

Partie I — Effet Meissner dans un supraconducteur — Mines PC 2019

1.1 Comparaison avec l'électromagnétisme classique

- Un phénomène d'induction peut être observé lorsqu'un circuit électrique est soumis à un flux magnétique variable dans le temps. Ce peut être le cas
  - si le circuit est fixe, soumis à un champ magnétique variable;
  - si le circuit est mobile dans un champ magnétique constant.
- Ici, le champ magnétique est constant (créé par un aimant permanent), et le système au repos : on ne devrait donc pas observer de phénomène d'induction.
- La loi d'Ohm locale est donnée par

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique,  $\vec{j}$  le vecteur densité de courant électrique et  $\vec{E}$  le champ électrique dans le conducteur.

- D'après la relation précédente, on en déduit que le champ électrique est nul dans un conducteur parfait :

$$\vec{E} = \vec{0}.$$

- Dans le cas où  $\vec{E} = \vec{0}$ , l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

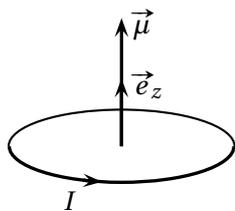
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} = \vec{0}.$$

Le champ magnétique est donc stationnaire dans un conducteur parfait.

- Le moment magnétique de la boucle de courant est donné par

$$\vec{\mu} = \pi R^2 I \vec{e}_z$$

en orientant la boucle comme indiqué ci-après :



- On se place en un point tel que  $\vec{OM} = h \vec{e}_z$  au-dessus de l'aimant. Le moment magnétique de l'aimant étant  $\vec{M} = \mathcal{M} \vec{e}_z$ , le champ magnétique créé est donné par

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi h^3} (3\mathcal{M} - \mathcal{M}) \vec{e}_z$$

d'intensité

$$B = \frac{\mu_0 2\mathcal{M}}{4\pi h^3}.$$

En estimant  $h \approx 1$  cm d'après la figure, on obtient

$$B \approx 10^{-7} \frac{2 \times 10}{(10^{-2})^3}$$

soit  $B \approx 2$  T.

Cette valeur est élevée pour un aimant permanent.

- On considère le moment magnétique  $\vec{\mu} = \pi R^2 \vec{e}_z$  placé dans le champ  $\vec{B}$  précédent à une distance  $h$  au-dessus de l'aimant. On peut écrire

$$\mu B = \frac{\mu_0 2\mathcal{M}}{4\pi h^3} I \pi R^2,$$

d'où

$$F = \left| \text{grad}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \right| = \left| \frac{d\mu B}{dh} \right| = 3 \frac{\mu_0 2\mathcal{M}}{4\pi h^4} I \pi R^2.$$

À l'équilibre, la force magnétique s'oppose au poids de l'aimant, soit

$$3 \frac{\mu_0 2\mathcal{M}}{4\pi h^4} I \pi R^2 = mg.$$

En prenant, comme l'indique le document,  $R \approx h$ , on obtient

$$I \approx \frac{mgh^2}{3 \frac{\mu_0 2\mathcal{M}\pi}{4\pi}} = \frac{40 \times 10^{-3} \times 10 \times (10^{-2})^2}{3 \times 10^{-7} \times 2 \times 10\pi}$$

soit

$$I \approx 2$$
 A.

1.2 Champ magnétique dans le supraconducteur

- Par analyse dimensionnelle à partir de l'équation de Maxwell-Ampère (statique)  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , on a

$$\frac{[B]}{L} = [\mu_0][j].$$

L'équation de London conduit à

$$\frac{[j]}{L} = \frac{[B]}{[\mu_0][\lambda]^2}.$$

On en déduit

$$[\lambda]^2 = \frac{[B]L}{[\mu_0][j]} = \frac{[\mu_0][j]L^2}{[\mu_0][j]} = L^2.$$

La constante  $\lambda$  est donc homogène à une longueur :

$$[\lambda] = L.$$

10. On calcule  $\lambda = 17 \text{ nm}$ .

11. En régime stationnaire, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

On a alors

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \text{rot } \vec{j}.$$

On a d'une part  $\text{div } \vec{B} = 0$ ; l'équation de London permet d'écrire

$$-\Delta \vec{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B},$$

soit

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}.$$

12. Le champ  $\vec{B}_{\text{ext}}$  crée le courant  $\vec{j}$ , qui crée le champ  $\vec{B}$  dans le supraconducteur. Le champ  $\vec{B}$  a donc la même symétrie que  $\vec{B}_{\text{ext}}$ , et est donc dirigé selon  $\vec{e}_z$ . Le champ extérieur  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est normal au plan de symétrie de la distribution de courant qui lui donne naissance, soit  $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . Le champ dans le supraconducteur vérifie la même propriété de symétrie, et est aussi normal à ce plan, soit

$$\vec{B} = B(x, y, z) \vec{e}_z.$$

Le système étant invariant par translation selon  $Oy$  et  $Oz$ , la composante de  $\vec{B}$  ne dépend pas des variables  $y$  et  $z$ , soit

$$\vec{B} = B(x) \vec{e}_z.$$

13. L'équation de la question 11 s'écrit ici

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{B(x)}{\lambda^2}.$$

La solution générale est

$$B(x) = A \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + C \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Les conditions aux frontières sont

$$B(d) = B_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad B(-d) = B_{\text{ext}}.$$

La solution est donc paire et  $C = 0$ . On a alors

$$B_{\text{ext}} = A \cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right),$$

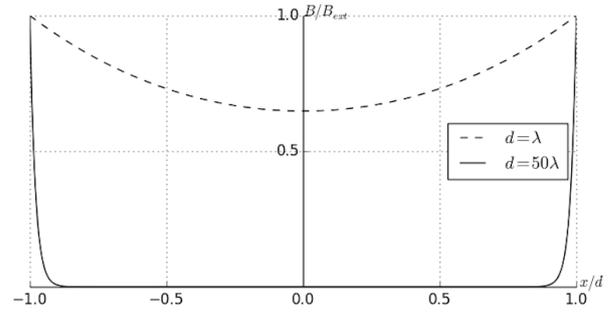
d'où

$$B(x) = B_{\text{ext}} \frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)}.$$

On a donc

$$B(x) = B_{\text{ext}} \frac{\cosh(\alpha)}{\cosh(\beta)} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{x}{\lambda} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{d}{\lambda}.$$

14. Allure du champ magnétique dans le supraconducteur :



Le champ magnétique peut être considéré comme nul dans le supraconducteur si  $d \gg \lambda$ .

Le paramètre  $\lambda$  représente la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur.

15. On a calculé à la question 10  $\lambda = 17 \text{ nm}$ .

On peut estimer d'après le document  $d \approx 1 \text{ cm}$ .

La condition  $d \gg \lambda$  est donc bien vérifiée.

16. Avec  $\vec{B} = B(x) \vec{e}_y$ , on a

$$\text{rot } \vec{B} = -\frac{dB}{dx} \vec{e}_y.$$

En utilisant l'expression de  $B(x)$  déterminée à la question 13, on calcule

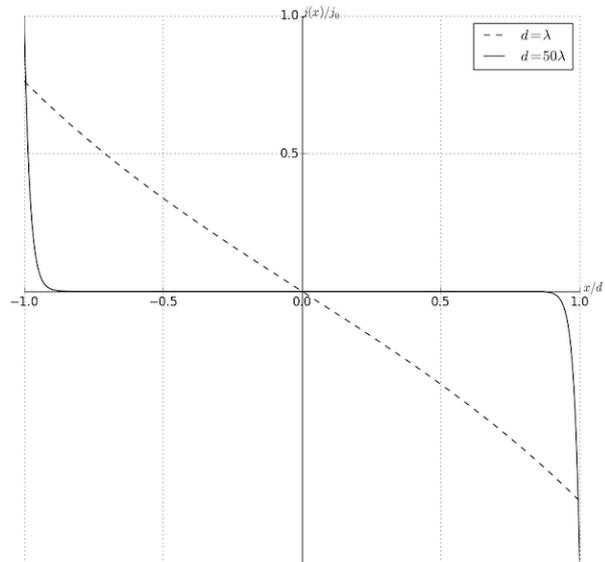
$$\text{rot } \vec{B} = -\frac{B_{\text{ext}}}{\lambda} \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{e}_y.$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , on en déduit

$$\vec{j} = -\frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \lambda} \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{e}_y.$$

17. On remarque que  $j(x)$  est une fonction impaire, avec

$$j(d) = -\frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \lambda} \tanh\left(\frac{d}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad j(-d) = \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0 \lambda} \tanh\left(\frac{d}{\lambda}\right).$$



Pour  $d = 50\lambda$ , la densité de courant dans le supraconducteur peut être considérée comme **surfactive**.

18. On peut estimer

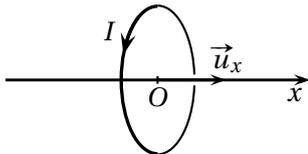
$$I = 2\pi R \int_0^d -j(x) dx = \frac{2\pi R B_{\text{ext}}}{\mu_0}.$$

Avec  $R \approx 1$  cm, on calcule  $I \approx 2 \times 10^2$  A.

Cette valeur est bien supérieure au courant de la question 8, mais l'intensité du champ magnétique considéré n'est pas comparable...

## Partie II — Une mesure du champ géomagnétique (Centrale PC 2016 - Physique 1)

1. Orientons la spire comme indiqué sur la figure en perspective suivante :



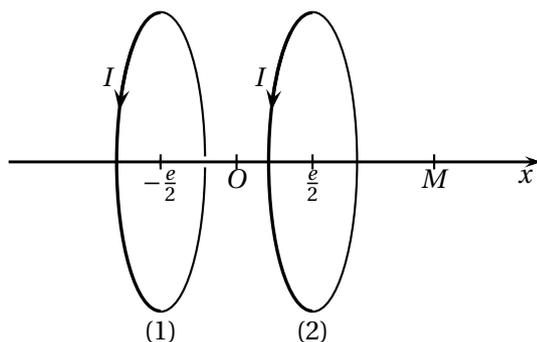
Tous les plans contenant l'axe  $Ox$  sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant; le champ  $\vec{B}$  étant contenu dans chacun de ses plans, il est contenu par leur intersection : **il est donc porté par l'axe  $Ox$ .**

Avec l'expression donnée, on a  $B_{\text{spire}}(x) > 0$  si  $I > 0$ , ce qui est conforme avec la règle d'orientation de Maxwell : un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens de  $I$  avance dans le sens du champ magnétique.

On peut donc écrire vectoriellement

$$\vec{B}_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x.$$

2. Représentons le dispositif :



D'après l'expression du champ créé par une bobine à l'abscisse  $x$  par rapport à son centre, une spire de la bobine (1) crée en  $M$  le champ

$$\vec{B}_{\text{bobine},1}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \left( \frac{x + e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x,$$

et une spire de la bobine (2) crée le champ

$$\vec{B}_{\text{bobine},2}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \left( \frac{x - e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x.$$

D'après le principe de superposition, l'ensemble des deux bobines comportant chacune  $N$  spires crée le champ

$$\vec{B}_{\text{bobine}}(x) = N\vec{B}_{\text{bobine},1}(x) + N\vec{B}_{\text{bobine},2}(x),$$

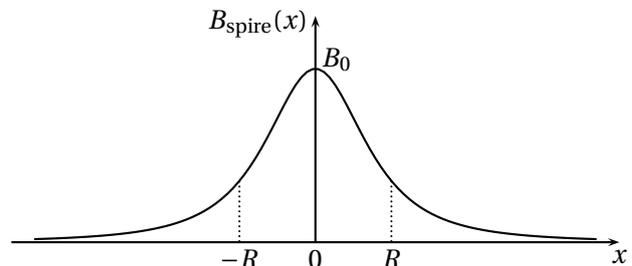
soit

$$\vec{B}_{\text{bobine}}(x) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \left[ \left( 1 + \left( \frac{x + e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( 1 + \left( \frac{x - e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{u}_x$$

3. Une spire centrée en  $x = 0$  crée un champ d'amplitude

$$B_{\text{spire}}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{B_0}{\left[ 1 + \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]^{3/2}}.$$

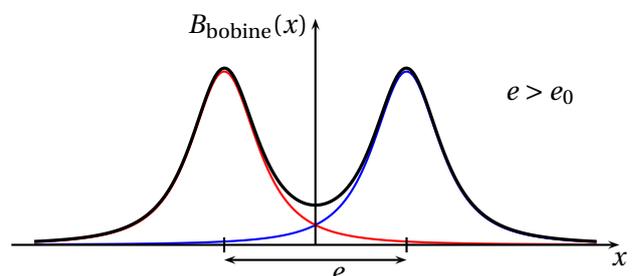
Cette fonction est maximum en  $x = 0$  et s'annule pour  $x \rightarrow \pm\infty$ ; en notant  $B_{\text{spire}}(0) = B_0$  on obtient



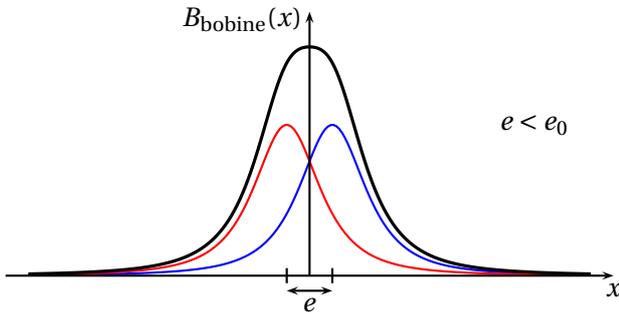
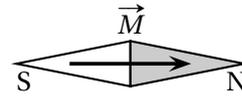
La demi-largeur de la courbe est de l'ordre de  $R$  (on a  $B_1(R) \approx 0,35B_0$ ).

On peut distinguer deux cas pour l'allure du champ total.

**Premier cas :** les deux bobines sont « suffisamment écartées » ( $e > e_0$ ) pour que la somme des deux champs au centre soit plus faible que sa valeur au niveau de chaque bobine. Le champ présente donc un minimum local au centre :



**Second cas :** les deux bobines sont « suffisamment proches » ( $e < e_0$ ) pour que la somme des deux champs au centre soit supérieur à sa valeur au niveau de chaque bobine. Le champ ne présente alors qu'un maximum au centre.



Le cas  $e = e_0$  permet d'avoir un champ « assez uniforme » au centre du dispositif (ce sera détaillé à la question suivante). Un solénoïde permet d'avoir un champ réellement uniforme, mais l'avantage du dispositif présent est de laisser un libre accès à la zone où règne le champ pour réaliser des expériences (comme placer une boussole et observer ses oscillations).

4. Le champ  $B_{\text{spire}}$  présente deux points d'inflexion symétriques par rapport à son centre, aux abscisses  $\pm \frac{e_0}{2}$  :

$$B''_{\text{spire}}(\pm e_0/2) = 0.$$

Lorsque les deux bobines sont séparées de  $e_0$ , les points d'inflexion des deux courbes coïncident : la dérivée seconde du champ totale, somme de deux dérivées secondes nulles, est donc nulle :

$$B''_{\text{bobine}}(0) = 0.$$

Un développement de Taylor du champ au voisinage du centre (pour  $x/R \ll 1$ ) s'écrit

$$B_{\text{bobine}}(x) = B_{\text{bobine}}(0) + \frac{x}{R} B'(0) + \frac{x^2}{2R^2} B''(0) + \frac{x^3}{6R^3} B'''(0) + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}\right)$$

La courbe présentant un extremum au centre, on a  $B'(0) = 0$ .

On vient de montrer que  $B''(0) = 0$ .

La courbe étant symétrique, les termes impaires de son développement sont nuls, et  $B'''(0) = 0$ .

On a donc

$$B_{\text{bobine}}(x) = B_{\text{bobine}}(0) + \mathcal{O}\left(\frac{x^4}{R^4}\right).$$

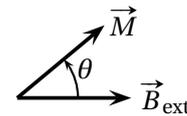
**Quand  $e = e_0$ , le champ au centre du dispositif est uniforme au 4<sup>e</sup> ordre près en  $x/R$ .**

5. L'aiguille de la boussole se comporte comme un dipôle magnétique, dont le moment magnétique est aligné avec l'axe Sud-Nord de la boussole.

**1<sup>re</sup> méthode**

L'énergie magnétostatique d'un dipôle placé dans un champ magnétostatique extérieur est

$$\mathcal{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} = -MB_{\text{ext}} \cos \theta.$$



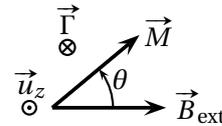
Elle présente un minimum pour  $\theta_{\text{éq}} = 0$ , qui correspond donc à une **position d'équilibre stable**.

**2<sup>e</sup> méthode**

Placé dans un champ  $\vec{B}_{\text{ext}}$ , la boussole est soumise au couple

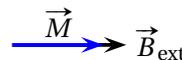
$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = -MB_{\text{ext}} \sin \theta \vec{u}_z.$$

Plaçons-nous dans le cas  $0 \leq \theta \leq \pi$  :



Le couple  $\vec{\Gamma}$  est un couple de rappel (selon  $-\vec{e}_z$ ), qui tend à « rabattre » le moment  $\vec{M}$  dans le même sens que  $\vec{B}_{\text{ext}}$ .

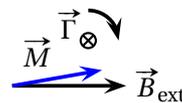
Cas  $\theta_{\text{éq}} = 0$ .



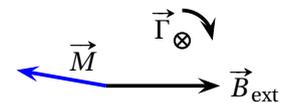
Cas  $\theta_{\text{éq}} = \pi$ .



Petit écart à l'équilibre :



Petit écart à l'équilibre :



Le couple ramène  $\vec{M}$  à sa position  $\theta_{\text{éq}} = 0$  : c'est une position d'équilibre stable.

Le couple écarte  $\vec{M}$  de sa position  $\theta_{\text{éq}} = \pi$  : c'est une position d'équilibre instable.

6. L'aiguille est soumise à :

- son poids ;
- l'action du champ magnétique total  $\vec{B}$  qui se ramène au couple  $\Gamma$ .

La liaison pivot est parfaite (« l'aiguille tourne librement autour de son axe vertical »).

Plaçons-nous dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen, et appliquons le théorème du moment cinétique à l'aiguille, appliqué en son centre  $O$ .

Le poids passant par  $O$ , son moment est nul; on en déduit

$$J\ddot{\theta}\vec{u}_z = \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -MB \sin\theta \vec{u}_z$$

En projection selon  $\vec{u}_z$ , on obtient

$$J\ddot{\theta} = -MB \sin\theta \approx -MB\theta$$

soit, si  $\theta \ll 1$ ,

$$\ddot{\theta} + \frac{MB}{J}\theta = 0.$$

Le mouvement de l'aiguille est décrit par l'équation d'un oscillateur harmonique dont la période est donnée par

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}}.$$

7. Notons  $B_0 = B_{\text{bobines}}(x = 0)$  le champ magnétique créé par les bobines avant inversion du sens du courant.

Lorsque le sens du courant dans les bobines est inversé, il en est de même pour le sens du champ magnétique créé; l'aiguille est alors soumise au champ magnétique total

$$B' = B_H - B_0.$$

Dans le cas où  $B_H > B_0$ , on a  $B'$  de même signe que  $B$ : la position d'équilibre de l'aiguille et la même, et la nouvelle période de ses oscillations est donnée par

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB'}}.$$

À partir des relations

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M(B_H + B_0)}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M(B_H - B_0)}}$$

on déduit

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_H - B_0}{B_H + B_0}}$$

d'où

$$B_H = B_0 \frac{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}.$$

Dans le cas où  $B_H < B_0$ , la composante  $B'$  est opposée à  $B$ : la nouvelle position d'équilibre de l'aiguille change de sens. La nouvelle période de ses oscillations est alors

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M(B_0 - B_H)}}.$$

On en déduit

$$B_H = B_0 \frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}.$$

Expérimentalement, il suffit de regarder si la position d'équilibre stable de l'aiguille est la même ou change de sens lorsque l'on inverse le sens du courant pour savoir dans quel cas on est.

Cette méthode permet de s'affranchir de la détermination de  $J$  et de  $M$  (pas facile expérimentalement). Elle repose de plus sur la mesure d'une période d'oscillation, ce qui est facile à réaliser avec précision. Il faut enfin connaître  $B_0$ , ce qui se fait en connaissant  $N$  et  $R$  (propriétés géométriques des bobines), et l'intensité  $I$ .

## Partie III — Contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault — Centrale MP 2015

### III. 1 Expression approchée du champ magnétique créé par la bobine excitatrice dans la plaque

1. La distribution étant invariante par rotation autour de  $Oz$ , les composantes de  $\vec{B}$  ne dépendent pas de  $\theta$ .

Le plan  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  étant un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, le champ  $\vec{B}$  est contenu dans ce plan: sa composante selon  $\vec{e}_\theta$  est donc nulle.

Le champ magnétique est donc de la forme

$$\vec{B}(M, t) = B_r(r, z, t)\vec{e}_r + B_z(r, z, t)\vec{e}_z.$$

2. En l'absence de plaque, le plan médiateur de la bobine est un plan de symétrie du système; les lignes de champ magnétique sont alors symétriques par rapport à ce plan, ce qui est le cas de la figure 1.

La première simulation (fig 1) correspond à la carte 1.

En présence de la plaque, le champ  $\vec{B}$  crée des courants induits dans la plaque, eux-même source d'un champ magnétique dont l'effet est de s'opposer au champ magnétique de la bobine (loi de Lenz), les courants induits et leurs effets étant d'autant plus importants que la fréquence est élevée.

On voit que le champ dans la bobine est plus faible

pour la deuxième simulation que pour la troisième; et cette dernière correspond donc à la fréquence la plus élevée, soit  $f = 200$  Hz.

La deuxième simulation (fig 2) correspond à la carte 3.

La troisième simulation (fig 3) correspond à la carte 2.

**3.a)** La carte 2 correspondant à la figure 3, on lit la valeur du champ magnétique au niveau de l'axe de la bobine ( $x = R_b/2 = 1,25$  mm ou  $z = l_b/2 = 6$  cm), soit  $B_0 \approx 3$  mT. Cette valeur est confirmée par la carte de champ où l'intensité de  $B$  est donnée en couleur.

**3.b)** Le champ créé par un solénoïde infini possédant  $n = \frac{N}{l_b}$  spires par unité de longueur, parcouru par le courant  $i_0$ , est donnée par

$$\vec{B}(0) = \mu_0 \frac{N}{\ell_b} i_0 \vec{e}_z.$$

On voit sur la figure 3 que les lignes de champ s'évasent entre le centre de la bobine et la plaque : la distance entre la ligne de champ sur l'axe et la suivante est approximativement multipliée par 4; la section du tube de champ, qui admet  $Oz$  comme axe de symétrie, est donc multipliée par  $4^2 = 16$ .

Le flux du champ magnétique étant conservée le long d'un tube de champ, on en déduit

$$B(0) \approx 16B_0,$$

d'où

$$B_0 \approx 0,06 \mu_0 \frac{N}{\ell_b} i_0.$$

Il est bien de la forme proposée avec  $\alpha \approx 0,06$ .

### III. 2 Courants de Foucault

**4.** L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, sous forme intégrale

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = - \iint_{P \in \Sigma} \frac{\partial \vec{B}(P, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P.$$

Le champ dans la plaque est orthoradial, soit comme la distribution est invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$

$$\vec{E}(M, t) = E(r, z, t) \vec{e}_\theta.$$

Choisissons comme contour  $\Gamma$  un cercle de rayon  $r$ , orienté selon  $\vec{e}_\theta$ . On a d'une part

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = 2\pi r E(r, z, t).$$

En considérant le champ magnétique informe dans la zone (A), on a

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\omega B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

$$- \iint_{P \in \Sigma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \omega B_0 \sin(\omega t) \pi r^2.$$

On a donc

$$2\pi r E = \pi r^2 \omega B_0 \sin(\omega t),$$

d'où

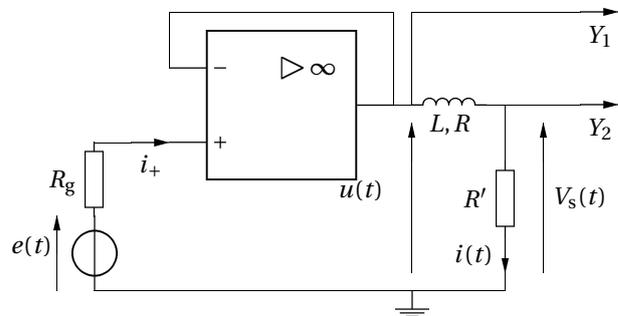
$$\vec{E}(M, t) = \frac{\omega B_0 r}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

**5.** La loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$  donne alors

$$\vec{j} = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

### III. 3 Modification de l'impédance de la bobine excitatrice

**6.** Reprenons le montage :



D'après les propriétés de l'ALI, on a  $i_+ = 0$ ; la tension aux bornes de  $R_g$  est donc nulle, et  $V_+ = e(t)$ .

L'ALI fonctionnant en régime linéaire, on a  $V_+ = V_-$ , d'où

$$u(t) = e(t).$$

► L'ALI est utilisé ici en suiveur.

La bobine et la résistance étant traversée par la même intensité  $i(t)$ , on a

$$V_s(t) = R' i(t) \quad \text{et} \quad u(t) = L \frac{di}{dt} + (R + R') i(t)$$

soit

$$e(t) = \frac{L}{R} \frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{R + R'}{R} V_s(t).$$

On a donc

$$\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{V_s(t)}{\tau} = \frac{R'}{L} e(t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R + R'}.$$

L'acquisition est déclenchée sur la voie  $Y_1$ , c'est-à-dire sur la tension  $e(t)$ ; elle débute donc au sur un échelon  $e(t) = E$ :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{V_s(t)}{\tau} = \frac{R'}{L} E.$$

La solution s'écrit

$$V_{s(t)} = \frac{\tau R'}{L} E (1 - e^{-t/\tau})$$

soit

$$V_s(t) = \frac{R'}{R+R'} E (1 - e^{-t/\tau}).$$

Cette tension tend donc vers

$$V_{s,\infty} = \frac{R'}{R+R'} E.$$

Avec  $E = 5,0 \text{ V}$ , on lit sur l'oscillogramme  $V_{s,\infty} = 4,90 \text{ V}$ .

On a donc

$$R = R' \frac{E - V_{s,\infty}}{V_{s,\infty}}.$$

On calcule  $R = 10,2 \Omega$ .

D'après l'oscillogramme, la constante de temps du circuit vaut

$$\tau = \frac{L}{R+R'} = 78,4 \mu\text{s}.$$

On en déduit

$$L = 40,0 \text{ mH}.$$

7. En l'absence de la plaque, la bobine dissipe une puissance moyenne  $R\langle i^2 \rangle$  par effet Joule en raison de la résistance du fil la constituant.

En présence de la plaque, à cette puissance dissipé il faut **ajouter** la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la plaque du fait des courants induits. La puissance volumique dissipée dans la plaque est proportionnelle à  $\vec{J}^2$ , donc à  $\vec{B}^2$  d'après les questions précédentes, donc à  $\langle i^2 \rangle$  où  $i(t)$  est le courant circulant dans la bobine, créant le champ  $\vec{B}$ . Cette puissance dissipée peut donc s'écrire

$$\langle P_J \rangle = \delta R \langle i^2 \rangle \quad \text{avec} \quad \delta R > 0,$$

ce qui revient à modéliser la bobine par un dipôle dont la partie réelle de l'impédance est

$$R + \delta R > R.$$

La présence de la plaque se traduit donc par une **augmentation de la partie réelle de l'impédance de la bobine**.

8. D'après les documents fournis, la présence de la plaque entraîne une diminution du champ magnétique dans la bobine pour un courant  $i(t)$  la traversant.

### 1<sup>re</sup> méthode

En l'absence de plaque, le flux propre est donné par

$$\Phi_p = Li.$$

En présence de la plaque, la diminution de  $B$  se traduit par une diminution de son flux à travers la bobine; on a donc

$$\Phi'_p < \Phi_p.$$

Le courant  $i(t)$  étant donné, cela revient à  $L' < L$ .

### 2<sup>e</sup> méthode

En l'absence de plaque, l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine vaut

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2.$$

En présence de la plaque, la diminution de  $B$  se traduit par une diminution de l'énergie stockée dans la bobine (l'énergie volumique est  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ ); on a donc

$$\mathcal{E}' < \mathcal{E}.$$

Le courant ( $t$ ) étant donné, cela revient à  $L' < L$ .

La présence de la plaque se traduit par une **diminution de la partie imaginaire de l'impédance de la bobine**.

9. La puissance volumique dissipée par effet Joule dans la plaque est donnée par

$$p_J(r, t) = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{J}^2}{\gamma_0} = \gamma_0 \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) r^2.$$

D'après les cartes 2 et 3, le champ magnétique dans la plaque n'a de valeur significative que sur un rayon  $R_b$  autour de l'axe (rayon de la bobine).

Considérant  $p(r, t)$  uniforme sur un tube de rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$  et de hauteur  $d$ , la puissance totale dissipée par effet Joule dans la plaque vaut

$$\begin{aligned} P_J(t) &= \int_0^{R_b} 2\pi dr p_J(r, t) dr \\ &= \frac{\pi d \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} r^3 dr \\ &= \frac{\pi d \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) \frac{R_b^4}{4}. \end{aligned}$$

On a donc

$$P_J = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8} \sin^2(\omega t).$$

La puissance moyenne dissipée par effet Joule vaut alors

$$\langle P_J \rangle = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{16}.$$

Comme  $B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b}$ , on a

$$\langle P_J \rangle = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2}{16} \alpha^2 \frac{\mu_0^2 N^2 i_0^2}{l_b^2}$$

Le courant étant d'amplitude  $i_0$ , il vaut

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t),$$

et

$$\langle P_J \rangle = \delta R \langle i^2 \rangle = \delta R \frac{i_0^2}{2}.$$

En identifiant avec l'expression de  $\langle P_J \rangle$  établie, on en déduit

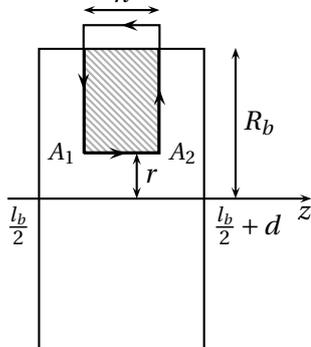
$$\delta R = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 \alpha^2 \mu_0^2 N^2}{8 l_b^2}.$$

**10.a)** Le théorème de Maxwell-Ampère s'écrit, dans le cadre de l'ARQS magnétique

$$\operatorname{rot} \vec{B}' = \mu_0 \vec{j},$$

soit sous forme intégrale

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}_M = \mu_0 \iint_{P \in \Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_P = \mu_0 I_{\text{enlacé}}.$$



Choisissons comme contour  $\Gamma$  un rectangle de largeur  $h$ , dont les côtés parallèles à l'axe  $Oz$  sont l'un à la distance  $r \leq R_b$  de l'axe, l'autre à une distance supérieure à  $R_b$ , où le champ est nul, orienté comme indiqué sur la figure.

La circulation de  $\vec{B}'$  n'est non nulle que sur  $A_1A_2$ , soit

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}_M = hB'(r, z, t).$$

Le courant enlacé vaut

$$\begin{aligned} I_{\text{enlacé}} &= \int_r^{R_b} j(r', t) h dr = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} h \sin(\omega t) \int_r^{R_b} r' dr' \\ &= \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} h \sin(\omega t) \frac{R_b^2 - r^2}{2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega B_0}{4} (R_b^2 - r^2) \sin(\omega t) \vec{e}_z.$$

**10.b)** La densité volumique d'énergie magnétique est donnée par

$$w_m = \frac{B'^2}{2\mu_0}$$

soit

$$w_m(r, t) = \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} (R_b^2 - r^2)^2 \sin^2(\omega t).$$

L'énergie magnétique totale est donnée par

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^{R_b} w_m(r) 2\pi dr dr \\ &= 2\pi d \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} (R_b^2 - r^2)^2 r dr \\ &= 2\pi d \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} (R_b^4 r - 2R_b^2 r^3 + r^5) dr \\ &= 2\pi d \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} \sin^2(\omega t) \left[ \frac{R_b^6}{2} - 2 \frac{R_b^6}{4} + \frac{R_b^6}{6} \right] \end{aligned}$$

$$E_m = \frac{\pi d \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2 R_b^6}{96} \sin^2(\omega t).$$

**10.c)** On a

$$\langle E_m \rangle = \frac{\pi d \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2 R_b^6}{192} = \frac{1}{2} \delta L \langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} \delta L \frac{i_0^2}{2}$$

avec

$$B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N}{l_b} i_0,$$

d'où

$$\frac{\pi d \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 R_b^6}{192} \alpha^2 \frac{\mu_0^2 N^2}{l_b^2} i_0^2 = \frac{1}{2} \delta L \frac{i_0^2}{2}.$$

On en déduit

$$\delta L = \frac{\pi d \mu_0^3 \gamma_0^2 \omega^2 R_b^6 \alpha^2 N^2}{48 l_b^2}.$$

**10.d)** Avec les données numériques, on calcule

$$\delta R = 1,9 \times 10^{-6} \alpha^2 \omega^2.$$

En prenant  $\alpha = 0,06$ , on obtient

$$\delta R = 2,7 \times 10^{-7} f^2.$$

Pour  $f = 50$  Hz, on calcule  $\delta R \approx 0,7$  mΩ.

Pour  $f = 200$  Hz, on calcule  $\delta R \approx 10$  mΩ.

On obtient de même

$$\delta L = 1,4 \times 10^{-9} f^2.$$

Pour  $f = 50$  Hz, on calcule  $\delta L \approx 3$  μH.

Pour  $f = 200$  Hz, on calcule  $\delta L \approx 50$  μH.

À 200 Hz, la présence de la plaque se traduit par une variation de la partie réelle et de la partie imaginaire de la bobine d'environ 0,1 %. C'est faible, mais mesurable.

S'il existe une crevasse à l'intérieur de la plaque, elle va empêcher la formation des courants induits, et on ne mesurera pas de variation de l'impédance de la bobine.

**10.e)** Augmenter la fréquence permet d'augmenter  $\delta L$  et  $\delta R$ , ce qui rend la mesure plus facile.

Cependant, on a supposé les courants répartis dans le volume de la plaque. À fréquence très élevée, ils ne pénétreront pas dans une faible épaisseur  $\delta$  de la plaque (effet de peau<sup>1</sup>), ce qui revient à considérer une profondeur  $d$  plus faible, diminuant les valeurs de  $\delta R$  et  $\delta L$ .

1. Pour les 5/2...

## Partie IV — Dosage du dioxygène dissous dans l'eau par la méthode de Winkler — CCP PSI

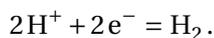
2012

## IV. 1 Diagramme potentiel-pH du manganèse

1. On identifie les espèces sachant que pour un même nombre d'oxydation du manganèse, le domaine du cation métallique est dans les faibles pH, tandis que celui de l'hydroxyde est pour les pH plus élevés.

espèce	Mn	Mn <sup>2+</sup>	Mn(OH) <sub>2</sub>	Mn <sup>3+</sup>	Mn(OH) <sub>3</sub>
n.o. de Mn	0	+II	+II	+III	+III
domaines	III	II	V	I	IV

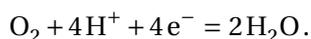
2. L'eau oxydant : couple H<sup>+</sup>/H<sub>2</sub>. La demi-équation rédox est



La frontière a pour équation

$$E = -0,06\text{pH}.$$

L'eau réducteur : couple O<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O. La demi-équation rédox est

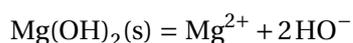


La frontière a pour équation

$$E = 1,23 - 0,06\text{pH}.$$

3. La frontière verticale séparant Mn<sup>2+</sup> et Mn(OH)<sub>2</sub>(s) est à pH = 8,6.

Le produit de solubilité est la constante d'équilibre de la réaction



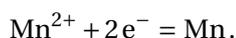
À la frontière, on a [Mn<sup>2+</sup>] = 10<sup>-2</sup> mol·L<sup>-1</sup>. On a [HO<sup>-</sup>] = 10<sup>pH-14</sup>, d'où

$$K_s = 10^{-2} \times 10^{2(8,6-14)} = 1,58 \times 10^{-13}.$$

On en déduit

$$\text{p}K_s = 12,8.$$

On considère la frontière horizontale entre Mn et Mn<sup>2+</sup>. La réaction rédox est



La formule de Nernst s'écrit

$$E = E^\circ + 0,03 \log[\text{Mn}^{2+}].$$

À la frontière, [Mn<sup>2+</sup>] = 10<sup>-2</sup> mol·L<sup>-1</sup>. On lit E = -1,25 V. On en déduit

$$E^\circ(\text{Mn}^{2+}/\text{Mn}) = -1,19 \text{ V}.$$

4. Le domaine du manganèse est sous le domaine de l'eau. En milieu acide, Mn(II) est sous la forme Mn<sup>2+</sup>, espèce soluble. Le domaine de l'eau est donc dans le domaine de corrosion du manganèse; ce dernier réagit donc avec l'eau de façon quantitative pour s'oxyder en Mn(II), réduisant l'eau, ce qui produit un **dégagement de H<sub>2</sub>**.

5. En milieu basique, Mn(II) est sous la forme Mn(OH)<sub>2</sub>(s); l'oxydation du manganèse forme une couche d'hydroxyde solide en protège Mn de toute oxydation ultérieure : on est dans le **domaine de passivation** du manganèse.

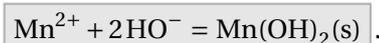
6. Doubler la concentration de travail n'entraîne qu'un très faible déplacement des frontières. Le domaine de Mn étant largement sous celui de l'eau, on peut continuer à utiliser le diagramme fourni.

## IV. 2 Dosage du dioxygène dissous

## Première étape

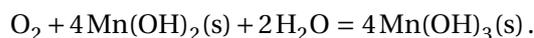
7. On souhaite doser le dioxygène dissous. Il faut boucher la fiole jaugée afin d'éviter tout contact avec le dioxygène de l'air : on ne dosera ainsi que celui présent dans la solution.

8. La réaction du manganèse (II) avec la soude est



Le composé obtenu n'est pas soluble : c'est un précipité d'hydroxyde de manganèse II.

9. Le manganèse (II) va réduire O<sub>2</sub> dissous pour former du manganèse (III) sous forme de Mn(OH)<sub>3</sub>(s) étant en milieu basique, selon la réaction d'oxydoréduction



En milieu acide, les domaines de Mn(II) et de O<sub>2</sub> ne sont pas disjoints : il n'y a pas de réaction. Il faut se placer en milieu basique pour que leurs domaines soient disjoints et que l'on puisse observer une réaction quantitative.

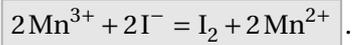
**Deuxième étape**

**10.** La réaction est **cinétiquement lente**.

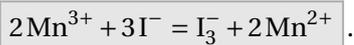
Pour manipuler de l'acide sulfurique concentré, il faut utiliser des gants et des lunettes de protection.

**11.** Après addition de l'acide sulfurique, le Mn (III) se trouve sous la forme  $\text{Mn}^{3+}$ .

**12.** Le manganèse (III) sous forme  $\text{Mn}^{3+}$  réagit avec l'ion iodure selon

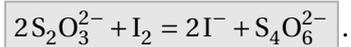


**13.** En tenant compte de l'obtention du complexe  $\text{I}_3^-$ , la réaction à envisager est

**Troisième étape**

**14.** On utilise une **fiolle jaugée** pour mesurer précisément 100 mL.

**15.a)** La réaction dosage entre le thiosulfate et le diiode est



**15.b)** À l'équivalence, on a versé  $CV_{\text{éq}}$  moles de thio-sulfate, qui ont réagi avec  $\frac{CV_{\text{éq}}}{2}$  moles de  $\text{I}_2$ , qui elles-mêmes correspondent à  $CV_{\text{éq}}$  moles de  $\text{Mn}^{3+}$  formées, venant elles-mêmes de la consommation de  $\frac{V_{\text{éq}}}{4}$  moles de  $\text{O}_2$ .

On a donc  $[\text{O}_2] = \frac{CV_{\text{éq}}}{4}$ , soit  $[\text{O}_2] = 5,7 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à 3 % près.

**16.** Pour consommer le dioxygène dissous de la solution à doser, il faut au minimum  $0,57 \times 10^{-3}$  mol de  $\text{MnCl}_2$ . Au départ, on en a  $10 \times 10^{-3}$  mol, ce qui est largement suffisant.

On a versé  $6 \times 10^{-3}$  mol de KI, alors qu'il en faut au minimum  $3 \times \frac{0,57}{2} = 0,86 \text{ mmol} = 0,86 \times 10^{-3}$  mol. La quantité de KI utilisée est donc largement suffisante.

**17.** L'ordre de grandeur des deux dosages est le même. La concentration est plus faible au printemps, ce qui est compatible avec une température de l'eau plus élevée : la solubilité des gaz diminue quand la température augmente.