

# Sujet d'entraînement

# Mécanique des fluides, bilans

## Partie 1 — À propos de la propulsion spatiale

Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\hat{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ . À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $z \in \mathbb{C}$ .

L'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre est  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Ce problème s'intéresse à la propulsion d'engins spatiaux et plus particulièrement au moteur ionique, dans lequel le carburant n'est pas brûlé mais ionisé. Les ions alors libérés passent par deux grilles fortement chargées électriquement et subissent ainsi une accélération. La force d'accélération des ions cause une force de réaction de sens opposée : c'est la force de propulsion du moteur à ions.

Les sous parties 2 et 3 sont indépendantes.

### 1 Aspect cinétique — Loi de vitesse

À l'instant  $t = 0$ , une fusée de masse totale  $m_0$  décolle verticalement dans le référentiel terrestre. On définit le débit de masse  $D_m > 0$  des gaz brûlés par

$$D_m = -\frac{dm}{dt},$$

$m(t)$  désignant la masse de la fusée à un instant  $t > 0$  quelconque.

On note  $\vec{u} = -u\hat{u}_z$  avec  $u > 0$ , la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note  $\vec{v} = v(t)\hat{u}_z$  la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On suppose que  $D_m$  et  $u$  restent constants et que le champ de pesanteur  $g$  reste uniforme lors du lancement.

1. En prenant pour système la fusée à l'instant  $t$ , exprimer sa quantité de mouvement  $\vec{p}_f$  aux instants  $t$  et  $t + dt$ . Déterminer de même la quantité de mouvement  $\vec{p}_g$  à l'instant  $t + dt$  du gaz éjecté pendant  $dt$ .
2. On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{w}(t)$  est définie par la relation

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t + dt) - \vec{w}(t)}{dt}.$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble {fusée+gaz}, établir l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg. \tag{1}$$

3. Identifier, dans le second membre de l'équation (1), l'intensité  $F$  de la force de poussée. À quelle condition la fusée décolle-t-elle?
4. On nomme impulsion spécifique  $I_s$  d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse  $m$  de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par  $m$  à la surface de la Terre. Exprimer  $I_s$  en fonction de  $u$  et  $g$ .
5. Déterminer l'expression de la vitesse  $v(t)$  de la fusée à l'instant  $t$ , en fonction de  $t$ ,  $m(t)$ ,  $g$ ,  $u$  et de la masse de la fusée à l'instant  $t = 0$ , notée  $m_0$ .
6. On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire); sa masse totale est alors  $m_i$  et sa vitesse  $\vec{v} = v_i\hat{u}_z$ . On allume à nouveau un moteur pendant une durée  $\Delta t$  conduisant à une variation de masse  $\Delta m = m_i - m_f$ . Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté  $\Delta V = v_f - v_i$ , en fonction de  $u$ ,  $m_i$  et  $m_f$ .

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale  $m_t = 134$  tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est  $m_{t1} = 110$  tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est  $m_{t2} = 24,0$  tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

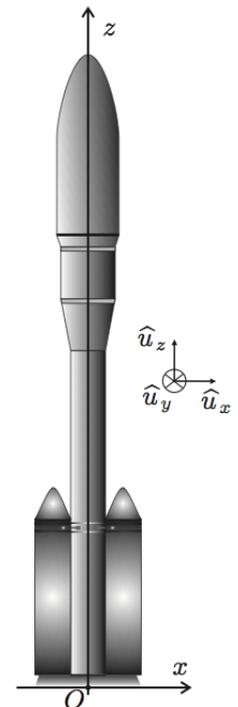


FIGURE 1 – Fusée

7. En considérant que la vitesse d'éjection des gaz  $u = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masse, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

8. Pour une charge utile de masse  $m_u = 550 \text{ kg}$ , calculer les masses  $m_{c1}$  et  $m_{c2}$  de carburant (la masse initiale du vaisseau est  $m_0 = m_u + m_c$ ) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse  $\Delta V = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , dans le cas d'une propulsion chimique ( $u = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et d'une propulsion ionique ( $u = 20,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

## 2 Aspect énergétique — Rendement propulsif du moteur fusée

9. Le vaisseau se déplace à une vitesse de norme  $v$  dans le référentiel d'étude galiléen. Exprimer l'énergie cinétique dans ce référentiel de la masse  $dm$  du gaz éjecté pendant  $dt$ . En déduire la puissance cinétique  $P_{\text{jet}}$  contenue dans le jet de gaz issu du moteur. Exprimer de même la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée. On exprimera ces deux termes en fonction de  $D_m$ ,  $u$  et  $v$ .

10. On définit le rendement propulsif comme le rapport de la puissance cinétique gagnée par le vaisseau sur la puissance totale dépensée. En admettant une conversion parfaite de l'énergie stockée dans le vaisseau en énergie cinétique du jet et du vaisseau, montrer que le rendement propulsif peut se mettre sous la forme

$$\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

où l'on précisera l'expression de  $x$  en fonction des données du problème.

11. Tracer la courbe  $\eta(x)$ . Pour quelle valeur de  $x$  le rendement propulsif est-il maximal? Pour quelles valeurs de  $x$  le rendement est-il nul? Montrer que l'on pouvait prévoir ces résultats sans calcul.

En fait, bien que des moteurs à vitesse d'éjection soient étudiés et quelquefois exploités, le rendement énergie de la propulsion est souvent considéré comme secondaire : l'énergie fournie par une pile nucléaire ou des panneaux solaires est presque illimitée, ce qui n'est pas le cas des réserves de gaz propulsif.

## 3 Étude de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de la fusée

On considère ici la fusée se déplaçant librement dans l'espace : elle n'est plus soumise au champ de pesanteur ou au champ gravitationnel terrestre.

12. Que devient l'équation (1)? En déduire l'expression de la composante  $v(t)$  au cours du temps en fonction de  $u$ ,  $m(t)$  et  $m_0$ , masse de la fusée à  $t = 0$ . On pourra réutiliser les calculs faits à la question 5.

On considère la masse de fusée « à vide »  $m_f \ll m_0$ . On pose  $r = \frac{m(t)}{m_0}$  la fraction de masse restante de la fusée à l'instant  $t$ . Dans ce modèle  $r$  varie de  $r = 1$  initialement à  $r \rightarrow 0$  quand tout le gaz a été expulsé.

13. Exprimer la quantité de mouvement  $p$  de la fusée<sup>1</sup> à l'instant  $t$  en fonction de  $u$ ,  $m_0$  et de la masse  $m$  de la fusée à cet instant.

Pour quelle valeur  $m_p$  de  $m$  la quantité de mouvement de la fusée est-elle maximale? Exprimer alors  $p_{\text{max}}$  en fonction de  $m_0$  et  $u$ .

14. Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$  de la fusée à l'instant  $t$  en fonction de  $u$ ,  $m_0$  et de la masse  $m$  de la fusée à cet instant.

Pour quelle valeur  $m_c$  de  $m$  l'énergie cinétique est-elle maximale? Exprimer alors  $E_{c,\text{max}}$  en fonction de  $m_0$  et  $u$ .

15. Représenter sur le même graphe les évolutions de  $v$ , de  $p$  et de  $E_c$  en fonction de la fraction de masse restante de la fusée  $r = m/m_0$ . On utilisera des échelles arbitraires pour les ordonnées.

16. On souhaite dévier un astéroïde au repos en envoyant une fusée dessus, afin de le percuter dans une collision parfaitement inélastique : la fusée reste « collée » à l'astéroïde, et la quantité de mouvement totale de l'ensemble {fusée + astéroïde} est conservée lors de la collision.

Est-ce une bonne idée de programmer la collision quand la fusée aura atteint la plus grande valeur de sa vitesse? Pourquoi?

Pour quelle valeur du rapport  $r = m/m_0$  faut-il que la fusée percute l'astéroïde pour lui communiquer la plus grande déviation?

1. On considère la quantité de mouvement de la fusée et des gaz qu'elle contient à cet instant, sans prendre en compte les gaz déjà éjectés.

17. On souhaite maintenant détruire un astéroïde au repos en envoyer la fusée le percuter. Pour quelle valeur du rapport  $r = m/m_0$  faut-il que la fusée rencontre l'astéroïde pour faire le plus de dégâts?

## Partie 2 — Oscillateur à relaxation

Cette partie traite d'un modèle d'oscillateur hydraulique.

On notera  $\rho$  la masse volumique de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur, et on prendra pour valeurs numériques  $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

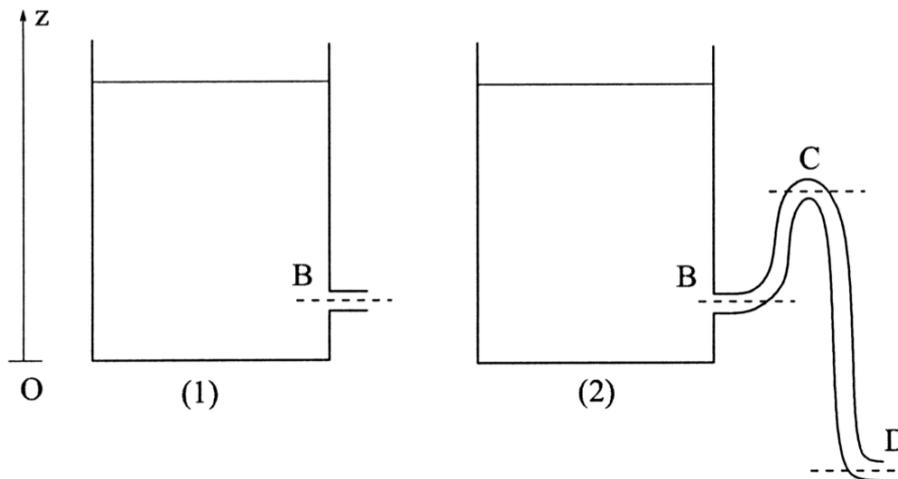


FIGURE 1 – Le récipient et son siphon

### 1 Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire  $S$ . Les hauteurs sont repérées à l'aide d'un axe vertical ( $Oz$ ) orienté vers le haut, et dont l'origine coïncide avec le fond du réservoir (voir figure 1 à gauche). Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur  $h$  et percé d'un orifice situé au niveau du point  $B$ , à hauteur  $z_B$ . Cet orifice possède une section droite  $\sigma$ . On nomme  $D_s$  le débit volumique d'eau sortant par l'orifice  $B$  associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre du réservoir (d'aire  $S$ ) et l'extrémité de l'orifice  $B$  sont en contact avec l'air entourant le réservoir, à pression atmosphérique  $P_0 = 1 \text{ bar}$ . Tous les écoulements considérés dans cette partie seront assimilés à des écoulements non visqueux, incompressibles et laminaires. La variable de temps est notée  $t$ .

1. On assimile la vidange du réservoir à un écoulement stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur  $h(t)$  de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement. Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à cet écoulement.
2. Énoncer et appliquer le théorème de Bernoulli le long de ces lignes de courant, et déterminer, dans le cadre des hypothèses ci-dessus, et pour des sections droites  $S$  et  $\sigma$  quelconques, la vitesse du fluide  $v_B$  au niveau de l'orifice  $B$ .

Que vaut alors le débit  $D_s$ ?

3. En déduire la valeur algébrique de  $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$ .

Que deviennent les expressions de  $v_B$  et  $\dot{h}$  dans la limite où la section droite  $\sigma$  est très petite devant  $S$ ?

Dans toute la suite, on considère valide l'approximation  $\sigma \ll S$ .

4. Calculer la valeur numérique de débit  $D_s$  lorsque  $h = 2 \text{ m}$ ,  $z_B = 0,1 \text{ m}$  et  $\sigma = 2 \text{ cm}^2$ .

Exprimer votre résultat dans les unités du système international (SI), puis en litre par seconde ( $\text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

### 2 Influence du siphon

Un siphon est une portion coudée de conduite, de section constante  $\sigma$ , dont la hauteur maximale, représentée par le point  $C$  de la figure 1, page 3 à droite, se trouve à une hauteur  $z_C$  supérieure à la hauteur  $z_B$  de l'orifice de la conduite. Un siphon peut se trouver dans deux états :

- dans l'état amorcé, le siphon ne contient pas d'air, et l'on peut considérer que le théorème de Bernoulli s'applique d'une extrémité à l'autre du siphon. L'extrémité  $D$  située à l'opposé du réservoir se retrouve alors en contact avec l'air à la pression atmosphérique  $P_0$ ;
- dans l'état désamorcé, le siphon contient de l'air, la continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers la conduite est nul.

On supposera qu'une fois amorcé, le siphon reste dans cet état jusqu'à ce que de l'air pénètre par l'orifice situé en  $B$ . Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau d'eau excède  $z_C$ .

5. Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit sortant  $D_s$ , que l'on exprimera en fonction de  $h$ ,  $g$ ,  $\sigma$  et de la hauteur de l'un des trois points  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .
6. Donner une équation différentielle du premier ordre en  $t$  pour l'évolution temporelle de la hauteur  $h$  de la surface libre, dans le régime où le siphon est amorcé. Le réservoir n'est alimenté par aucune source.
7. Trouver la solution de cette équation différentielle, en partant d'une condition initiale  $h(0) = h_0 \geq z_C$ . En déduire la durée nécessaire  $t_1$  pour que le siphon se désamorce.<sup>2</sup>

### 3 Réservoir alimenté

Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit  $D_i$ , arrivant par l'orifice  $A$ , et qui ne perturbe par l'écoulement de vidange (figure 2).

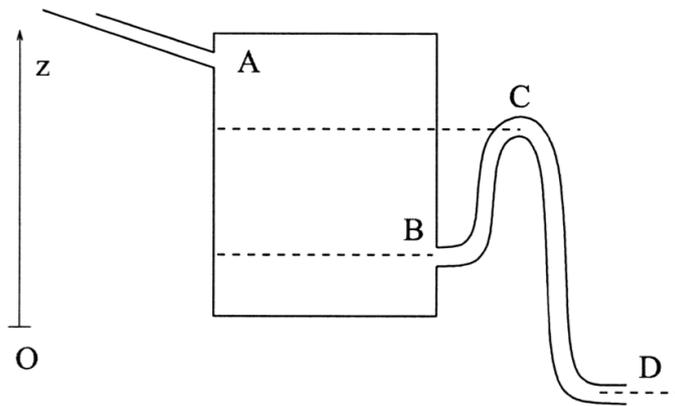


FIGURE 2 – Réservoir alimenté

8. Comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur  $h$  en présence d'un débit  $D_i$  venant alimenter le réservoir, le siphon étant amorcé?
9. Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire, de hauteur  $h_s$  constante, que l'on exprimera en fonction de  $z_D$ ,  $D_i$ ,  $\sigma$  et  $g$ . Cette solution paraît-elle acceptable si la valeur de  $h_s$  associée à un débit  $D_i$  est telle que  $h_s < z_B$ ? Justifier votre réponse.
10. Décrire l'évolution de la hauteur  $h(t)$  lorsque le siphon est désamorcé.
11. Montrer que si le débit  $D_i$  est plus faible qu'une valeur critique  $D_c$ , le système représenté sur la figure 2 se comporte comme un oscillateur, dont le débit de sortie est une fonction périodique du temps. Déterminer la valeur de  $D_c$ .
12. On suppose  $D_i < D_c$ . Représenter schématiquement l'allure temporelle de la hauteur  $h(t)$  en fonction du temps  $t$ . Déterminer, en fonction des paramètres du problème, la période  $T$  du phénomène, en négligeant, lorsque le siphon est amorcé, le débit incident  $D_i$  par rapport au débit sortant  $D_s$ .
13. *Application numérique.* Calculer  $D_c$  et  $T$  pour les valeurs suivantes des paramètres, dans le cadre de l'approximation de la question précédente :  $z_D = -0,2$  m,  $z_C = 0,3$  m,  $z_B = 0,1$  m,  $\sigma = 2$  cm<sup>2</sup>,  $D_i = 4 \times 10^{-4}$  m<sup>3</sup> · s<sup>-1</sup> et  $S = 1$  m<sup>2</sup>.

2. On peut aussi trouver directement  $t_1$  sans résoudre l'équation différentielle, ce que vous pouvez faire si vous n'arrivez pas à la résoudre.

### Partie 3 — Un peu d'aviation, beaucoup de physique... Mines PC

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ( $\hat{e}_x$ ) ou d'une flèche dans le cas général ( $\vec{V}$ ). Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs.

#### Les premiers avions, quelques connaissances de base

Quelle que soit sa forme, un avion est toujours constitué par un ensemble d'éléments correspondant à diverses fonctions : on retiendra principalement les ailes destinées à soutenir l'appareil et l'organe de propulsion qui lui donne la vitesse nécessaire à la sustentation et à la translation. La figure 1 représente un schéma élémentaire du profil d'une aile d'avion.

Le segment de droite  $\Sigma$  qui joint le bord d'attaque au bord de fuite est appelé corde de profil. L'angle  $\alpha$  entre ce segment et la direction que suit l'avion est appelé incidence. L'air immobile attaqué par une aile se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$  se sépare en deux parties : l'une longue, l'extrados, l'autre l'intrados. Dans le cas d'un mouvement rectiligne et uniforme de l'aile, on peut se placer dans le référentiel de l'aile et considérer que c'est l'air qui se déplace autour de celle-ci.

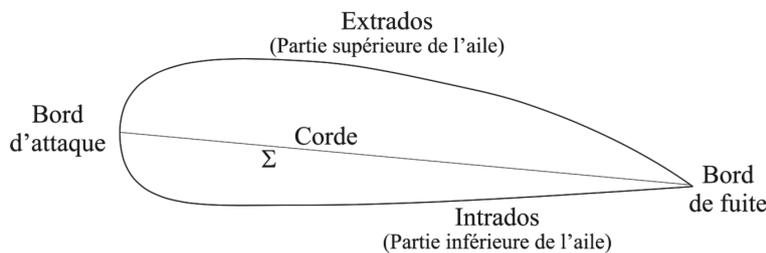


FIGURE 1 – Profil d'une aile d'avion

L'étude dynamique d'une aile d'avion montre que celle-ci est soumise à deux forces d'origine aérodynamique :

- la traînée  $\vec{F}_t$ , dirigée en sens inverse de la vitesse  $\vec{V}$ . En vol sous incidence nulle ( $\alpha = 0$ ), cette force doit être équilibrée par la force de traction de l'hélice ou des réacteurs;
- la portance  $\vec{F}_p$  qui équilibre le poids de l'avion.

L'air sera supposé incompressible.

1. La portance est due au fait que le débit d'air est plus important au voisinage de l'extrados qu'au voisinage de l'intrados. Justifier le fait que cette portance s'oppose à l'effet du poids.

Des expériences effectuées notamment en soufflerie montrent que les modules respectifs  $F_t$  et  $F_p$  de la traînée et de la portance peuvent se mettre sous la forme

$$F_t = C_T(\alpha) \frac{\mu V^2}{2} S \quad \text{et} \quad F_p = C_P(\alpha) \frac{\mu V^2}{2} S.$$

La quantité  $S$  représente la surface de la projection des ailes sur le plan perpendiculaire à la corde. Les coefficients de traînée  $C_T(\alpha)$  et de portance  $C_P(\alpha)$  dépendent de l'angle d'incidence et  $\mu = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  représente la masse volumique de l'air.

On considère un avion de masse  $m = 1,80 \times 10^4 \text{ kg}$ , en vol sous incidence nulle; la projection de ses ailes représente une surface  $S = 50,0 \text{ m}^2$ . Le moteur de cet avion développe une puissance  $\mathcal{P} = 2,70 \text{ MW}$  qui lui permet de se déplacer avec une vitesse de module  $V = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Le champ de gravitation terrestre a pour module  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  dans toutes les régions considérées.

2. Déterminer l'expression du coefficient de portance en vol sous incidence nulle  $C_P(0)$ . Calculer sa valeur numérique.

3. Déterminer, toujours en vol sous incidence nulle, l'expression de la traînée  $F_t$  due aux ailes sachant que la traînée totale de l'avion est due pour les deux tiers aux ailes. En déduire la valeur numérique du coefficient  $C_T(0)$  associé.

On se propose maintenant de calculer les expressions de  $C_T(\alpha)$  et  $C_P(\alpha)$  dans le cas d'une aile rectangulaire qui se déplace à la vitesse constante  $\vec{V} = -V\hat{e}_x$ . On travaillera dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen, associé au repère  $(0; \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$  lié à l'aile et représenté sur la figure 2; dans celui-ci l'air semble provenir de l'infini avec la

vitesse  $\vec{V} = V\hat{e}_x$ . La largeur de l'aile est notée  $\ell$ , sa longueur, étendue selon  $\hat{e}_z$  est notée  $L$  et son épaisseur est supposée négligeable.

On adoptera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le fluide est dévié de manière uniforme sur une hauteur  $h'$ . Après la déviation, il présente une vitesse uniforme  $\vec{V}'$  parallèle à l'aile;
- on néglige les frottements, c'est-à-dire que la force de contact exercée par l'aile sur l'air est normale à sa surface;
- dans les divers bilans, on utilisera le volume de contrôle dont les sections d'entrée  $S$  et de sortie  $S'$  sont des rectangles de largeur  $L$  et de hauteurs respectives  $h$  et  $h'$ . Ces deux sections sont représentées en traits pointillés sur la figure 2;
- on se place en régime stationnaire.

Ce modèle est très simplifié mais il permet de rendre compte des grandeurs étudiées dans ce problème. Les données proposées ne sont cependant pas suffisantes pour utiliser le théorème de Bernoulli.

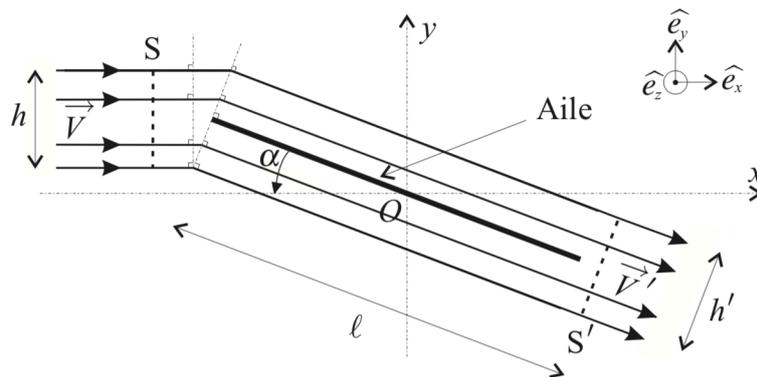


FIGURE 2 – Vue de profil de la modélisation de l'écoulement

4. Déterminer le débit massique  $D_m$  de fluide dévié par l'aile. On pourra faire le calcul en entrée de l'aile où le champ des vitesses est connu.
5. En écrivant la conservation du débit massique entre l'entrée et la sortie de l'aile, exprimer  $V' = \|\vec{V}'\|$  en fonction de  $V$  et  $\alpha$ .
6. En effectuant un bilan de quantité de mouvement, calculer la force  $\vec{F}_{a/e}$  exercée par l'aile sur l'écoulement.
7. On admet que la force  $\vec{F}_{e/a}$  exercée par l'écoulement sur l'aile est de la forme

$$\vec{F}_{e/a} = \frac{\mu L \ell V^2}{2} (C_x \hat{e}_x + C_y \hat{e}_y).$$

Déduire de la question 6 les expressions de  $C_x$  et  $C_y$  en fonction de  $\alpha$  et  $\lambda = h/\ell$ .

8. On appelle polaire de l'aile la courbe représentant  $C_y$  en fonction de  $C_x$ . Déterminer une relation entre  $C_x$ ,  $C_y$  et  $\lambda$ . En déduire la représentation de la polaire de cette aile rectangulaire.

Des essais en soufflerie illustrent deux propriétés importantes des ailes en aéronautique :

- pour des angles  $\alpha$  petits correspondant à des incidences faibles, le coefficient de portance est une fonction linéaire de  $\alpha$ ;
- au dessus d'une certaine incidence critique  $\alpha_c$ , la portance est décroissante et provoque un décrochage aérodynamique.

9. Retrouver ces deux propriétés à partir des expressions de  $C_x$  et  $C_y$  obtenues à la question 7. On déterminera en particulier la valeur de  $\alpha_c$ .

10. Dans quels domaines d'incidences (proches de  $\alpha_c$  ou petites devant  $\alpha_c$ ) doit-on opérer si l'on veut optimiser la portance tout en réduisant la traînée afin que les ailes ne soient pas soumises à une trop forte résistance de l'air?

11. Pour procéder à l'atterrissage, l'avion doit perdre de l'altitude. Quels paramètres permettent au pilote de contrôler cette opération? Justifier votre réponse.