

TD de conversion de puissance n° 1

Puissance en régime sinusoïdal

1 — Valeurs efficaces

1. Un signal carré symétrique vaut alternativement $i(t) = \pm I_m$. On a donc $i^2(t) = I_m^2$ constante, égale à sa valeur moyenne.

On en déduit la racine de la moyenne de $i^2(t)$:

$$I_{\text{eff}} = I_m.$$

2. On a

$$i^2(t) = \begin{cases} I_m^2 & \text{pour } 0 \leq t < \alpha T \\ 0 & \text{pour } \alpha T \leq t < T \end{cases}$$

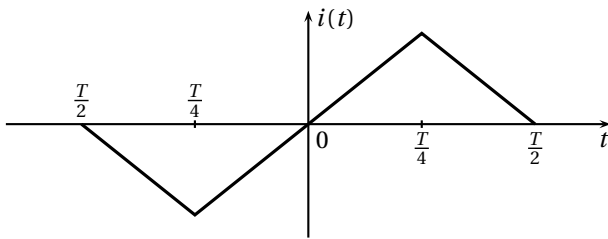
On a donc

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} I_m^2 dt = \frac{\alpha T}{T} I_m^2,$$

d'où

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\alpha} I_m.$$

3. Signal triangulaire symétrique représenté sur une période :



Compte tenu de la parité, on peut écrire

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i^2(t) dt.$$

Compte tenu de la symétrie de $i^2(t)$, on peut écrire

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} i^2(t) dt.$$

Sur $[0, T/4]$, on a

$$i(t) = \frac{I_m}{T/4} t = \frac{4I_m}{T} t,$$

d'où

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{4}{T} \frac{4^2 I_m^2}{T^2} \int_0^{T/4} t^2 dt = \frac{4^3 I_m^2}{T^3} \frac{1}{3} \left(\frac{T}{4} \right)^3 = \frac{I_m^2}{3}.$$

On en déduit

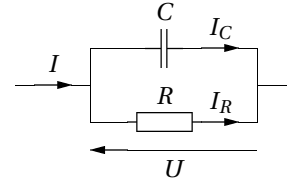
$$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}.$$

2 — Angle de pertes d'un condensateur

Pour construire le diagramme de Fresnel, il convient de mettre les signaux sous la même forme « cos » :

$$i(t) = -I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(2\pi f t - \delta) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \pi/2 - \delta).$$

Le schéma du modèle du condensateur est le suivant :



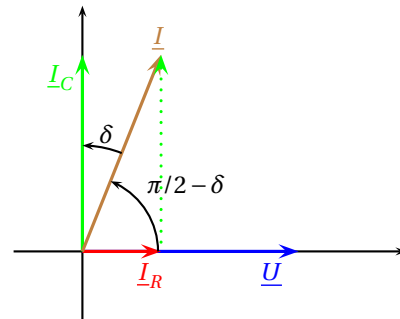
Entre les amplitudes complexes, on a

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_R$$

avec

$$\underline{I}_C = jC\omega \underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}.$$

Construisons le diagramme de Fresnel, en plaçant la tension à l'origine des phases. L'intensité \underline{I}_C présente un déphasage de $+\pi/2$ avec \underline{U} .



On en déduit $\tan \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{1/R}{C\omega}$ soit

$$\tan \delta = \frac{1}{2\pi f RC}.$$

On calcule $\delta = 1,8 \times 10^{-3}$.

Avec la notation

$$i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \pi/2 - \delta),$$

on remarque que le déphasage du courant par rapport à la tension est $\varphi_{I/U} = \pi/2 - \delta$. On a donc

$$\cos \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \sin \delta,$$

et la puissance moyenne $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$ s'écrit alors

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \delta.$$

La puissance moyenne consommée est donnée par

$$P = \text{Re}(\underline{Y}) U_{\text{eff}}^2.$$

Avec $\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega$, on a donc

$$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}.$$

On calcule $P = 2,5 \times 10^{-5} \text{ W}$.

3 — Relèvement du facteur de puissance d'un moteur électrique

Un moteur électrique est alimenté par un courant alternatif de fréquence $f = 50$ Hz sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220$ V. Sa puissance est $P = 10$ kW et son facteur de puissance est $\cos \varphi = 0,7$.

Le moteur est modélisé par l'association en série d'une bobine d'inductance L et d'un résistor de résistance R .

1. La puissance consommée par le moteur est donnée par

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi,$$

d'où

$$I_{\text{eff}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi}.$$

On calcule $I_{\text{eff}} = 65$ A.

De $P = R I_{\text{eff}}^2$ on déduit $R = 2,4 \Omega$.

2. L'impédance du moteur modélisé par R en série avec L est

$$\underline{Z} = R + jL\omega = R + j2\pi fL.$$

On en déduit¹

$$\tan \varphi = \frac{2\pi fL}{R}.$$

On en déduit $L = 7,7$ mH.

3. L'admittance de C en parallèle avec l'association série de R et L est

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}.$$

Pour exprimer $\tan \varphi'$, il faut expliciter les parties réelle et imaginaire :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{R - jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right).$$

Comme $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$, on a $\underline{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}$. On en déduit

$$\tan \varphi' = -\frac{C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}}{\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}}$$

soit

$$\tan \varphi' = \frac{L\omega - C\omega(R^2 + L^2\omega^2)}{R}.$$

4. On déduit de l'expression précédente

$$C = \frac{2\pi fL - R \tan \varphi'}{2\pi f(R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2)}.$$

Avec $\cos \varphi' = 0,9$, on calcule $C = 350 \mu\text{F}$.

Cette valeur est tout à fait accessible.

1. Comme $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$, on a $R = Z \cos \varphi$ et $L\omega = Z \sin \varphi$.

4 — Facteur de puissance

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 200$ V.

Elle consomme une puissance $P = 12$ kW.

La fréquence est $f = 50$ Hz et l'intensité efficace $I_{\text{eff}} = 80$ A.

1. La puissance consommée par l'installation est donnée par

$$P = R I_{\text{eff}}^2.$$

On en déduit $R = 1,88 \Omega$.

Pour peut déterminer L à partir de l'impédance de l'installation :

$$U_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}} \quad \text{avec} \quad Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

On en déduit

$$L = \frac{\sqrt{U_{\text{eff}}^2 / I_{\text{eff}}^2 - R^2}}{\omega},$$

d'où $L = 5,26$ mH.

On peut aussi déterminer le $\cos \varphi$ à partir de

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

soit $\cos \varphi = 0,75$.

De $\underline{Z} = R + jL\omega = Z e^{j\varphi}$ on déduit

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

En en déduit la même valeur de L .

2. On calcule l'admittance de C en parallèle avec l'installation :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)$$

On en déduit comme $\arg \underline{Y} = -\varphi$

$$-\tan \varphi = \frac{C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}}{\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R} C\omega - \frac{L\omega}{R}.$$

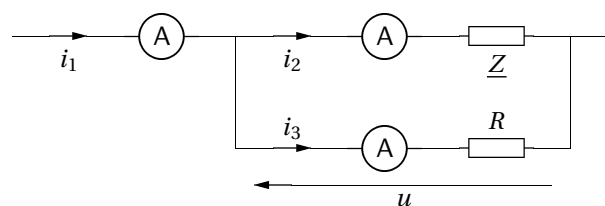
Avec $\cos \varphi = 0,9$, on calcule $\tan \varphi = 0,48$, et on en déduit

$$C = \frac{-R \tan \varphi + L\omega}{(R^2 + L^2\omega^2)\omega}$$

On calcule $C = 0,39$ mF.

5 — Mesure d'un facteur de puissance par la méthode des 3 ampèremètres

On considère les ampèremètres d'impédance nulle : il n'y a pas de tension à leurs bornes.



1. Prenons l'intensité i_2 pour l'origine des phases. On a donc en amplitudes complexes

$$\underline{I}_2 = I_{2e}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \underline{U} = U_e\sqrt{2}e^{j\varphi},$$

le facteur de puissance cherché étant $\cos \varphi$.

La loi des nœuds s'écrit

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

Comme $\underline{U} = RI_3$, l'intensité i_3 présente le même déphasage que la tension avec i_2 .

En notant φ' le déphasage de i_1 avec i_2 , on peut donc écrire

$$I_{1e}e^{j\varphi'} = I_{2e} + I_{3e}e^{j\varphi}.$$

Multiplions par l'expression conjuguée pour en déduire le module :

$$I_{1e}^2 = (I_{2e} + I_{3e}e^{j\varphi})(I_{2e} + I_{3e}e^{-j\varphi}) = I_{2e}^2 + I_{3e}^2 + 2I_{2e}I_{3e}\cos \varphi.$$

On en déduit le facteur de puissance

$$\cos \varphi = \frac{I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2}{2I_{2e}I_{3e}}.$$

2. La puissance moyenne consommée par le dipôle est donnée par

$$P = U_e I_{2e} \cos \varphi \quad \text{avec} \quad U_e = RI_{3e}.$$

On a donc

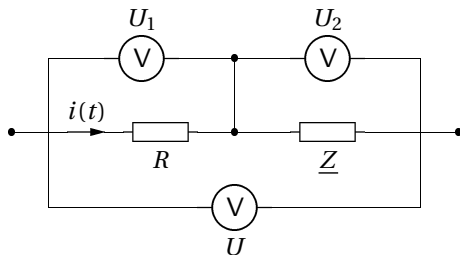
$$P = RI_{2e}I_{3e}\cos \varphi.$$

Avec l'expression précédente, on déduit

$$P = \frac{R}{2}(I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2).$$

6 — Mesure d'un facteur de puissance par la méthode des 3 voltmètres

On considère les voltmètres d'impédance infinie : la même intensité circule dans R et \underline{Z} .



Prenons l'intensité i pour origine des phases. On a donc

$$\underline{I} = I_e\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = U_{2e}\sqrt{2}e^{j\varphi}.$$

La tension $u_1 = ri$ est en phase avec l'intensité :

$$\underline{U}_2 = U_{2e}\sqrt{2}.$$

La loi d'additivité des tensions s'écrit

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

soit en notant φ' le déphasage de u avec i

$$U_e e^{j\varphi'} = U_{1e} + U_{2e} e^{j\varphi}.$$

En multipliant par l'expression conjuguée

$$U_e e^{-j\varphi'} = U_{1e} + U_{2e} e^{-j\varphi}$$

on obtient

$$U_e^2 = U_{1e}^2 + U_{2e}^2 + 2U_{1e}U_{2e}\cos \varphi,,$$

d'où le facteur de qualité

$$\cos \varphi = \frac{U_e^2 - U_{1e}^2 - U_{2e}^2}{2U_{1e}U_{2e}}.$$

Le dipôle consomme la puissance moyenne

$$P = U_{2e}I_e \cos \varphi$$

soit comme $U_{1e} = RI_e$,

$$P = \frac{U_{1e}U_{2e}}{R} \cos \varphi.$$

Avec l'expression précédente, on obtient

$$P = \frac{U_e^2 - U_{1e}^2 - U_{2e}^2}{2R}.$$