

## DM n° 5 — à rendre

## Fluides et bilans

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont très significativement valorisées dans le barème. Même si elles n'ont pas abouti, les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat et seront valorisées si elles sont pertinentes. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Fin 2012, une société gérant la production et la distribution d'eau de l'agglomération du Grand Angoulême (110 000 habitants sur 16 communes) a décidé de substituer les deux moteurs asynchrones entraînant la pompe alimentant le château d'eau de Ruelle sur Touvre par un seul moteur synchrone à aimants permanents de puissance 350 W à 1 500 tr · min<sup>-1</sup> commandé par un variateur spécifique. Même s'il s'agit le plus souvent de régime continu, ce dernier participe à réduire la facture énergétique lors de variations de débit imposées. Les pertes rotoriques d'un moteur asynchrone (liées à la différence de vitesse entre le rotor et le champ statorique tournant (glissement)) représentent près du tiers des pertes totales. Les pertes dans un rotor à aimants permanents sont négligeables en comparaison et le variateur n'augmente la consommation énergétique que de 3 %. La consommation énergétique de l'installation est réduite de 10 % par mètre cube transféré et l'installation peut assurer un débit de 115 % de son régime nominal pendant les 8 h de tarif de nuit de consommation électrique. Une étude a montré que le surcoût lié à la vitesse variable serait amorti en 14 mois.

Dans ce sujet, nous nous intéresserons à une autre installation de même type. Après avoir évalué les pertes de charge dans les 8 400 m de conduit reliant la pompe au château d'eau, nous proposerons une pompe centrifuge au point de fonctionnement convenable compte tenu du débit et de la hauteur manométrique totale.

## 1 — Pertes de charge dans les conduites

Hormis la question I.B.3. sur les pertes singulières, nous considérerons dans toute cette partie des conduites rectilignes à section circulaire constante.

### 1 Fluide en écoulement homogène incompressible laminaire

#### 1.1 Que devient la relation de Bernoulli d'un fluide visqueux en régime laminaire stationnaire ?

1. Rappeler les définitions d'un écoulement parfait de fluide, d'un écoulement homogène incompressible, d'un écoulement stationnaire.

2. Dans le cas d'un fluide parfait en écoulement homogène incompressible stationnaire, retrouver la relation de Bernoulli à partir du premier principe de la thermodynamique exprimé relativement à un système ouvert en régime permanent. Préciser alors la grandeur volumique énergétique  $e_T$  uniforme sur une ligne de courant.

On lui associera une hauteur  $H$  appelée hauteur manométrique ou charge totale :

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g},$$

où  $z$  est l'altitude,  $p$  la pression et  $v$  la vitesse du fluide au point considéré,  $\rho$  sa masse volumique et  $g$  l'accélération de la pesanteur ( $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ). Préciser la relation entre  $e_T$  et  $H$ .

3. Dans quelles zones de l'écoulement laminaire d'un fluide réel, l'hypothèse d'un écoulement parfait est-elle inenvisageable ?

4. Si on tient compte de la viscosité du fluide incompressible et en postulant toujours un régime stationnaire, la grandeur volumique énergétique  $e_T$  définie précédemment diminue de  $A$  à  $B$  le long d'une ligne de courant. Relier cette variation d'énergie volumique à une intégrale de circulation de  $A$  à  $B$  de la densité volumique de force de viscosité  $\vec{f}_{\text{visc}}$ .

5. Dans un fluide incompressible visqueux, la densité volumique de force de viscosité s'écrit  $\vec{f}_{\text{visc}} = \eta \Delta \vec{v}$ , où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide et  $\Delta \vec{v}$  le laplacien vectoriel de la vitesse locale.

En déduire, sous forme intégrale, la variation  $H(B) - H(A)$  de hauteur manométrique d'un point  $A$  à un point  $B$  le long d'une ligne de courant allant de  $A$  à  $B$ . La quantité  $\Delta H = H(A) - H(B)$  (positive ou nulle) s'appelle la perte de charge.

#### 1.2 Écoulement de Poiseuille

On étudie le cas particulier de l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite rectiligne, de direction  $\vec{e}_x$  horizontale, de section circulaire  $S$  constante (de rayon  $r_0$ ). Compte tenu des symétries du problème, le champ des vitesses s'exprime sous la forme  $\vec{v}(M) = v(r, x) \vec{e}_x$ , où  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  est la distance du point  $M$  à l'axe de révolution de la conduite.

6. Montrer que la vitesse  $v(r, x)$  ne peut dépendre de  $x$ .

7. En supposant la perte de charge linéique uniforme tout au long de la conduite et en notant  $\frac{\partial H}{\partial x} = -a$  (avec  $a > 0$ ), montrer que

$$v(r) = v_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \quad \text{avec} \quad v_{\max} = \frac{\rho g a}{4\eta} r_0^2.$$

Dans la symétrie du problème, on a

$$\Delta \vec{v} = \delta v_x \vec{e}_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \vec{e}_x.$$

8. La vitesse débitante  $U$  sur une section droite est la vitesse qui, uniforme sur la section  $S$ , correspond au même débit volumique  $Q$ .

Exprimer cette vitesse en fonction de  $v_{\max}$  et en déduire  $v(r)$  en fonction du débit volumique  $Q$  de fluide dans la conduite.

9. On souhaite un débit d'environ  $30 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$  dans une conduite de diamètre  $D = 20 \text{ cm}$ . Dans une conduite cylindrique, la transition laminaire turbulente se situe aux alentours de nombres de Reynolds de 2300 (dans l'expression du nombre de Reynolds, on choisira respectivement  $U$  et  $D$  comme ordres de grandeur de la vitesse du fluide et de la dimension transversale de l'écoulement).

— Cas d'une huile (SAE-90) pour laquelle  $\eta = 0,17 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\rho = 880 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

► Calculer la perte de charge linéique et donc la surpression nécessaire pour le transport de cette huile sur un tronçon de 50 m.

► Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclure.

— Cas de l'eau :  $\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

► Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclure.

## 2 Fluide visqueux homogène incompressible en régime turbulent

### 2.1 Charge moyenne dans une section à symétrie de révolution

La charge  $H$ , exprimée en un point  $M$  de l'écoulement, apparait comme une fonction  $H(x, r)$  de  $x$  et de  $r$ . On définit une charge moyenne  $\bar{H}(x)$  moyennée sur une section de conduite par

$$\bar{H}(x) = \iint_{\text{section}} H(x, r) \frac{dQ}{Q}$$

où  $dQ$  est le débit volumique traversant un élément  $dS$  de la section de la conduite et  $Q$  le débit volumique total de la conduite.

Pour exprimer le terme cinétique de la charge en fonction de la vitesse débitante  $U$ , on introduit le coefficient de Coriolis

$\alpha = \frac{P_{c, \text{réelle}}}{P_{c, \text{uniforme}}}$ , où  $P_{c, \text{réelle}}$  est la puissance cinétique traversant la section  $S$  de la conduite et  $P_{c, \text{uniforme}}$  la puissance cinétique qui traverserait cette section pour une vitesse uniforme  $U$  (chaque particule de fluide traverse la section  $S$  à la vitesse  $v(r)$ , emportant avec elle son énergie cinétique volumique locale  $\frac{1}{2} \rho v^2(r)$ ).

10. Montrer que  $\alpha = \frac{1}{U^3 S} \iint_{\text{section}} v^3(r) dS$ .

11. En déduire que la charge moyenne sur une section de l'écoulement (laminaire ou turbulent) s'écrit

$$\bar{H} = z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g}.$$

12. Calculer numériquement le coefficient de Coriolis pour l'écoulement uniforme et pour l'écoulement laminaire de Poiseuille.

13. Dans le cas de régimes turbulents courants, les valeurs du coefficient oscillent entre 1,05 et 1,20. Commenter.

### 2.2 Rugosité, diagramme de Moody

La perte de charge régulière moyenne, pour un écoulement incompressible dans une conduite circulaire rectiligne de longueur  $L$  et de diamètre  $D$ , est donnée par

$$\Delta \bar{H}_l = f \left( \text{Re}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

définissant ainsi le coefficient de perte de charge  $f(\text{Re}, \varepsilon/D)$  qui dépend du nombre de Reynolds  $\text{Re}$ , et par conséquent du régime d'écoulement, et de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  de la conduite. La valeur numérique de ce coefficient est donnée par le diagramme de Moody (figure 4), en fonction du nombre de Reynolds, pour différentes valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  (lue à droite du graphe).

La rugosité absolue  $\varepsilon$  a la dimension d'une hauteur sans toutefois représenter une hauteur moyenne des aspérités de la surface intérieure de la conduite : par exemple, pour des conduites métalliques rivetées, le revêtement a peu d'importance devant le nombre et l'écartement des files longitudinales et transversales de rivets.

14. Montrer que l'écoulement de Poiseuille conduit à  $f\left(\mathcal{R}e, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{64}{\mathcal{R}e}$ .

Interpréter le fait que le coefficient de perte de charge ainsi obtenu ne dépend pas de la rugosité.

15. Pour relier la station de pompage au château d'eau, on installe une conduite en fonte de diamètre  $D = 20$  cm, de longueur  $L = 8,345$  km. Dans les conditions nominales de fonctionnement, cette conduite débite  $Q = 30 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$  d'eau. La rugosité de la conduite en fonte dépend de son état de surface, selon qu'elle est neuve ou plus ou moins corrodée. On distingue trois cas :

- F1 « fonte neuve » :  $\varepsilon_1 = 0,4$  mm ;
- F2 « fonte corrodée » :  $\varepsilon_2 = 1,2$  mm ;
- F3 « fonte déposée » :  $\varepsilon_2 = 1,6$  mm.

En utilisant l'abaque de Moody, évaluer dans chacun de ces cas la perte de charge moyenne  $\Delta\bar{H}_l$  de cette conduite dans ses conditions nominales d'utilisation ( $Q = 30 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

### 2.3 Pertes singulières

Les pertes de charges singulières en régime turbulent peuvent s'écrire sous la forme

$$\Delta\bar{H}_s = K \frac{U^2}{2g}$$

(pertes proportionnelles à  $KQ^2$ ), ce qui présente un intérêt évident pour le cumul des pertes de charges puisque l'on a écrit

$$\Delta\bar{H}_l = f\left(\mathcal{R}e, \frac{\varepsilon}{D}\right) \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

(pertes régulières proportionnelles à  $LQ^2$ ). Il peut s'agir de pertes dans les rétrécissements, les entrées, les grilles, les diffuseurs, les vannes, les robinets, les clapets, les coudes, etc.

Pour une conduite cylindrique de diamètre  $D = 20$  cm et tournant de  $90^\circ$  avec un rayon du coude de 1,5 m, on aura un coefficient  $K$  de  $0,2$ . Quelle est la longueur de conduite en « fonte neuve » équivalente à ce coude ?

À titre de comparaison, une entrée saillante de ce diamètre a un coefficient  $K$  de l'ordre de l'unité, une vanne à passage direct de  $0,1$ , un robinet à soupape de  $6$  et un clapet anti-retour à soupape de  $70$  (soit une longueur équivalente de la conduite précédente de plus de  $500$  m).

## 2 — Point de fonctionnement hydraulique d'une installation

### 1 Caractéristiques hydrauliques d'une pompe centrifuge

Une pompe centrifuge est caractérisée a minima par trois paramètres : son débit volumique nominal  $Q_p$ , sa hauteur manométrique totale nominale  $H_{mt}$  qui est la variation de hauteur manométrique engendrée par la pompe (usuellement exprimée en mètre de colonne d'eau : mCE) et son rendement hydraulique nominal  $R = P_h/P_m$  où  $P_h$  est la puissance hydraulique fournie par la pompe et  $P_m$  la puissance mécanique fournie à la pompe. Le constructeur fournit les courbes  $H_{mt}(Q_p)$  et  $R(Q_p)$ . On dispose (figure 3) de la caractéristique hydraulique du type de pompe retenue (WDE 32). Il s'agit d'une pompe centrifuge multi-étages dont le fonctionnement ne sera pas étudié ici.

Cette pompe étant fabriquée aux USA, la documentation fournie par le constructeur utilise des unités anglo-saxonnes : on notera que, dans la figure 3, la hauteur manométrique totale  $H_{mt}$  (« head ») est exprimée en pieds (ft) (à gauche de la figure) et le débit volumique  $Q_p$  (« capacity ») en gallons US par minute (USgpm). Pour convertir ces unités anglo-saxonnes, on utilisera les facteurs de conversion indiqués en bas à droite de la figure 3.

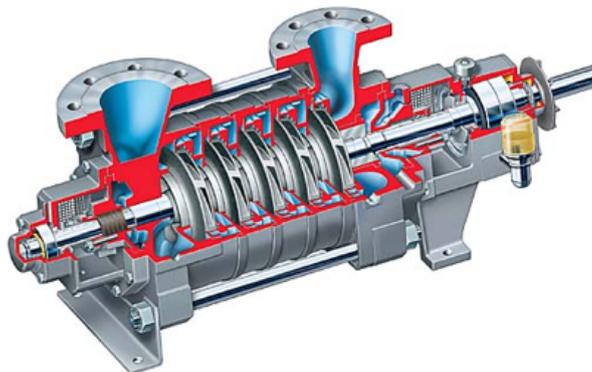


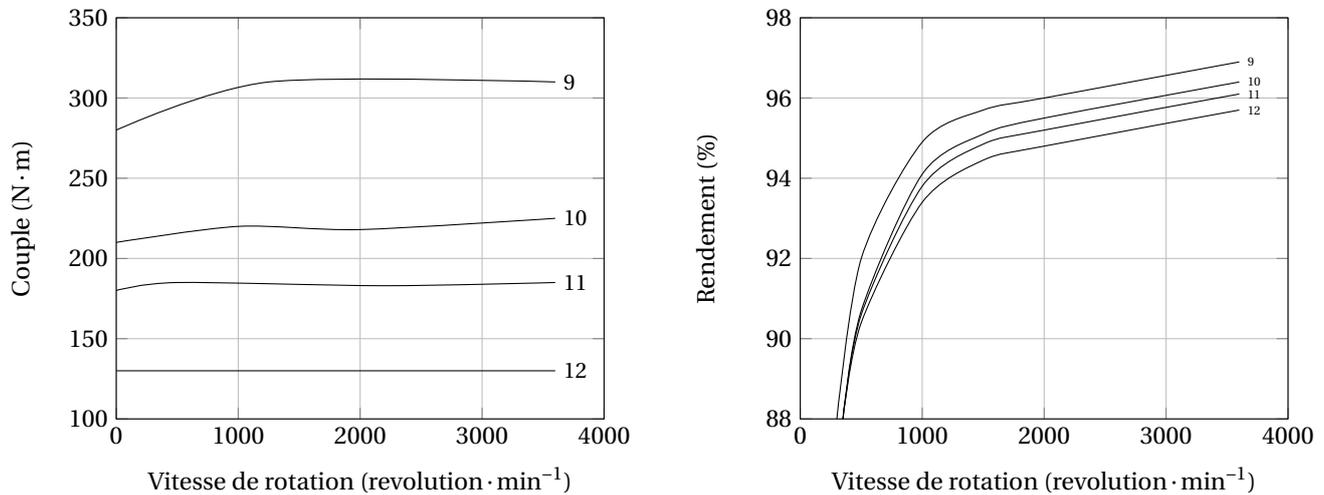
FIGURE 1 – Schéma d'une pompe centrifuge

16. La puissance hydraulique d'une pompe s'écrit  $P_h = \rho g H_{mt} Q_p$ . Justifier cette expression.

17. Calculer la puissance mécanique  $P_m$  à fournir sur l'axe de la pompe pour le point de fonctionnement  $H_{mt}(Q_p)$  envisagé, repéré par le point  $F$  sur la 3.

## 2 Point de fonctionnement hydraulique et consommation électrique

L'alimentation en eau potable d'un village nécessite un volume d'eau de  $2\,600\text{ m}^3$  par jour. On décide de faire le traitement de l'eau directement à côté de la prise d'aspiration (altitude 502 m) et de transporter l'eau potable au château d'eau du village (altitude 767 m) par une conduite de refoulement en fonte de diamètre nominal 200 mm et de longueur 8,345 km. On négligera les pertes singulières devant les pertes linéaires ainsi que les pertes à l'aspiration devant les pertes au refoulement.



9 LSRPM 200 LU2 :  $3\,600\text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  / 115 kW / 213 A

10 LSRPM 200 L1 :  $3\,600\text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  / 85 kW / 158 A

11 LSRPM 200 L1 :  $3\,600\text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  / 70 kW / 130 A

12 LSRPM 200 L1 :  $3\,600\text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  / 50 kW / 97 A

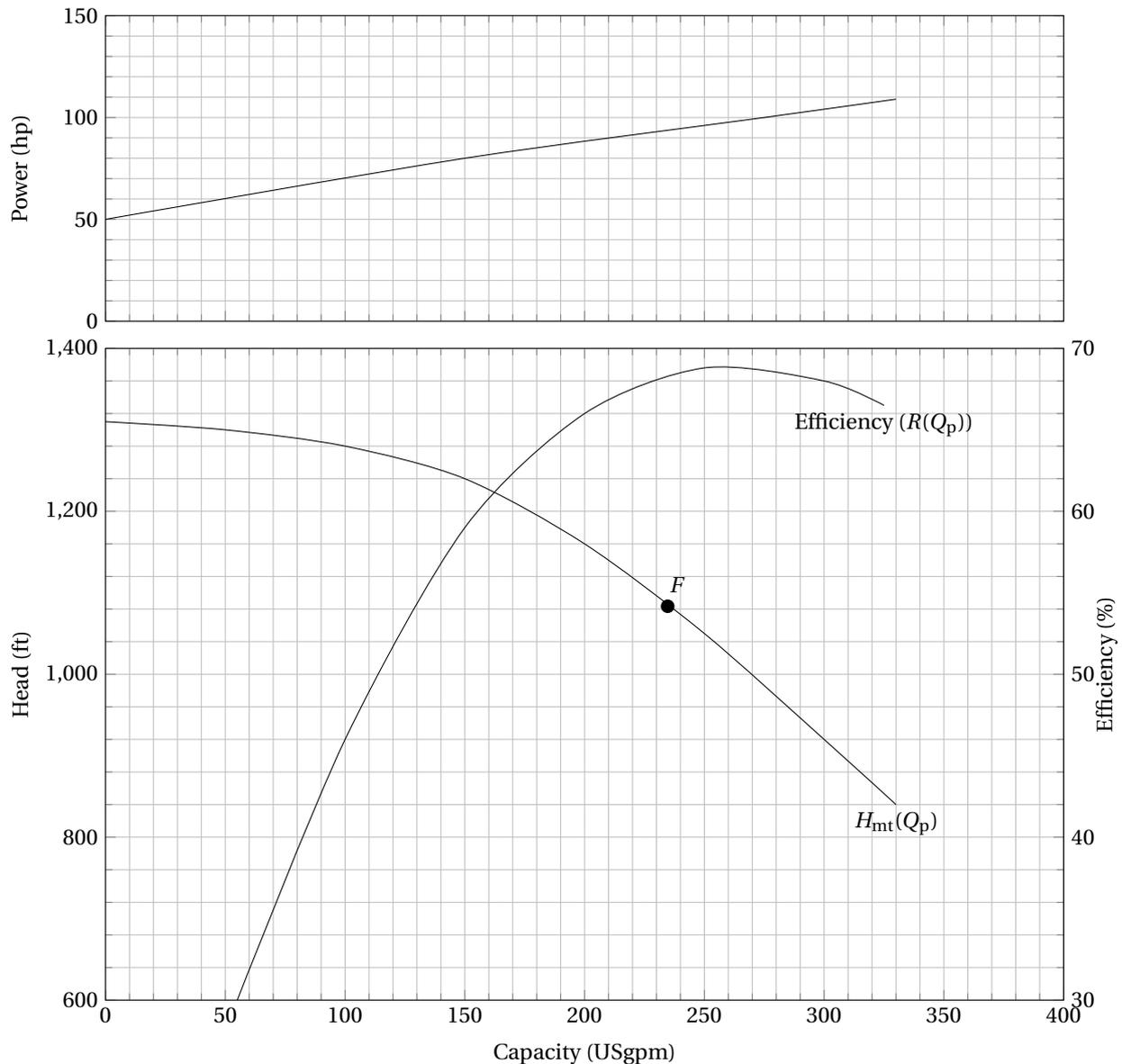
FIGURE 2 – Caractéristiques de 4 moteurs

18. Montrer que deux exemplaires de la pompe WDE 32 doivent nécessairement être montés en parallèle.

19. En utilisant les valeurs des pertes régulières  $\Delta \bar{H}_l$  calculées aux questions 14 et 15, ainsi que les figures 3 et 4, déterminer le point de fonctionnement ( $Q$  et  $H_{mt}$ ) suivant l'état de rugosité de la fonte (neuve, corrodée ou déposée).

20. Dans un premier temps, les pompes sont entraînées par des moteurs asynchrones dont le rendement électromagnétique est de 80 %. Calculer, dans les trois situations précédentes, la puissance électrique consommée. Commenter l'effet du « vieillissement » de la surface intérieure de la canalisation sur la puissance électrique demandée et sur le rendement énergétique global.

21. Compte tenu de la vitesse de rotation des pompes, estimer le couple moteur mécanique de chaque moteur entraînant la pompe. Choisir le moteur synchrone à aimants permanents le plus approprié parmi les quatre décrits en 2 et utiliser son rendement à la vitesse de rotation de la pompe pour déterminer la puissance électrique consommée. Comparer à la puissance électrique consommée par un moteur asynchrone.

**Point de fonctionnement envisagé**

**Hydraulic power** 63,7 hp  
**Pump speed** 3 200 rpm  
**Efficiency (CE = 1,00)** 68,3 %  
**Rated power** 93,3 hp  
**Maximum power** 108 hp  
**Driver power** 125 hp/93,2 kW

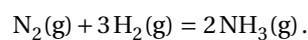
**Conversion des unités (à 3 chiffres significatifs)**

100 USgpm (gallon per minute) =  $6,31 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$   
 1 rpm =  $1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$   
 100 ft = 30,5 m

FIGURE 3 – Caractéristiques de la pompe WDE 32

**Chimie — Autour de la synthèse de l'ammoniac**

L'ammoniac est synthétisé industriellement à partir de  $\text{H}_2$  et  $\text{N}_2$  selon la réaction en phase gazeuse



1. Définir et calculer la variance de cet équilibre :

- si on introduit les réactifs dans des proportions quelconques ;
- si on introduit les réactifs dans les proportions stœchiométriques.

2. À partir des données en annexe, déterminer  $\Delta_r H^\circ$  et  $\Delta_r S^\circ$ . Justifier qualitativement le signe de  $\Delta_r S^\circ$ .

3. En sa plaçant dans l'approximation d'Ellingham, que l'on rappellera, donner l'expression de  $\Delta_r G^\circ(T)$ .

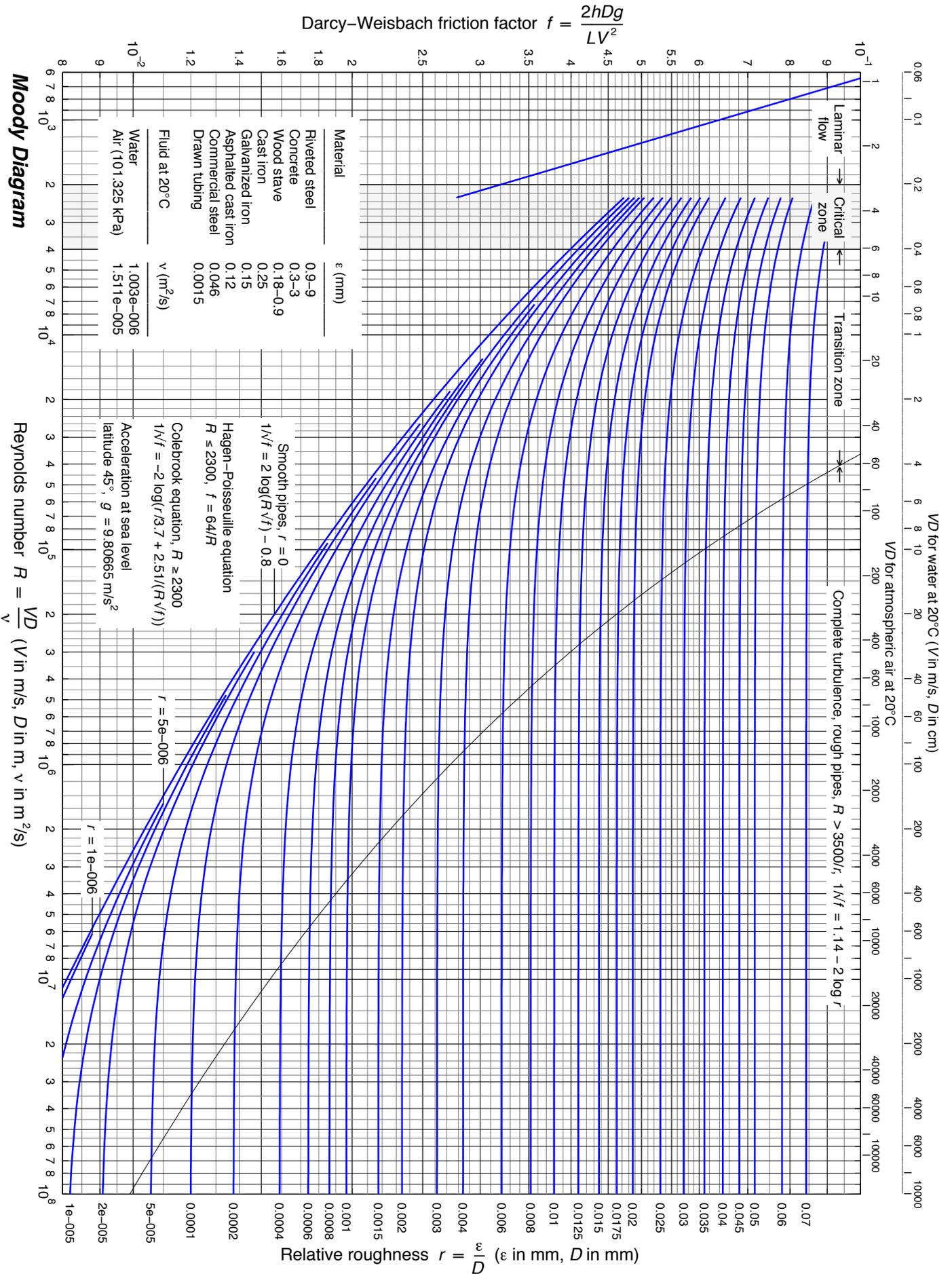


FIGURE 4 – Diagramme de Moody

4. On appelle température d'inversion la température  $T_i$  telle que  $\Delta_r G^\circ(T_i) = 0$ . Déterminer sa valeur numérique. Que vaut  $K^\circ(T_i)$  ?

5.a) Quelle est l'influence d'une augmentation isobare de température sur cet équilibre ?

Déterminer la valeur de la constante d'équilibre à 25 °C et à 450 °C. À quelle température doit-on réaliser la synthèse de l'ammoniac ?

5.b) En réalité, cette synthèse est réalisée à une température de l'ordre de 450 °C. Donner la raison de ce choix. Quelle autre méthode évite pour cette synthèse, l'utilisation d'une température encore plus élevée ?

6. Quelle est l'influence d'une augmentation isotherme de la pression totale  $P$  sur l'évolution de cet équilibre ? Cette synthèse doit-elle être réalisée à faible ou à haute pression ?

Le mélange initial contient 1 mole de diazote et  $n_0$  moles de dihydrogène. L'avancement de la réaction est noté  $\xi$ .

On cherche la composition initiale qui conduit au rendement maximum de la synthèse.

7. Déterminer la relation entre les trois fractions molaires  $x_{\text{NH}_3}$ ,  $x_{\text{N}_2}$ ,  $x_{\text{H}_2}$ , la pression totale  $P$ , la pression standard  $P^\circ$  et la constante d'équilibre  $K^\circ$  lorsque le système est à l'équilibre.

8. Quelle autre relation a-t-on entre  $x_{\text{NH}_3}$ ,  $x_{\text{N}_2}$  et  $x_{\text{H}_2}$  ?

9. Il est souhaitable que le mélange final soit le plus riche possible en ammoniac. Pour cela, on cherche la valeur de  $n_0$  qui rend  $x_{\text{NH}_3}$  maximum dans ce mélange final.

La température et la pression totale sont constantes, mais  $n_0$  est variable.

9.a) Montrer que lorsque le mélange possède une fraction molaire maximale en ammoniac, on a

$$\frac{dx_{\text{H}_2}}{dn_0} + \frac{dx_{\text{N}_2}}{dn_0} = 0.$$

9.b) En utilisant le résultat de la question 7, montrer que lorsque le mélange possède une fraction molaire maximale en ammoniac, on a

$$\frac{3}{x_{\text{H}_2}} \frac{dx_{\text{H}_2}}{dn_0} + \frac{1}{x_{\text{N}_2}} \frac{dx_{\text{N}_2}}{dn_0} = 0.$$

9.c) En déduire la valeur de  $n_0$  qui permet de rendre  $x_{\text{NH}_3}$  maximum. Commenter.

### Données thermodynamiques

On donne les enthalpies standard de formation et les entropies molaires standard à 298 K :

Espèce	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	NH <sub>3</sub>
$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol <sup>-1</sup> )			-46,2
$S_m^\circ$ (J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup> )	191,5	130,6	192,7