-fer-bore.
- Les matériaux ferromagnétiques doux sont utilisés comme noyaux dans les transformateurs. Exemples : fer, cobalt, nickel.

Milieu ferromagnétique doux loin de la saturation : modèle linéaire

Le cycle d'un milieu ferromagnétique doux étant très étroits, on peut le modéliser par un segment de droite loin de la saturation : l'aimantation (réponse) varie linéairement avec l'excitation (H), soit $M = \chi H$, où χ est la susceptibilité magnétique du milieu.

Le champ magnétique $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ est alors fonction linéaire de l'excitation $\vec{H}$.

En régime non saturé, un milieu ferromagnétique doux est décrit par la relation constitutive linéaire

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

où μ_r est la **perméabilité relative du milieu**.

- μ_r est sans dimension.
- On a $\mu_r \gg 1$ (typiquement $\mu_r \approx 10^5$).

Bobine à noyau ferromagnétique modélisé linéairement

On considère une bobine de N spires, parcourue par un courant d'intensité i , enroulée autour d'un noyau ferromagnétique de section S , de longueur moyenne ℓ et de perméabilité magnétique $\mu_r \gg 1$.

Les lignes de champ magnétique sont canalisées par le noyau ferromagnétique, qui se comporte donc comme un tube de champ. On en déduit que **le flux de $\vec{B}$ est le même à travers toute section du noyau de fer**.

- On suppose $\sqrt{S} \ll \ell$: les champs B et H sont considérés comme uniformes sur toute section droite du noyau.

Le théorème d'Ampère s'écrit $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H\ell = Ni$, d'où $H = \frac{Ni}{\ell}$.

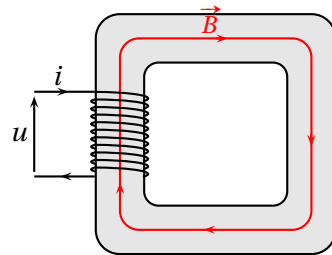
Le champ magnétique est donné par $B = \mu_0 \mu_r H$, soit $B = \frac{\mu_0 \mu_r Ni}{\ell}$.

- On pourra noter que la position du bobinage n'a aucune influence sur le champ magnétique, seuls le nombre de spires et le courant les traversant interviennent dans l'équation.

L'inductance propre est donnée par $\Phi = NBS = Li$, soit $L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell}$.

- L'inductance propre de la bobine est considérablement augmentée par la présence du noyau de fer doux ($\mu_r \gg 1$).

L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine est $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} S\ell$, où $S\ell$ est le volume du noyau ferromagnétique.



Un champ magnétique régnant dans un milieu ferromagnétique porte une énergie magnétique avec une densité volumique

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}.$$

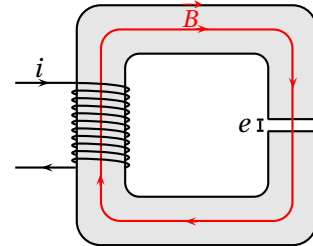
Une bobine à noyau ferromagnétique doux non saturé stocke de l'énergie magnétique dans le son noyau :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau.$$

Circuit magnétique avec entrefer : électroaimant

On reprend la configuration précédent, mais le noyau de fer possède un **entrefer** d'épaisseur $e \ll \ell$.

Les lignes de champ sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer.



La conservation du flux magnétique $B_{\text{air}}S = B_{\text{fer}}S$ à travers la section constante du tube de champ conduit à $B_{\text{air}} = B_{\text{fer}}$.

Le théorème d'Ampère s'écrit $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_{\text{fer}}\ell + H_{\text{air}}e = Ni$.

On a $B_{\text{air}} = \mu_0 H_{\text{air}}$ et $B_{\text{fer}} = \mu_0\mu_r H_{\text{fer}}$, d'où le champ magnétique dans l'entrefer $B_{\text{air}} = \frac{\mu_0 Ni}{e + \frac{\ell}{\mu_r}}$.

► Si $\mu_r \gg 1$ (dans la limite $\mu_r \rightarrow \infty$), on a $B_{\text{air}} \approx \frac{\mu_0 Ni}{e}$. Le champ magnétique peut prendre une valeur importante dans un petit entrefer, et sa valeur ne dépend pas de la perméabilité relative du noyau de fer.

Pertes d'une bobine réelle à noyau

On considère la bobine de N spires enroulée autour d'un noyau ferromagnétique.

On distingue deux types de pertes :

Pertes cuivres : ce sont les pertes par effet Joule dans les fils de cuivre de la bobine.

Pertes fer : ce sont les pertes localisées dans le noyau ferromagnétique. Les pertes fer sont de deux nature :

- **Pertes par courant de Foucault**. Le champ magnétique variable entraîne l'apparition de courants de Foucault induits dans le noyau de fer, qui dissipent de l'énergie par effet Joule. On limite ces pertes en feuilletant le noyau en minces couches isolées électriquement.
- **Pertes par hystérésis**, dues au caractère non linéaire du matériau ferromagnétique.

La bobine reçoit la puissance instantanée $p(t) = u(t)i(t)$ avec $u(t) = -e(t) = \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{dB}{dt}$ et $i(t) = \frac{H\ell}{N}$.

On a donc $p(t) = H \frac{dB}{dt} \mathcal{V}$ avec $\mathcal{V} = S\ell$, volume du milieu ferromagnétique.

La puissance moyenne dissipée par hystérésis est donnée par

$$\langle P_h \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\mathcal{V}}{T} \oint_{\text{cycle}} H dB = \mathcal{V} f \mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire du cycle d'hystérésis et $f = 1/T$.

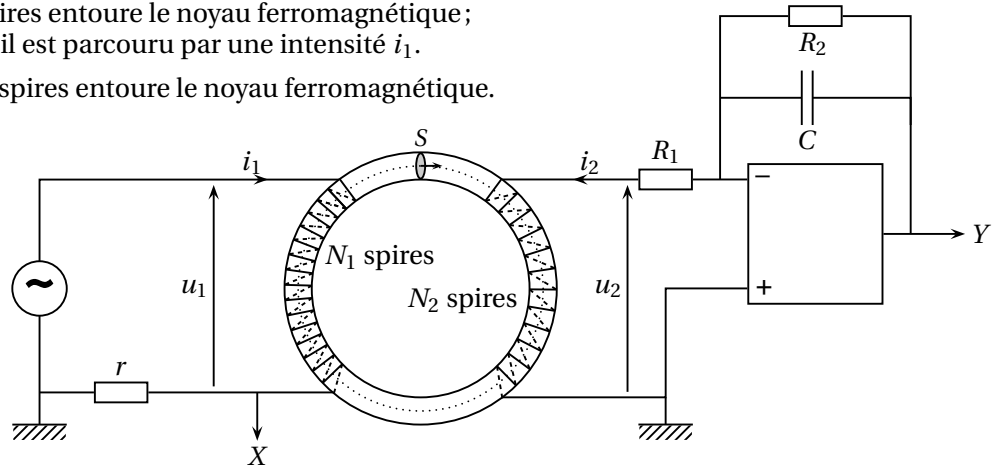
On limite les pertes par hystérésis en utilisant un milieu doux de très petit cycle.

Annexe : tracé expérimental du cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique

On souhaite tracer $B(H)$ pour un noyau ferromagnétique de section S et de longueur moyenne ℓ .
On utilise un circuit afin de relever deux tensions : l'une proportionnelle à H , l'autre à B .

Un circuit primaire de N_1 spires entoure le noyau ferromagnétique ; alimenté par un générateur, il est parcouru par une intensité i_1 .

Un circuit secondaire de N_2 spires entoure le noyau ferromagnétique.



Le théorème d'Ampère s'écrit $H\ell = N_1 i_1 + N_2 i_2$. On choisit $R_1 \gg r$, de telle sorte que $i_2 \ll i_1$, d'où $H \approx \frac{N_1 i_1}{\ell}$.

La tension aux bornes de r est $u_X = r i_1$ soit $u_X = \frac{r\ell}{N_1} H$: elle est proportionnelle à H .

La tension aux bornes du second bobinage est reliée à la fém induite $u_2 = -e = \frac{d\Phi}{dt} = N_2 S \frac{dB}{dt}$. Il suffit d'utiliser un montage intégrateur pour obtenir B .

Le montage à ALI fonctionne en intégrateur si $\omega \gg \frac{1}{R_2 C}$; on a alors $u_Y = -\frac{1}{R_1 C} \int u_2 dt$, soit $u_Y = -\frac{N_2 S}{R_1 C} B$.

On observe à l'oscilloscope en mode XY pour visualiser le cycle d'hystérésis.