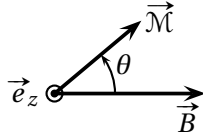


TD d'électromagnétisme n° 4

Milieux magnétiques

1 — Oscillations d'une boussole

Soit J le moment d'inertie de la boussole par rapport à son axe de rotation Oz .



En notant θ l'angle que fait la boussole (c'est-à-dire son moment magnétique $\vec{M}$) avec le champ magnétique $\vec{B}$, le théorème de moment cinétique s'écrit

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_z = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

soit en projection selon Oz

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -MB \sin \theta.$$

Le mouvement des petites oscillations ($\theta \ll 1$) s'écrit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MB}{J} \theta = 0.$$

La boussole présente des oscillations harmoniques de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB}}.$$

Pour que la période soit multipliée par deux, il faut que la champ magnétique ait été divisé par quatre.

2 — Tore ferromagnétique

1. On souhaite visualiser le cycle $B(H)$, donc relever B et H .

Le théorème d'Ampère donne

$$lH = N_1 i_1 + N_2 i_2.$$

On mesure $V_X = r i_1$, qui sera proportionnel à H si $i_2 \ll i_1$.

On remarque que $r = 4 \Omega$.

L'impédance de la charge a pour module

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} = 50 \text{ k}\Omega.$$

Avec $Z \gg r$, on a bien $i_2 \ll i_1$.

La tension dans le circuit secondaire est proportionnelle à la dérivée temporelle de B (loi de Faraday). En faisant fonctionner le circuit RC en intégrateur, on obtient une tension V_Y proportionnelle à B .

La visualisation des deux tensions en mode XY permet donc d'observer le cycle d'hystérésis.

2. La fonction de transfert du filtre de sortie est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Le filtre fonctionne en intégrateur si l'on peut écrire

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{jRC\omega},$$

soit pour $RC\omega \gg 1$. Il faut donc $f \gg \frac{1}{2\pi RC}$. On calcule $\frac{1}{2\pi RC} = 0,32 \text{ Hz}$; la condition est donc bien respectée pour $f = 50 \text{ Hz}$.

La tension induite aux bornes du circuit secondaire est donnée par

$$u_2 = -e = N_2 s \frac{dB}{dt}.$$

Avec $\underline{V}_Y = \frac{1}{jRC\omega} \underline{u}_2$, on a

$$V_Y = \frac{1}{RC} \int u_2 dt = \frac{N_2 s}{RC} B$$

d'où

$$B = \frac{RC}{N_2 s} V_Y.$$

D'après le théorème d'Ampère, avec $i_2 \ll i_1$, on a

$$Hl = N_1 i_1.$$

De $V_X = r i_1$ on déduit

$$H = \frac{N_1}{r\ell} V_X.$$

3. Le champ rémanent est valeur B_r du champ magnétique à excitation nulle ($H = 0$).

On lit $V_{Y,r} = 2,7 \text{ div} = 0,54 \text{ V}$.

Le champ magnétique est donné par

$$B = \frac{50 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6}}{1000 \times 5 \times 10^{-4}} V_Y = V_Y.$$

On a donc $B_r = 0,54 \text{ T}$.

Le champ coercitif est la valeur H_r de l'excitation qui conduit à $B = 0$.

On lit $V_{X,c} = 2 \text{ div} = 1,0 \text{ V}$.

L'excitation est donnée par $H = \frac{200}{4 \times 0,25} V_X = 200 V_X$.

On a donc $H_c = 200 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

La puissance dissipée dans le tore par unité de volume est donnée par

$$P_{\text{vol}} = f \oint H dB = f \mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire du cycle.

Avec $B = V_Y$ et $H = 200V_X$, on a compte tenu des calibres $V_X : 0,5 \text{ V/div}$, $V_Y : 0,2 \text{ V/div}$

$$\oint H dB = 200 \oint V_X dV_Y = 200 \times 0,5 \times 0,2 N_{\text{carreaux}}$$

Avec $f = 50 \text{ Hz}$, on en déduit la puissance volumique dissipée en fonction du nombre de carreaux que comporte le cycle :

$$P_{\text{vol}} = 20 N_{\text{carreaux}}.$$

On compte $N_{\text{carreaux}} = 22$, d'où

$$P_{\text{vol}} = 22 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}.$$

- Compte tenu des valeurs élevées de B_r et H_c , ainsi que de l'allure du cycle, on peut dire qu'il s'agit d'un milieu ferromagnétique dur.

3 — Matériau ferromagnétique

Le cycle est décrit par deux équations :

$$B_1(H) = (\alpha + \beta H_0)H - \beta(H_0^2 - H^2)$$

$$B_2(H) = (\alpha + \beta H_0)H + \beta(H_0^2 - H^2)$$

$B_1(H)$ est l'équation d'une parabole « contente » : elle décrit la branche inférieure du cycle; $B_2(H)$ décrit la branche supérieure du cycle.

Les deux branches se rejoignent pour $B_1(H) = B_2(H)$, soit $H^2 = H_0^2$, donc pour $H = \pm H_0$.

On a alors $B(H_0) = (\alpha + \beta H_0)H_0$.

Le champ rémanent est donné par $B_1(H_0)$, soit

$$B_r = \beta H_0^2.$$

Le champ coercitif est donné par la racine positive de $B_2(H) = 0$, soit

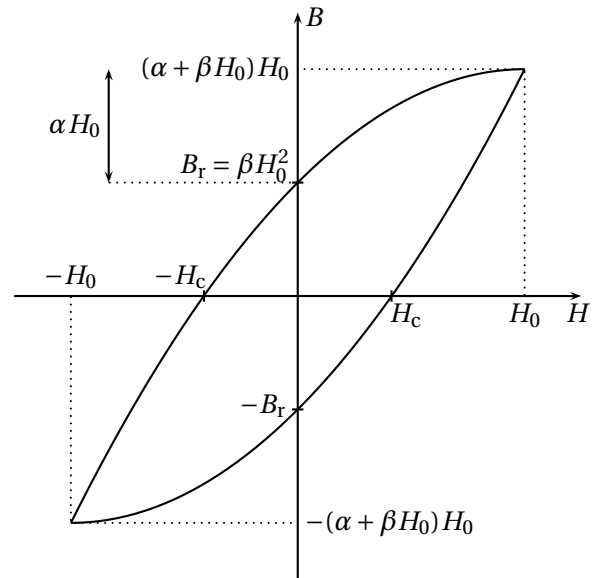
$$\beta H_c^2 - (\alpha + \beta H_0)H_c - \beta H_0^2 = 0.$$

On obtient

$$H_c = \frac{\alpha + \beta H_0 + \sqrt{(\alpha + \beta H_0)^2 + 4\beta^2 H_0^2}}{2\beta}$$

soit

$$H_c = \frac{\alpha + \beta H_0}{2\beta} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\beta H_0}{\alpha + \beta H_0} \right)^2} \right).$$



Cas d'un milieu dur

Correspond à $B_r \approx B_{\text{max}}$, soit

$$\beta H_0^2 \approx \alpha H_0 + \beta H_0^2.$$

Cette condition revient à $\alpha \ll \beta H_0$.

Le champ rémanent vaut alors $B_r \approx \beta H_0^2$.

Cas d'un milieu doux

Correspond à $B_r \ll B_{\text{max}}$, soit

$$\beta H_0^2 \ll \alpha H_0 + \beta H_0^2$$

Cette condition revient à $\beta H_0 \ll \alpha$.

On a alors $B_r \approx \beta H_0^2$.

- Il faudrait pousser l'étude, car $B(H)$ ne doit pas présenter d'extrémum dans $[-H_0, H_0]$: l'aimantation ne peut pas diminuer après avoir atteint la valeur saturée!

4 — Conséquence des relations de passage

On considère deux milieux notés (1) et (2), séparé par une surface ne présentant pas de courants surfaciques. En notant $\vec{B}_1$ et $\vec{H}_1$ le champ magnétique et l'excitation magnétique dans le milieu (1), et $\vec{B}_2$ et $\vec{H}_2$ ces mêmes champs dans le milieu (2), on donne les relations de passage vérifiées par les composantes normales et parallèles à la surface de séparation des champs :

$$\vec{B}_{1,\perp} = \vec{B}_{2,\perp} \quad \text{et} \quad \vec{H}_{1,\parallel} = \vec{H}_{2,\parallel}$$

On se place dans le cas où le milieu (1) est l'air, de perméabilité μ_0 , et le milieu (2) un milieu ferromagnétique doux linéaire de perméabilité relative $\mu_r \gg 1$.

1. La relation de continuité de la composante tangentielle de l'excitation magnétique peut s'écrire

$$\frac{B_{\text{air},\parallel}}{\mu_0} = \frac{B_{\text{fer},\parallel}}{\mu_0 \mu_r},$$

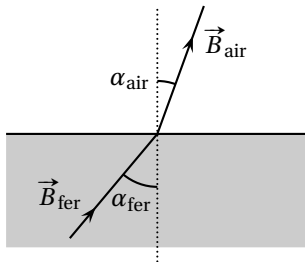
d'où

$$B_{\text{air},\parallel} = \frac{B_{\text{fer},\parallel}}{\mu_r}.$$

Comme $\mu_r \gg 1$, on a $B_{\text{air},\parallel} \ll B_{\text{fer},\parallel}$.

Le fer guidant le champ magnétique, $\vec{B}$ est quasi tangent à la paroi du noyau de fer dans un circuit magnétique : $\vec{B}_{\text{fer}} \approx \vec{B}_{\text{fer},\parallel}$. Le champ magnétique dans l'air est donc négligeable : on peut considérer que les lignes de champ magnétique sont canalisées dans le fer.

2. Représentons le champ magnétique à l'interface :



Les relations de continuité s'écrivent

$$B_{\text{fer},\perp} = B_{\text{air},\perp} \quad \text{et} \quad H_{\text{fer},\parallel} = H_{\text{air},\parallel},$$

cette dernière donnant

$$\frac{B_{\text{fer},\parallel}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B_{\text{air},\parallel}}{\mu_0}.$$

On a d'une part

$$\tan \alpha_{\text{fer}} = \frac{B_{\text{fer},\parallel}}{B_{\text{fer},\perp}},$$

et d'autre part

$$\tan \alpha_{\text{air}} = \frac{B_{\text{air},\parallel}}{B_{\text{air},\perp}} = \frac{B_{\text{fer},\parallel}}{\mu_r B_{\text{fer},\perp}}$$

soit

$$\tan \alpha_{\text{air}} = \frac{\tan \alpha_{\text{fer}}}{\mu_r}.$$

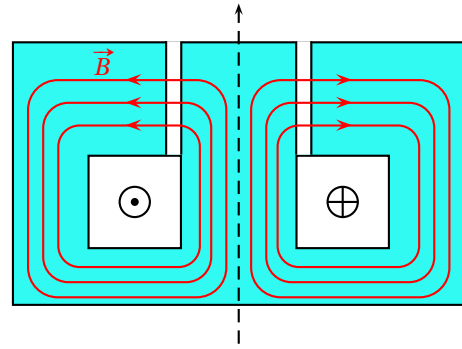
Avec $\mu_r \gg 1$, on a $\tan \alpha_{\text{air}} \ll 1$, soit $\alpha_{\text{air}} \approx 0$: les lignes de champ magnétique s'échappent d'un ferromagnétique selon une direction normale à sa surface.

5 — Électroaimant

1. En coordonnées cylindriques, le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de d'anti-symétrie des courants : la champ $\vec{B}$ est donc contenu dans ce plan ($B_\theta = 0$).

Les lignes de champs sont canalisées dans le milieu ferromagnétique et « tournent » autour des courants, dans le sens imposé par I .

Dans l'entrefer, le champ est normal à l'interface ; il est donc radial : $\vec{B}_e = B_0 \vec{e}_r$.



2. En notant ℓ la longueur moyenne d'une ligne de champ dans le ferromagnétique, le théorème d'Amperè s'écrit

$$\ell H_f + e H_e = NI,$$

soit

$$\frac{\ell}{\mu_0 \mu_r} B_f + \frac{e}{\mu_0} B_0 = NI$$

en notant B_0 le champ dans l'entrefer et B_f le champ dans le ferromagnétique.

La conservation du flux de $\vec{B}$ permet d'écrire en ordre de grandeur $B_f \approx B_0$ (la section varie le long d'un tube de champ, mais reste du même ordre de grandeur).

Comme $\mu_r > 5000$, on a $B_f \ll B_0$, d'où

$$\frac{e}{\mu_0} B_0 \approx NI.$$

Le champ dans l'entrefer a pour ordre de grandeur

$$B_0 \approx \frac{N \mu_0 I}{e}.$$

3. On calcule

$$I \approx \frac{e B_0}{N \mu_0} = \frac{0,2 \times 10^{-3} \times 0,2}{200 \times 4\pi \times 10^{-7}}$$

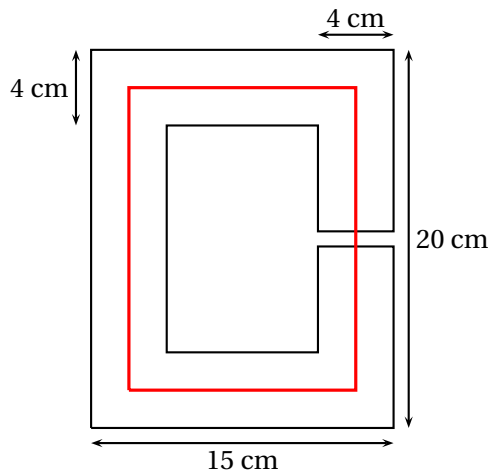
soit $I \approx 0,2 \text{ A}$.

Cette valeur est très raisonnable pour créer un champ magnétique intense dans l'entrefer.

Par comparaison, avec un solénoïde comprenant $N = 200$ spires, de longueur $\ell = 10 \text{ cm}$, il faudrait un courant de l'ordre de 80 A pour créer un tel champ en son sein!

6 — Champ magnétique dans un entrefer

1. Schématisons le circuit magnétique :



En négligeant l'épaisseur de l'entrefer, on calcule la longueur moyenne du circuit magnétique (courbe rouge) :

$$\ell = 11 + 16 + 11 + 16 = 54 \text{ cm}.$$

En notant H_f l'excitation magnétique dans le fer et H_e celle dans l'entrefer, le théorème d'Ampère s'écrit

$$\ell H_f + e H_e = NI.$$

La conservation du flux magnétique s'écrit $S B_e = S B_f$, soit

$$B_e = B_f = B.$$

Avec $B_e = \mu_0 H_e$ et $B_f = \mu_0 \mu_r H_f$, on a

$$\ell \frac{B}{\mu_0 \mu_r} + e \frac{B}{\mu_0} = NI$$

d'où

$$B = \frac{\mu_0 NI}{e + \frac{\ell}{\mu_r}}.$$

On calcule

$$B = \frac{4\pi 10^{-7} \times 250 \times 2}{0,5 \times 10^{-3} + \frac{0,54}{2500}}$$

soit

$$B = 0,88 \text{ T}.$$

2. Dans le cas d'un milieu non linéaire, on peut toujours écrire le théorème d'Ampère $\ell H_f + e H_e = NI$, avec $H_e = B/\mu_0$, soit

$$\ell H_f + e \frac{B}{\mu_0} = NI.$$

Le champ magnétique dans l'entrefer est relié à l'excitation magnétique dans le circuit magnétique par la relation affine

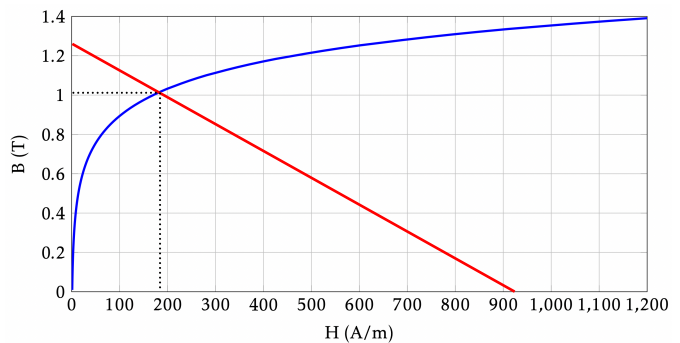
$$B(H) = -\frac{\mu_0 \ell}{e} H + \frac{\mu_0 NI}{e},$$

soit

$$B(H) = 1,26 - 1,36 \times 10^{-3} H. \quad (1)$$

Le champ magnétique dans le milieu (égal à celui dans l'entrefer par conservation du flux magnétique) est

relié à l'excitation magnétique par la caractéristique donnée. Les champs B et H sont alors donnés par l'intersection de la courbe $B(H)$ avec la droite d'équation (1).



On obtient

$$B = 1,05 \text{ T}.$$

7 — Puissance dissipée par hystérésis

Le théorème d'Ampère s'écrit

$$lH = Ni(t),$$

où N est le nombre de spires.

Le flux magnétique valant $\Phi = NBS$, la f.é.m. induite dans l'enroulement vaut

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -NS \frac{dB}{dt}.$$

La tension aux bornes de l'enroulement vaut alors

$$u(t) = -e(t) = NS \frac{dB}{dt}.$$

La puissance reçue par le circuit vaut

$$p(t) = u(t)i(t) = NS \frac{dB}{dt} \frac{lH}{N} = SlH \frac{dB}{dt}.$$

La puissance moyenne vaut donc

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = f \int_0^T SlH \frac{dB}{dt} dt = fSl \oint H dB$$

soit $P = fSlA$ où A est l'aire du cycle.

On peut estimer l'aire du cycle à 20 carreaux, soit

$$A = 20 \times 0,2 \times 50 \text{ tesla} \cdot \text{A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On en déduit

$$P = 60 \times 1,2 \times 10^{-2} \times 20 \times 0,2 \times 50$$

soit

$$P = 1,4 \times 10^{-2} \text{ W} = 0,14 \text{ kW}.$$

Cette valeur est élevée, mais il s'agit clairement d'un matériau ferromagnétique dur d'après son cycle d'hystérésis (on peut estimer $B_r \approx 0,5 \text{ T}$).