Sujet d'entraînement — Bilans, fluides — solution

Partie 1 — À propos de la propulsion spatiale

1 Aspect cinétique — Loi de vitesse

1. La quantité de mouvement de la fusée à l'instant t est

$$\boxed{\vec{p}_\mathrm{f}(t) = m(t)v(t)\hat{u}_z}\,.$$

À l'instant $t+\mathrm{d}t$, la masse de la fusée est

$$m(t+\mathrm{d}t) = m(t) - D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t\,.$$

Sa quantité de mouvement vaut donc

$$\boxed{\vec{p}_\mathrm{f}(t+\mathrm{d}t) = [m(t) - D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t]\,v(t+\mathrm{d}t)\hat{u}_z}\,.$$

Le gaz éjecté entre t et $t+\mathrm{d}t$ a pour masse $\mathrm{d}m_\mathrm{g} = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$. D'après la loi de composition des vitesses, sa vitesse dans le référentiel terrestre en $t+\mathrm{d}t$ est

$$\vec{v}_\mathrm{g}(t+\mathrm{d}t) = \vec{u} + \vec{v}(t+\mathrm{d}t) = v(t+\mathrm{d}t)\hat{u}_z - u\hat{u}_z\,.$$

On en déduit la quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p}_\mathrm{g} = [D_\mathrm{m}v(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t - D_\mathrm{m}u\,\mathrm{d}t]\,\hat{u}_z}\,.$$

2. Considérons le système fermé {fusée + gaz}.
À l'instant t, sa quantité de mouvement est

$$\vec{P}(t) = \vec{p}_\mathrm{f}(t) = m(t)v(t)\hat{u}_z\,.$$

À l'instant $t+\mathrm{d}t$, sa quantité de mouvement est

$$\begin{aligned}\vec{P}(t+\mathrm{d}t) &= \vec{p}_\mathrm{f}(t+\mathrm{d}t) + \vec{p}_\mathrm{g}\\ &= [m(t) - D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t]\,v(t+\mathrm{d}t)\hat{u}_z\\ &\quad + [D_\mathrm{m}v(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t - D_\mathrm{m}u\,\mathrm{d}t]\,\hat{u}_z\\ &= m(t)v(t+\mathrm{d}t)\hat{u}_z - D_\mathrm{m}u\,\mathrm{d}t\,\hat{u}_z\,.\end{aligned}$$

La dérivée

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{\vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t)}{\mathrm{d}t}$$

est donc donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} &= m(t)\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{v(t+\mathrm{d}t) - v(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_z - D_\mathrm{m}u\hat{u}_z\\ &= \left(m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - D_\mathrm{m}u\right)\hat{u}_z\,.\end{aligned}$$

Le système fermé {fusée + gaz} de masse totale $m(t)$ est soumis à son seul poids ; le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m(t)\vec{g} = -m(t)g\hat{u}_z\,,$$

soit en projection selon $\hat{u}_z$

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - D_\mathrm{m}u = -m(t)g\,.$$

On obtient bien l'équation différentielle demandée

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m}u - mg}\,. \qquad (1)$$

3. Formellement, l'équation (1) peut s'identifier au principe de la dynamique appliqué à un système de masse $m(t)$, les termes du membre de droite représentant les « forces ». Outre le poids, il apparaît donc une force ascendante, la force de poussée d'intensité

$$\boxed{F = D_\mathrm{m}u}\,.$$

La fusée décolle si initialement, la force de poussée est supérieure à son poids, soit

$$\boxed{D_\mathrm{m}u > m_0 g}\,.$$

4. Le poids ressenti par m à la surface de la Terre est mg. Avec un débit massique D_m, la durée I_s nécessaire à l'éjection de la masse m d'ergol est donnée par $m = D_\mathrm{m}I_\mathrm{s}$.
Écrivons que la poussée fournie est équivalente au poids de m à la surface de la Terre : $D_\mathrm{m}u = mg$. On a alors $I_\mathrm{s} = \dfrac{m}{D_\mathrm{m}}$ soit

$$\boxed{I_\mathrm{s} = \frac{u}{g}}\,.$$

5. La masse de la fusée à l'instant t étant

$$m(t) = m_0 - D_\mathrm{m}t\,,$$

l'équation (1) s'écrit

$$(m_0 - D_\mathrm{m}t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m}u - (m_0 - D_\mathrm{m}t)g\,,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{D_\mathrm{m}u}{m_0 - D_\mathrm{m}t} - g\,.$$

La fusée partant du repos au sol ($v(0) = 0$), on a donc

$$\int_0^{v(t)}\mathrm{d}v = \int_0^t\frac{D_\mathrm{m}u\,\mathrm{d}t}{m_0 - D_\mathrm{m}t} - \int_0^t g\,\mathrm{d}t\,,$$

soit
$$v(t) = u\int_0^t \frac{D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t}{m_0 - D_\mathrm{m}t} - gt.$$
En posant $y = m_0 - D_\mathrm{m}t$, soit $\mathrm{d}y = -D_\mathrm{m}\mathrm{d}t$, on peut écrire
$$\int_0^t \frac{D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t}{m_0 - D_\mathrm{m}t} = -\int_{m_0}^{m_0-D_\mathrm{m}t}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\Big[\ln y\Big]_{m_0}^{m_0-D_\mathrm{m}t}$$
$$= -\ln\left(\frac{m_0 - D_\mathrm{m}t}{m_0}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - D_\mathrm{m}t}\right),$$
d'où comme $m(t) = m_0 - D_\mathrm{m}t$:
$$\boxed{v(t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt}. \qquad (2)$$
On peut trouver cette expression plus simplement sans expliciter la loi $m(t)$:
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m}u - mg = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u - mg$$
d'où
$$\mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m}{m} - g\,\mathrm{d}t$$
qui s'intègre en
$$v(t) - v_0 = -u\ln\frac{m}{m_0} - gt.$$

6. La relation (2) donne la variation de vitesse $v(t) - 0$ quand la masse varie de m_0 à $m(t)$. En considérant $g = 0$, la variation de vitesse quand la masse passe de m_i à m_f est donnée par
$$\boxed{\Delta V = u\ln\frac{m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{f}}}. \qquad (3)$$

7. Il suffit d'appliquer la relation de Tsiolkovski (3).

Fusée à deux étages.

Pour le premier étage, on considère les masses m_i = 134 tonnes et m_f = 34,0 tonnes, d'où un accroissement de vitesse $\boxed{\Delta V_1 = 6{,}86\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

Pour le deuxième étage, on considère les masses m_i = 24,0 tonnes et m_f = 4,00 tonnes, d'où un accroissement de vitesse $\boxed{\Delta V_2 = 8{,}96\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

L'accroissement total de vitesse est
$$\boxed{\Delta V = 15{,}8\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}.$$

Fusée à un seul étage.

On a m_i = 134 tonnes et m_f = 14,0 tonnes, d'où l'accroissement de vitesse
$$\boxed{\Delta V = 11{,}3\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}.$$
Une structure à deux étages permet un plus grand accroissement de vitesse pour une même masse d'ergols.

8. La relation de Tsiolkovski s'écrit ici
$$\Delta V = u\ln\left(\frac{m_\mathrm{u} + m_\mathrm{c}}{m_\mathrm{u}}\right),$$
d'où
$$m_\mathrm{c} = m_\mathrm{u}\left[\mathrm{e}^{\frac{\Delta V}{u}} - 1\right].$$
On calcule $\boxed{m_\mathrm{c1} = 945\ \mathrm{kg}}$ dans le cas de la propulsion chimique, et $\boxed{m_\mathrm{c2} = 156\ \mathrm{kg}}$ dans le cas de la propulsion ionique.

2 Aspect énergétique — Rendement propulsif du moteur fusée

9. La masse $\mathrm{d}m$ de gaz, animée de la vitesse $(v-u)\hat{u}_z$ dans le référentiel d'étude, possède l'énergie cinétique $\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\mathrm{d}m(v-u)^2$ soit
$$\boxed{\delta E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}D_\mathrm{m}(u-v)^2\,\mathrm{d}t}.$$
La puissance cinétique contenue dans le jet est donnée par $P_\mathrm{jet} = \dfrac{\delta E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}$, soit
$$\boxed{P_\mathrm{jet} = \frac{1}{2}D_\mathrm{m}(u-v)^2}.$$
Le vaisseau se déplace à la vitesse v et est soumis la force de poussée $F = D_\mathrm{m}u$; il reçoit donc de la part de la force de poussée la puissance $P_\mathrm{pous} = Fv$ soit
$$\boxed{P_\mathrm{pous} = D_\mathrm{m}uv}.$$

10. La vaisseau gagne la puissance P_pous. La puissance totale dépensée est intégralement cédée au jet et au vaisseau sous forme d'énergie cinétique; une partie est contenue dans jet (P_jet), l'autre cédée au vaisseau (P_pous). Le rendement propulsif est donc donné par
$$\eta = \frac{P_\mathrm{pous}}{P_\mathrm{pous} + P_\mathrm{jet}}$$
$$= \frac{D_\mathrm{m}uv}{\frac{1}{2}D_\mathrm{m}(u-v)^2 + D_\mathrm{m}uv} = \frac{uv}{uv + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} - uv}$$
soit
$$\boxed{\eta = \frac{2uv}{u^2 + v^2}}.$$
On peut écrire $\eta = \dfrac{2\frac{v}{u}}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}$, soit
$$\boxed{\eta(x) = \frac{2x}{1 + x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{x = \frac{v}{u}}.$$

11. On calcule

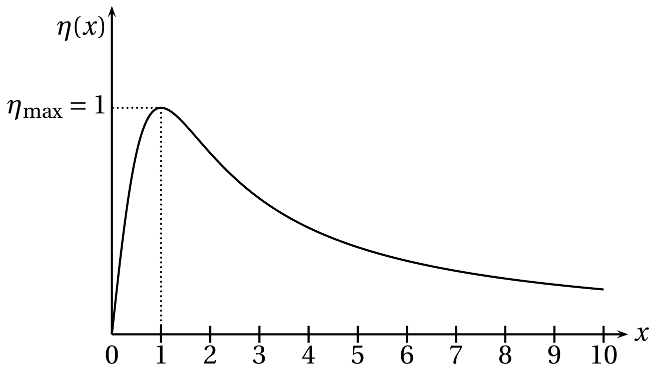
$$\eta'(x) = \frac{2}{1+x^2} + 2x\frac{(-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$

On a donc $\eta'(x) = 0$ pour $x = 1$: le rendement propulsif est maximal pour $x = 1$, c'est-à-dire pour $u = v$. La vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée est alors égale à la vitesse de la fusée par rapport au sol; les gaz sont donc au repos par rapport au sol : seul la fusée possède une énergie cinétique, aucun énergie cinétique n'est cédée aux gaz.

Le rendement est nul dans deux cas :

— pour $x = 0$: on a alors $v = 0$; la fusée est au repos, toute l'énergie est communiquée aux gaz;

— pour $x \to \infty$: on a alors $u = 0$; la vitesse des gaz par rapport à la fusée est nulle... Il n'y a donc pas de gaz émis, et la force de poussée est nulle.



3 Étude de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de la fusée

12. L'équation (1) devient

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m} u \quad \text{avec} \quad m(t) = m_0 - D_\mathrm{m} t\,.$$

En intégrant comme à la question 5, on obtient

$$\boxed{v(t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)}\,.$$

13. La quantité de mouvement de la fusée est donnée par $p = m(t)v(t)$, soit

$$\boxed{p = mu\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)}\,.$$

Calculons

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) + mu\frac{m}{m_0}\left(-\frac{m_0}{m^2}\right)$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - u\,.$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = 0$ pour $\ln\left(\dfrac{m_0}{m_\mathrm{p}}\right) = 1$, soit pour

$$\boxed{m_\mathrm{p} = \frac{m_0}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37 m_0}\,.$$

On a alors $p_{\max} = \dfrac{m_0 u}{\mathrm{e}}\ln \mathrm{e}$, soit

$$\boxed{p_{\max} = \frac{m_0 u}{\mathrm{e}}}\,.$$

14. L'énergie cinétique de la fusée est $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m(t)v^2(t)$, soit

$$\boxed{E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mu^2\left(\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\right)^2}\,.$$

Calculons

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}m} = \frac{u^2}{2}\left[\left(\ln\frac{m_0}{m}\right)^2 + 2m\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\frac{m}{m_0}\left(-\frac{m_0}{m^2}\right)\right] = \frac{u^2}{2}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\left[\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - 2\right]\,.$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}m} = 0$ pour $\ln\left(\frac{m_0}{m_\mathrm{c}}\right) = 2$, soit

$$\boxed{m_\mathrm{c} = \frac{m_0}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}14 m_0}\,.$$

On a alors

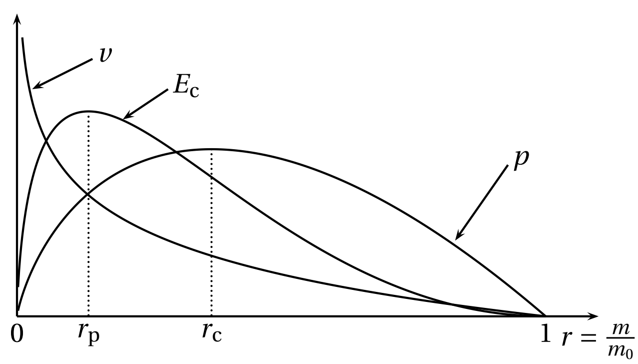
$$E_{\mathrm{c},\max} = \frac{1}{2}\frac{m_0 u^2}{\mathrm{e}^2}\left(\ln \mathrm{e}^2\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_0 u^2}{\mathrm{e}^2}(2)^2$$

soit

$$\boxed{E_{\mathrm{c},\max} = \frac{2m_0 u^2}{\mathrm{e}^2}}\,.$$

15. Traçons les évolutions de v, p et E_c. Attention au sens de lecture : la fusée est pleine pour $r = 1$, et elle a éjecté tous ses gaz pour $r = 0$.

Les unités sont arbitraires en ordonnées (les 3 grandeurs n'ont pas la même dimension).



16. La fusée atteint sa plus grande vitesse lorsque $r_\mathrm{f} = \frac{m_\mathrm{f}}{m_0} \to 0$. Cependant, sa quantité de mouvement est très petite car sa masse est très faible (elle tend vers zéro si on néglige la masse de la fusée à vide). La collision serait sans effet malgré sa grande vitesse (comme un insecte sur votre pare-brise !).

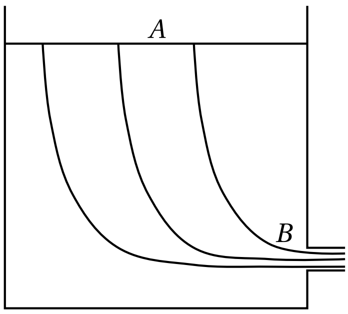
Il faut programmer la collision quand p est maximale, c'est-à-dire pour $\boxed{r_\mathrm{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37}$.

17. Pour que la fusée fasse un maximum de dégâts lors de la collision, son énergie cinétique doit être maximale ; il faut donc programmer la collision pour $\boxed{r_\mathrm{c} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}14}$.

Partie 2 — Oscillateur à relaxation

1 Vidange d'un réservoir

1. Allure des lignes de courant :



2. Le théorème de Bernoulli s'énonce :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = C(\mathcal{L})$$

le long d'une ligne de courant.

En un point A de la surface libre et un point B au niveau de l'orifice, on a donc

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + gz_B\,.$$

On a $P_A = P_B = P_0$ d'où, comme $z_A = h$:

$$v_B^2 + 2gz_B = v_A^2 + 2gh\,.$$

L'écoulement étant incompressible, la conservation du débit volumique s'écrit, entre la section de la surface libre et la section de l'orifice

$$Sv_A = \sigma v_B\,.$$

On a donc

$$v_B^2 + 2gz_B = \frac{\sigma^2}{S^2} v_B^2 + 2gh\,,$$

d'où

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2g(h - z_B)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}}\,.$$

Le débit sortant en B vaut $D_\mathrm{s} = \sigma v_B$, soit

$$\boxed{D_\mathrm{s} = \sigma \sqrt{\frac{2g(h - z_B)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}}\,.$$

3. La vitesse d'un point de la surface libre est donnée par

$$v_A = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

car $h(t)$ décroît au cours du temps quand le récipient se vide. On a donc

$$\dot{h} = -v_A = -\frac{\sigma}{S} v_B\,,$$

soit

$$\boxed{\dot{h} = -\frac{\sigma}{S} \sqrt{\frac{2g(h - z_B)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}}\,.$$

Si $\sigma \ll S$, on a $\frac{\sigma^2}{S^2} \ll 1$; on peut alors écrire

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g(h - z_B)}}$$

et

$$\boxed{\dot{h} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h - z_B)}}\,.$$

4. On calcule $\boxed{D_\mathrm{s} = 1{,}2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 1{,}2\ \mathrm{L \cdot s^{-1}}}$.

2 Influence du siphon

5. On applique la relation de Bernoulli entre un point A à la surface libre et le point D à la sortie du siphon, sur une même ligne de courant :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{v_D^2}{2} + \frac{P_D}{\rho} + gz_D\,.$$

On a d'une part $P_A = P_D = P_0$. D'autre part l'hypothèse $\sigma \ll S$ revient à considérer $v_A \ll V_D$. On en déduit

$$gh = \frac{v_D^2}{2} + gz_D\,,$$

d'où

$$v_D = \sqrt{2g(h - z_D)}\,.$$

Le débit sortant est donné par $D_\mathrm{s} = \sigma v_D$, soit

$$\boxed{D_\mathrm{s} = \sigma\sqrt{2g(h - z_D)}}\,.$$

6. Le débit étant aussi par

$$D_s = Sv_A = -S\frac{dh}{dt}$$

on en déduit

$$\boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h - z_D)} = 0}\,.$$

7. Séparons les variables :

$$dt = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h - z_D}}$$

Le siphon se désamorce à l'instant t_1 tel que $h(t_1) = z_B$: de l'air entre en B. On a donc

$$\int_0^{t_1} dt = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\int_{h_0}^{z_B}\frac{dh}{\sqrt{h - z_D}}$$

soit

$$t_1 = -\frac{2S}{\sigma\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h - z_D}\right]_{h_0}^{z_B}.$$

Le siphon se désamorce au bout de la durée

$$\boxed{t_1 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_0 - z_D} - \sqrt{z_B - z_D}\right)}\,. \qquad (4)$$

Remarque.

L'énoncé demandait de déterminer $h(t)$ (il était plus simple de déterminer directement t_1).

Première méthode

Par séparation des variables :

$$\frac{dh}{\sqrt{h - z_D}} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{S}dt$$

d'où

$$\int_{h_0}^{h(t)}\frac{dh}{\sqrt{h - z_D}} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{S}\int_0^t dt,$$

soit

$$2\left[\sqrt{h(t) - z_D} - \sqrt{h_0 - z_D}\right] = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{S}t.$$

On en déduit

$$\sqrt{h(t) - z_D} = \sqrt{h_0 - z_D} - \frac{\sigma}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t$$

d'où

$$\boxed{h(t) = z_D + \left[\sqrt{h_0 - z_D} - \frac{\sigma}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right]^2}\,.$$

Deuxième méthode

On part de

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h - z_D)},$$

on élève au carré, soit

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{S^2}2g(h - z_D),$$

puis on dérive par rapport au temps :

$$2\frac{dh}{dt}\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{2g\sigma^2}{S^2}\frac{dh}{dt},$$

d'où

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{g\sigma^2}{S^2}.$$

On en déduit

$$h(t) = \frac{g\sigma^2}{2S^2}t^2 + At + B.$$

D'une part $h(0) = B = h_0$. D'autre part

$$\frac{dh}{dt}(0) = A = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h_0 - z_D)},$$

d'où

$$h(t) = \frac{g\sigma^2}{2S^2}t^2 - \frac{\sigma t}{S}\sqrt{2g(h_0 - z_D)} + h_0$$

qui est la forme développée du résultat établi par la première méthode.

3 Réservoir alimenté

8. Le débit sortant par l'orifice du siphon, D_s, est égal au débit Sv_A dû au mouvement de la surface libre, auquel il faut ajouter le débit incident D_i :

$$D_s = Sv_A + D_i.$$

On peut raisonner sur le volume $V = Sh(t)$ d'eau dans le récipient. Pendant dt, il varie de $dV = Sdt$; cette variation est directement reliée au volume entrant $D_i\,dt$ et au volume sortant $D_s\,dt$ par

$$S\,dh = D_i\,dt - D_s\,dt$$

et on retrouve

$$S\frac{dh}{dt} = D_i - D_s,$$

soit

$$D_s = D_i - S\frac{dh}{dt} = D_i + Sv_A.$$

On a donc

$$\sigma\sqrt{2g(h - z_D)} = -S\frac{dh}{dt} + D_i.$$

La hauteur $h(t)$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h - z_D)} = \frac{D_i}{S}}\,.$$

9. En régime stationnaire, on a $\frac{dh}{dt} = 0$, et l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h_s - z_D)} = \frac{D_i}{S}.$$

On a donc

$$2g(h_s - z_D)\sigma^2 = D_i^2$$

d'où

$$\boxed{h_s = \frac{D_i^2}{2g\sigma^2} + z_D}.$$

Cette solution n'est pas acceptable si la valeur de h_s associée à un débit D_i est telle que $h_s < z_B$: si $h_s < z_B$, le siphon est en effet désamorcé, ce qui rend caduque les calculs effectués précédemment.

10. Lorsque le siphon est désamorcé, le débit sortant est nul; on a alors

$$S\frac{dh}{dt} = D_i.$$

La hauteur croît de façon affine avec le temps :

$$\boxed{h(t) = h(t_0) + \frac{D_i}{S}(t - t_0)}.$$

11. Pour que $h(t)$ oscille, il faut que l'on ait alternance de phases où $h(t)$ augmente et où $h(t)$ diminue.

Nous venons de voir que lorsque le siphon est désamorcé, $h(t)$ croît au cours du temps. Le niveau d'eau augmente jusqu'à atteindre $h = z_C$ où le siphon devient amorcé.

Il faut alors que $h(t)$ diminue pour observer un régime oscillatoire.

Quand le siphon est amorcé, on a établi

$$S\frac{dh}{dt} = D_i - D_s(h) = D_i - \sigma\sqrt{2g(h - z_D)}.$$

Le récipient commencera alors à se vider si

$$D_i < D_s(z_C) = D_c.$$

Le débit incident doit donc être plus faible que la valeur critique

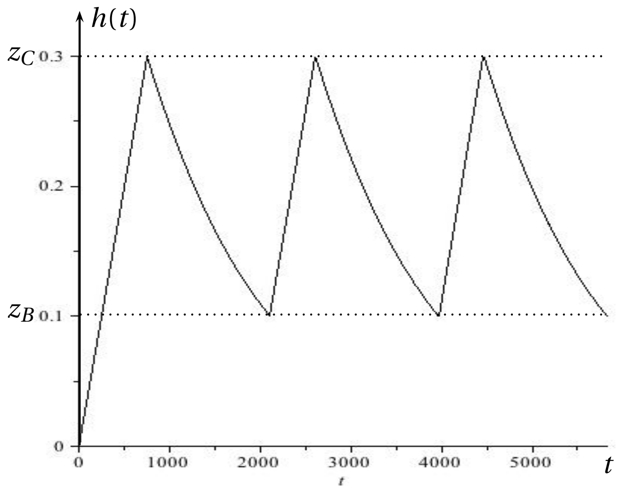
$$\boxed{D_c = \sigma\sqrt{2g(z_C - z_D)}}.$$

12. Le comportement oscillatoire est une alternance de deux phases :

— une phase de remplissage du récipient au cours de laquelle $h(t)$ croît de façon affine;

— une phase de vidange au cours de laquelle $h(t)$ décroît en tendant asymptotiquement vers la valeur h_s.

Évolution de la hauteur en fonction du temps, en partant du récipient initialement vide [1] :



La phase de remplissage a une durée T_1 donnée par

$$z_C = z_B + \frac{D_i}{S}T_1,$$

soit

$$T_1 = \frac{S(z_C - z_B)}{D_i}.$$

Si on néglige le débit incident lors de la phase de vidange, l'équation (4) donne la durée de vidange partant d'une hauteur h_0. La durée de la phase de vidange à partir de la hauteur z_C est donc

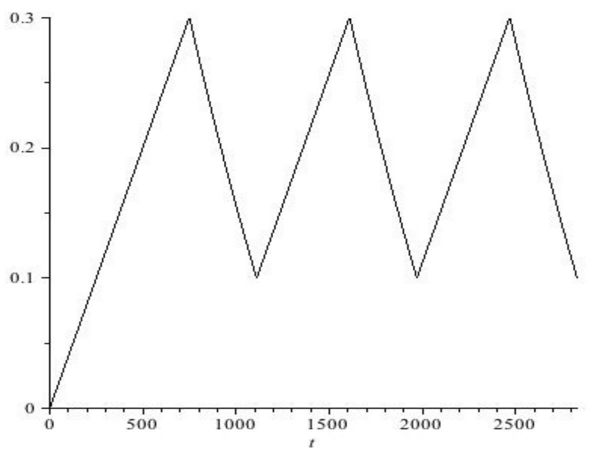
$$T_2 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{z_C - z_D} - \sqrt{z_B - z_D}\right).$$

La période du phénomène est alors donnée par $T = T_1 + T_2$, soit

$$\boxed{T = \frac{S(z_C - z_B)}{D_i} + \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{z_C - z_D} - \sqrt{z_B - z_D}\right)}.$$

13. On calcule $\boxed{D_c = 6{,}3 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 0{,}63\ \mathrm{L \cdot s^{-1}}}$ et $\boxed{T = 860\ \mathrm{s}}$.

La valeur de la période ne correspond pas à celle que l'on peut lire sur le graphe précédent. Ce dernier a été établi sans négliger le débit incident pendant la phase de vidange. Un tracé exact de la solution en considérant $D_i = 0$ quand le siphon est amorcé conduit à :



La période du phénomène correspond bien à la valeur calculée.

1. Solution exacte calculée informatique ment.

Partie 3 — Un peu d'aviation, beaucoup de physique… Mines PC

Les premiers avions, quelques connaissances de base

1. D'après la relation de Bernoulli, l'augmentation du débit d'air entraîne une diminution de la pression. Si le débit est plus important au voisinage de l'extrados qu'au voisinage de l'intrados, la pression est plus important sur l'intrados que sur l'extrados ; la résultante des forces de pression est donc « vers le haut » et s'oppose au poids.

2. La portance compensant le poids, on a

$$mg = F_\mathrm{p} = C_\mathrm{P}(0)\frac{\mu V^2}{2}S$$

d'où

$$\boxed{C_\mathrm{P}(0) = \frac{2mg}{\mu V^2 S}}\,.$$

On calcule $\boxed{C_\mathrm{P}(0) = 0{,}85}$.

3. L'avion se déplaçant à une vitesse de module constant, son énergie cinétique reste constante. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit alors

$$0 = \mathcal{P} - F_\mathrm{t,totale}V$$

où $F_\text{t, totale}$ est le module de la traînée totale. La traînée totale de l'avion étant due pour les deux tiers aux ailes, on $F_\mathrm{t,totale} = \frac{3}{2}F_\mathrm{t}$, d'où

$$\boxed{F_\mathrm{t} = \frac{2\mathcal{P}}{3V}}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{C_\mathrm{T}(0) = \frac{4\mathcal{P}}{3\mu V^3 S}}\,.$$

On calcule $\boxed{C_\mathrm{T}(0) = 0{,}10}$.

4. Le débit massique du fluide dévié par l'aile s'écrit

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \mu SV = \mu LhV}\,.$$

5. La conservation du débit massique s'écrit

$$\mu LhV = \mu Lh'V'\,.$$

On a d'après le schéma $h' = \dfrac{h}{\cos\alpha}$, d'où

$$\boxed{V' = V\cos\alpha}\,.$$

6. Le système Σ^* constitué de l'air compris entre les sections S et S' est un système ouvert. On définit le système fermé $\Sigma(t)$ associé :

— à t, Σt est constitué de la réunion de Σ^* et de la masse $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ d'air rentrant à travers S entre t et $t+\mathrm{d}t$;

— à $t+\mathrm{d}t$, $\Sigma t+\mathrm{d}t$ est constitué de la réunion de Σ^* et de la masse $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ d'air sortant à travers S' entre t et $t+\mathrm{d}t$.

En notant $\vec{P}^*$ la quantité de mouvement constante (l'écoulement est stationnaire) de Σ^*, la quantité de mouvement de Σ vaut :

$$\vec{P}(t) = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t\vec{V} + \vec{P}^*$$

et

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t + \vec{P}^*\,.$$

On en déduit le taux de variation

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = D_\mathrm{m}[\vec{V}' - \vec{V}]\,.$$

Le système est soumis :

— à la résultante des forces de pression extérieure, nulle car P_0 est uniforme ;

— à la force $\vec{F}_\mathrm{a/e}$ exercée par l'aile.

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit alors

$$D_\mathrm{m}[\vec{V}' - \vec{V}] = \vec{F}_\mathrm{a/e}\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\vec{F}_\mathrm{a/e} &= D_\mathrm{m}[V'\cos\alpha\hat{e}_x - V'\sin\alpha\hat{e}_y - V\hat{e}_x]\\ &= D_\mathrm{m}[V(\cos^2\alpha - 1)\hat{e}_x - V\cos\alpha\sin\alpha\hat{e}_y]\\ &= -D_\mathrm{m}V[\sin^2\alpha\hat{e}_x - \sin\alpha\cos\alpha\hat{e}_y]\,,\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{F}_\mathrm{a/e} = -\mu LhV^2\sin\alpha[\sin\alpha\hat{e}_x + \cos\alpha\hat{e}_y]}\,.$$

➤ On remarque que l'on peut écrire

$$\vec{F}_\mathrm{a/e} = -\mu LhV^2\sin\alpha\,\vec{n}$$

où $\vec{n} = \sin\alpha\hat{e}_x + \cos\alpha\hat{e}_y$ est le vecteur unitaire normal à l'aile « vers le haute ». Cette force est normale à l'aile, ce qui est attendu car on a négligé les frottements.

7. On a $\vec{F}_\mathrm{e/a} = -\vec{F}_\mathrm{a/e}$, d'où

$$\begin{aligned}\vec{F}_\mathrm{e/a} &= \mu LhV^2\sin\alpha[\sin\alpha\hat{e}_x + \cos\alpha\hat{e}_y]\\ &= \frac{\mu L\ell V^2}{2}\left(C_x\hat{e}_x + C_y\hat{e}_y\right)\,.\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit

$$C_x = 2\frac{h}{\ell}\sin^2\alpha \quad \text{et} \quad C_y = 2\frac{h}{\ell}\sin\alpha\cos\alpha\,,$$

soit en posant $\lambda = h/\ell$

$$\boxed{C_x = 2\lambda\sin^2\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{C_y = 2\lambda\sin\alpha\cos\alpha}\,.$$

8. Il s'agit d'éliminer λ en combinant les expressions de C_x et C_y.

On peut écrire d'une part $C_y = \lambda \sin 2\alpha$, d'où

$$\sin 2\alpha = \frac{C_y}{\lambda}\,.$$

D'autre part $C_x = \lambda(1-\cos 2\alpha)$, d'où

$$\cos 2\alpha = 1 - \frac{C_x}{\lambda}\,.$$

La relation

$$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$$

s'écrit alors

$$\left(\frac{C_y}{\lambda}\right)^2 + \left(1-\frac{C_x}{\lambda}\right)^2 = 1\,,$$

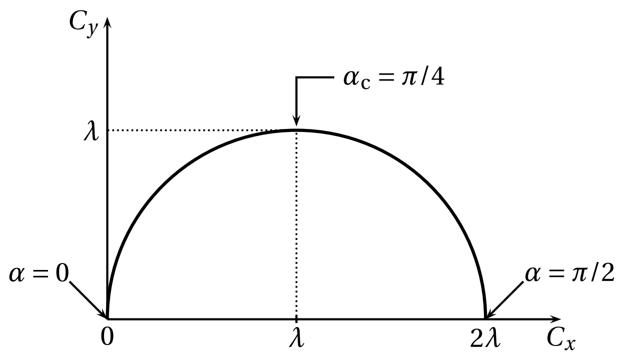
soit

$$\boxed{(\lambda - C_x)^2 + C_y^2 = \lambda^2}\,.$$

Il s'agit de l'équation paramétrée d'un cercle de centre $(\lambda, 0)$, de rayon λ.

Pour $\alpha = 0$, on a $C_x = 0$ et $C_y = 0$.

Pour $\alpha = \pi/2$, on a $C_x = 2\lambda$ et $C_y = 0$.



9. La portance s'identifie ici à la composante de $\vec{F}_{e/a}$ selon $\hat{e}_y$, soit

$$C_P(\alpha)\frac{\mu V^2}{2}S = \frac{\mu L\ell V^2}{2} 2\lambda \sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Le coefficient de portance est donc de la forme

$$C_P(\alpha) = \frac{2L\ell}{S}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{L\ell}{S}\sin(2\alpha)\,.$$

On retrouve les deux propriétés évoquées :

— pour les faibles valeurs de α, on a $C_P(\alpha) \approx \dfrac{L\ell}{S}2\alpha$. Le coefficient de portance est une fonction linéaire de α ;

— le coefficient de portance est maximum pour $\boxed{\alpha_c = \dfrac{\pi}{4}}$. Au delà de cette valeur, C_P diminue, ce qui correspond au phénomène de décrochage.

10. La tangente à la polaire est horizontale pour $\alpha = \alpha_c$: diminuer α revient donc à diminuer de façon significative la traînée (l'abscisse C_x diminue) en gardant une portance (l'ordonnée C_y) à peu près constante. On aura donc intérêt à se placer dans un domaine intermédiaire entre 0 et α_c :

— se placer proche de α_c augmente la traînée sans augmenter la portance ;

— se placer proche de $\alpha = 0$ diminue la traînée, mais la portance aussi tend vers zéro…

11. Pour perdre de l'altitude, le pilote peut :

— diminuer l'angle α ce qui diminue la portance ;

— diminuer la vitesse (la force de portance varie comme V^2) ;

— augmenter la surface S de projection de l'aile en ouvrant des volets.