

## DS n° 7

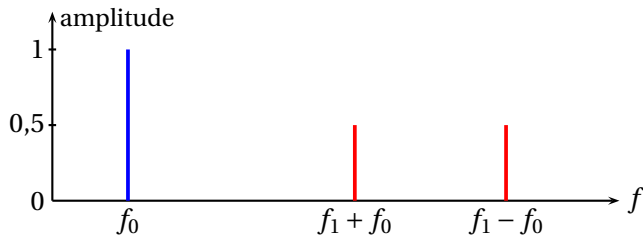
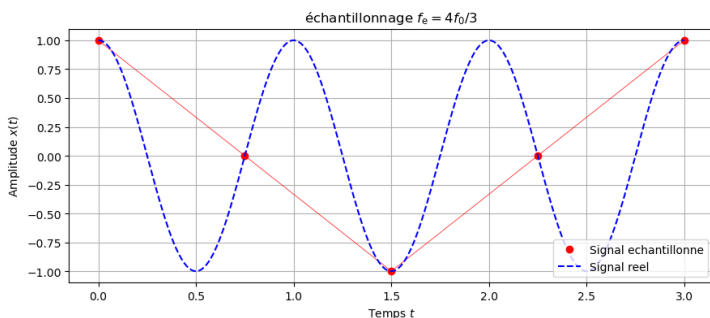
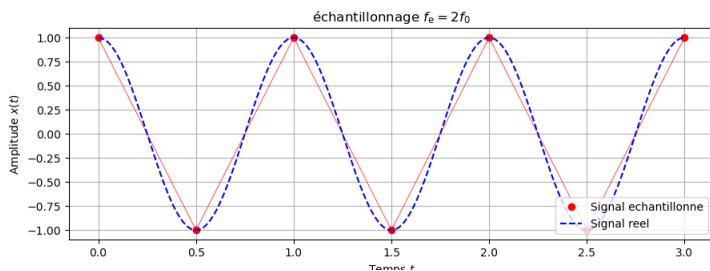
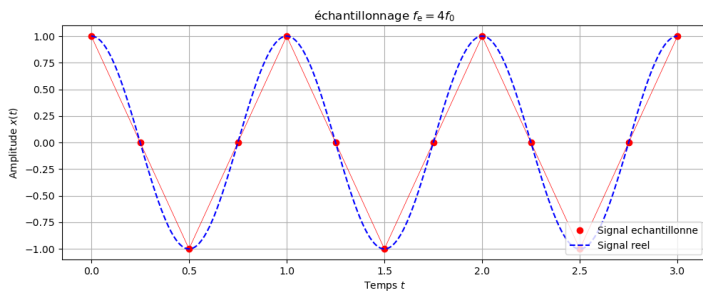
## Sujet Mines — solution

## 1 — Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

□ 1 — On a

$$x_e(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t) \\ = \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_1 - f_0)t] + \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_1 + f_0)t].$$

On en déduit les spectres des deux signaux :

□ 2 — On représente le signal  $x(t)$  et le signal échantillonné :

Dans le cas  $f_e = \frac{4}{3}f_0$ , le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ : il n'a pas la même fréquence.

□ 3 — On développe les produits de cosinus :

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_k}{2} \cos[2\pi(kf_e - f_0)t] + \frac{a_k}{2} \cos[2\pi(kf_e + f_0)t] \right]$$

En se limitant à  $0 \leq k \leq 2$ , on a

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) \\ + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi(f_e - f_0)t] + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi(f_e + f_0)t] \\ + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi(2f_e - f_0)t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi(2f_e + f_0)t]$$

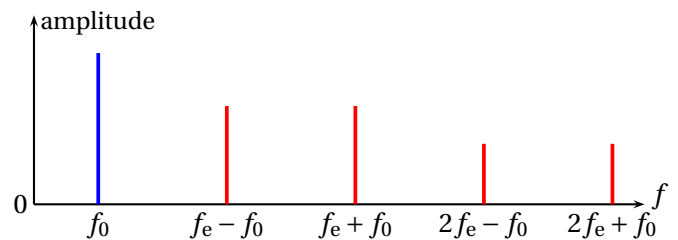
Cas  $f_e = 4f_0$ 

On a alors

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) \\ + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times 3f_0 t] + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times 5f_0 t] \\ + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times 7f_0 t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times 9f_0 t]$$

Le spectre du signal échantillonné comporte :

- un pic d'amplitude  $a_0$  à la fréquence  $f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $3f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $5f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $7f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $9f_0$ .

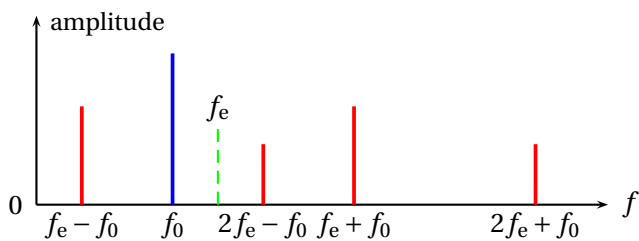
Cas  $f_e = 4f_0/3$ 

On a alors

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) \\ + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times \frac{1}{3}f_0 t] + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times \frac{7}{3}f_0 t] \\ + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times \frac{5}{3}f_0 t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times \frac{11}{3}f_0 t]$$

Le spectre du signal échantillonné comporte :

- un pic d'amplitude  $a_0$  à la fréquence  $f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $\frac{1}{3}f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $\frac{7}{3}f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $\frac{5}{3}f_0$  ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $\frac{11}{3}f_0$ .



Dans le cas  $f_e = \frac{4}{3}f_0$ , les motifs fréquentiels se chevauchent. En considérant l'intervalle  $[0, f_e]$ , on observe un pic à  $f_e - f_0$  et un pic à  $f_0$ ; ils se correspondent par repliement autour de la fréquence située au milieu, soit

$$\frac{f_e - f_0 + f_0}{2} = \frac{f_e}{2}.$$

Le repliement a lieu autour de la fréquence  $f_e/2$ .

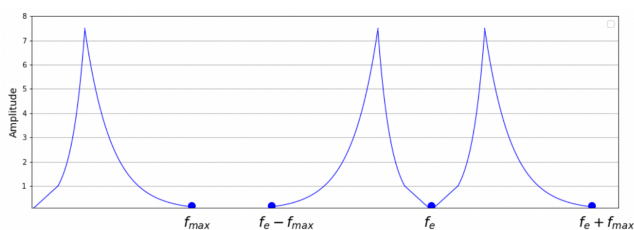
□ 4 — À la question 2, on constate que  $f_e = \frac{4}{3}f_0$  ne permet pas de restituer le signal initial.

À la question 3, on observe que ce problème apparaît quand  $f_e - f_0 < f_0$ , soit  $f_e < 2f_0$ .

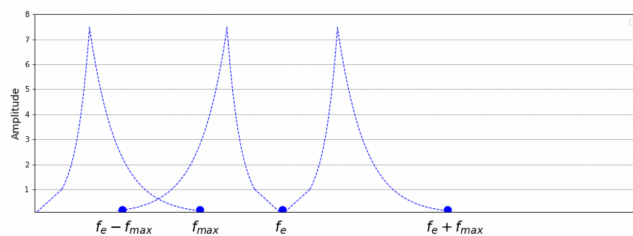
Il faut donc respecter la condition  $f_e - f_0 > f_0$ , soit  $f_e > 2f_0$ .

□ 5 — Si la fréquence maximale  $f_{\max}$  vérifie le critère de Shannon-Nyquist, soit  $f_e > 2f_{\max}$ , toutes les fréquences inférieures à  $f_{\max}$  seront correctement restituées, et l'on n'observera pas de repliement de spectre.

L'allure du spectre sera la suivante :



Si la condition  $f_e > 2f_{\max}$  n'est pas respectée, on aura chevauchement des spectres :



Un signal sonore audible correspond à des fréquences telles que  $f_{\max} = 20 \text{ kHz}$ .

On peut proposer  $f_e = 45 \text{ kHz}$ , qui vérifie la condition de Shannon-Nyquist.

□ 6 — Quand le critère de Shannon-Nyquist est respecté, on peut retrouver le signal initial à l'aide d'un **filtre passe-bas**, de fréquence de coupure  $f_c$  telle que

$$f_{\max} < f_c < f_e - f_{\max}.$$

□ 7 — L'intervalle entre deux échantillons est  $T_e = \frac{1}{f_e}$ . Sur une durée  $\Delta t$ , le nombre d'échantillons est donc

$$N = \frac{\Delta t}{T_e} = f_e \Delta t.$$

La résolution étant de 16 bit, la taille de l'enregistrement en bits est, sachant qu'il y a deux voies séparées

$$2 \times 16 f_e \Delta t.$$

On en déduit la taille en octets :

$$\begin{aligned} \frac{2 \times 16 f_e \Delta t}{8} &= \frac{2 \times 16 \times (45 \times 10^3) \times 75 \times 60}{8} \\ &= 4 \times 75 \times 45 \times 60 \times 10^3 = 300 \times 60 \times 45 \times 10^3 = 18 \times 45 \times 10^6 \\ &= 800 \times 10^6 = 8 \times 10^8 \text{ o} \end{aligned}$$

soit **800 Mo**.

## 2 — Analyse de Fourier et acoustique

□ 8 — L'approximation acoustique porte sur les champs caractérisant l'onde acoustique, repérés par l'indice 1 :

— ce sont des infiniment petits du même ordre :

$$|\mu_1| \ll \mu_0, |p_1| \ll P_0 \text{ et } \|\vec{v}_1\| \ll c;$$

— leurs dérivées spatiale et temporelle sont aussi des infiniment petits du même ordre ;

— leur moyenne temporelle est nulle :  $\langle p_1(M, t) \rangle = 0$  ;  $\langle \mu_1(M, t) \rangle = 0$  et  $\langle \vec{v}_1(M, t) \rangle = \vec{0}$ .

Ordres de grandeurs :

**Suppression acoustique :**

$$|p_1| \approx 10^{-2} \text{ à } 1 \text{ Pa}.$$

**Fluctuation de masse volumique :**

$$|\mu_1| \approx 10^{-7} \text{ à } 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

**Fluctuation de vitesse :**

$$|v_1| \approx 10^{-7} \text{ à } 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

*Ajouter principe de calcul*

Les ondes audibles appartiennent au domaine de fréquence  $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$ .

□ 9 — La définition générale du coefficient de com-

pressibilité isentropique est

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S.$$

Pour l'utiliser dans le cadre de l'approximation acoustique, on l'exprime en fonction de la masse volumique :

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S.$$

On retrouve cette expression en considérant une masse  $m = \mu V$  donnée de fluide :

$$\chi_S = -\frac{1}{1/\mu} \left( \frac{\partial(1/\mu)}{\partial P} \right)_S = -\mu \times \left( -\frac{1}{\mu^2} \right) \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S.$$

On peut écrire pour l'évolution isentropique du fluide

$$\mu(P_0 + p_1) = \mu(P_0) + \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S p_1$$

soit

$$\mu_0 + \mu_1(x, t) = \mu_0 + \mu(x, t) p_1(x, t) \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S.$$

En linéarisant le terme  $\mu p_1 = (\mu_0 + \mu_1) p_1$ , on obtient

$$\mu_1(x, t) = \mu_0 \chi_S p_1(x, t).$$

Il est pertinent d'introduire ce coefficient, car l'évolution des particules de fluide sous l'effet de l'onde acoustique est adiabatique. Le fluide étant parfait, elle est aussi réversible, donc isentropique.

Ce coefficient mesure la variation relative de volume d'une particule de fluide sous l'effet d'une variation de pression.

□ 10 — Écrivons le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide, en négligeant l'effet de la pesanteur :

$$\mu \frac{D \vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} P$$

soit

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P.$$

Soit une tranche de section  $S$  comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Elle contient une masse de fluide

$$\delta m = \mu(x, t) S dx.$$

Sa variation pendant  $dt$  vaut

$$d(\delta m) = \mu(x, t + dt) S dx - \mu(x, t) S dx = \frac{\partial \mu}{\partial t} dt S dx.$$

La masse reçue pendant  $dt$  vaut

$$\begin{aligned} \delta m_{\text{reçu}} &= \mu(x, t) v(x, t) S dt - \mu(x + dx, t) v(x + dx, t) S dt \\ &= -\frac{\partial [\mu(x, t) v(x, t)]}{\partial x} dx S dt \end{aligned}$$

La conservation de la masse s'écrit

$$d(\delta m) = \delta m_{\text{reçu}}$$

soit après simplification

$$\frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [\mu(x, t) v(x, t)]}{\partial x} = 0.$$

L'équation de la dynamique s'écrit, en projection selon  $\hat{e}_x$

$$(\mu_0 + \mu_1(x, t)) \left( \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} + v_1(x, t) \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P(x, t)}{\partial x},$$

soit en se limitant aux termes du premier ordre

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [(\mu_0 + \mu_1(x, t)) v_1(x, t)]}{\partial x} = 0$$

soit en se limitant aux termes du premier ordre

$$\frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Combinons l'équation d'adiabaticité avec la conservation de la masse :

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x}$$

Dérivons l'équation dynamique par rapport à  $x$  :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}.$$

D'après le théorème de Schwarz on a

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x}$$

d'où

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}.$$

La surpression vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}.$$

□ 11 — La relation de la dynamique linéarisée s'écrit en complexe pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants

$$j\omega\mu_0\underline{v}_i(x, t) = jk\underline{p}_i(x, t)$$

soit

$$\mu_0\underline{v}_i(x, t) = \frac{k}{\omega} \underline{p}_{im} e^{j(\omega t - kx)}.$$

En écrivant que l'onde vérifie l'équation de d'Alembert, on obtient la relation de dispersion  $\omega = kc_s$ , d'où

$$\mu_0\underline{v}_i(x, t) = \frac{\underline{p}_{im}}{c_s} e^{j(\omega t - kx)}.$$

On a donc

$$\underline{v}_i(x, t) = \frac{\underline{p}_{im}}{Z_a} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad Z_a = \mu_0 c_s.$$

La grandeur  $Z_a$  est appelée **impédance acoustique**.

L'onde transmise étant une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants, on a de même

$$\underline{v}_t(x, t) = \frac{\underline{p}_t(x, t)}{Z_a}.$$

L'onde réfléchie est une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants; on obtient alors

$$\underline{v}_r(x, t) = -\frac{\underline{p}_r(x, t)}{Z_a}.$$

□ 12 — L'onde de vitesse résultante dans le milieu s'écrit

$$\underline{v}(x, t) = \begin{cases} \underline{v}_i(x, t) + \underline{v}_r(x, t) & x < 0 \\ \underline{v}_t(x, t) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

La continuité de la vitesse en  $x = 0$  s'écrit

$$\underline{v}_i(0, t) + \underline{v}_r(0, t) = \underline{v}_t(0, t)$$

soit

$$\underline{v}_{im} e^{j\omega t} + \underline{v}_{rm} e^{j\omega t} = \underline{v}_{tm} e^{j\omega t}$$

d'où

$$\underline{v}_{im} + \underline{v}_{rm} = \underline{v}_{tm}. \quad (1)$$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, on a  $|\underline{v}_1| \ll c_s$ ; le déplacement de la cloison sur une demi-période est de l'ordre de

$$d \approx \frac{|\underline{v}_1| T}{2} \ll \frac{c_s T}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Le déplacement de la cloison est donc faible devant la longueur d'onde:  $d \ll \lambda$ ; on peut donc le négliger pour étudier les grandeurs ondulatoires.

En notant  $x = 0$  la face d'entrée de la cloison, la face de sortie est en  $x = e$ , d'où le terme  $e^{j(\omega t - ke)}$  pour l'onde transmise. On a donc un coefficient

$$e^{jke} = e^{j2\pi \frac{e}{\lambda}} \approx 1$$

car  $e/\lambda \ll 1$ . on peut donc négliger l'épaisseur de la porte (cette partie n'était pas explicitement demandée).

□ 13 — La cloison est soumise :

— à la force de rappel élastique  $\vec{F} = -Kx\hat{e}_x$ ;

— à la résultante des forces de pressions

$$\vec{F}_P = [p_i(0, t) + p_r(0, t) - p_t(0, t)] S \hat{e}_x.$$

Par continuité de la vitesse, la vitesse de la cloison est égale à  $\underline{v}_t(0, t)$ .

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la cloison s'écrit alors en projection selon  $\hat{e}_x$

$$m \frac{d\underline{v}_t}{dt} = -K\underline{X}(t) + [p_i(0, t) + p_r(0, t) - p_t(0, t)] S$$

On peut écrire

$$\underline{v}_t(0, t) = \underline{v}_{tm} e^{j\omega t} = \frac{d\underline{X}}{dt} = j\omega \underline{X} = j\omega \underline{X}_{tm} e^{j\omega t} \quad (2)$$

Les vitesses s'expriment en fonction des surpressions :

$$\underline{v}_i(0, t) = \frac{\underline{p}_i(0, t)}{Z_a}; \quad \underline{v}_r(0, t) = -\frac{\underline{p}_r(0, t)}{Z_a}; \quad \underline{v}_t(0, t) = \frac{\underline{p}_t(0, t)}{Z_a}$$

On peut donc écrire l'équation (E1) en fonction des amplitudes complexes des surpressions, après simplification par  $e^{j\omega t}$  :

$$\frac{m}{Z_a} \underline{p}_{tm} = -\frac{K}{j\omega Z_a} \underline{p}_{tm} + [\underline{p}_{im} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm}] S$$

Le relation de continuité (1) peut s'écrire après simplification par  $Z_a$

$$\underline{p}_{im} - \underline{p}_{rm} = \underline{p}_{tm}$$

d'où

$$\frac{m}{Z_a} \underline{p}_{tm} = -\frac{K}{j\omega Z_a} \underline{p}_{tm} + 2[\underline{p}_{im} - \underline{p}_{tm}] S.$$

On a donc

$$\underline{p}_{tm} \left[ \frac{j\omega m}{Z_a} + \frac{K}{j\omega Z_a} + 2S \right] = 2S \underline{p}_{im}$$

d'où

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{p}_{tm}}{\underline{p}_{im}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega m}{2SZ_a} + \frac{K}{j\omega 2SZ_a}}$$

On identifie donc

$$\frac{H_0}{1 + j\omega \frac{Q}{\omega_0} - \frac{j}{\omega} Q\omega_0} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega m}{2SZ_a} + \frac{K}{j\omega 2SZ_a}}.$$

On a immédiatement

$$H_0 = 1.$$

Il reste

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{2SZ_a} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{K}{2SZ_a}.$$

Le produit de ces deux expressions donne

$$Q^2 = \frac{Km}{4S^2 Z_a^2}$$

d'où

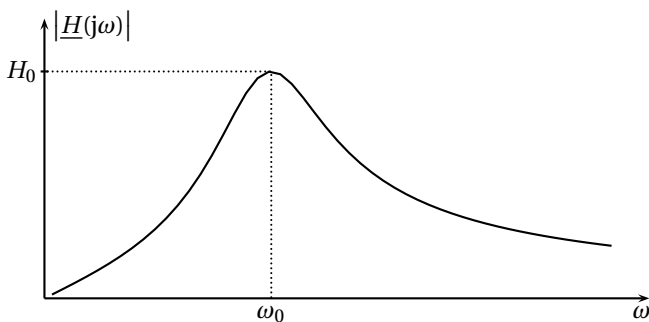
$$Q = \frac{\sqrt{Km}}{2SZ_a}.$$

Le quotient donne  $\omega^2 = K/m$ , d'où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

On trace

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$



La cloison se comporte comme un **filtre passe-bande** pour les ondes sonores.

Pour  $\omega = \omega_0$ , l'onde acoustique est intégralement transmise :  $p_{tm} = p_{im}$  ; il n'y a pas d'onde réfléchi. La cloison vibre en phase avec l'onde incidente et la transmet intégralement.

□ 14 — On peut négliger l'élasticité de la cloison si dans la fonction de transfert

$$\frac{K}{\omega 2SZ_a} \ll \frac{\omega m}{2SZ_a}$$

soit

$$\omega^2 \gg \frac{K}{m},$$

d'où

$$\omega \gg \omega_0.$$

La fonction de transfert s'écrit alors

$$\frac{H(j\omega) \approx \frac{1}{1 + j \frac{\omega m}{2SZ_a}}.$$

La cloison se comporte comme un **filtre passe-bas** de pulsation de coupure

$$\omega_c = \frac{2SZ_a}{m}.$$

On souhaite obtenir

$$I_{dB,t} = I_{dB,i} - 40.$$

Le niveau sonore est défini par

$$I_{dB} = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right),$$

d'où

$$10 \log \left( \frac{I_t}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{I_i}{I_0} \right) - 40$$

soit

$$\log \left( \frac{I_t}{I_i} \right) = -4.$$

L'atténuation cherchée correspond donc à

$$\frac{I_t}{I_i} = 10^{-4}.$$

Pour l'onde incidente, on a

$$I_i = \langle v_i p_i \rangle = \frac{1}{Z_a} \langle p_i^2 \rangle = \frac{p_{im}^2}{Z_a}.$$

On a de même pour l'onde transmise

$$I_t = \frac{p_{tm}^2}{Z_a}.$$

L'atténuation correspond donc à

$$\frac{p_{tm}^2}{p_{im}^2} = 10^{-4}.$$

En utilisant la fonction de transfert, on obtient

$$\frac{1}{1 + \left( \frac{\omega m}{2SZ_a} \right)^2} = 10^{-4},$$

soit

$$10^4 = 1 + \left( \frac{\omega m}{2SZ_a} \right)^2 \approx \left( \frac{\omega m}{2SZ_a} \right)^2.$$

Avec  $m = \mu_c S$  et  $Z_a = \mu_0 c_s$ , on a

$$\frac{2\pi f \mu_c S e}{2S \mu_0 c_s} = 100$$

d'où

$$e = \frac{100 \mu_0 c_s}{\pi f \mu_c}.$$

On calcule

$$e \approx \frac{100 \times 1 \times 340}{3,1 \times 200 \times 1200} = \frac{3,4}{3,1 \times 1,2} \times \frac{10^{-1}}{2} \approx 0,5 \times 10^{-1} \text{ m}$$

soit  $e \approx 5 \text{ cm}$ .

### 3 — Analyse de Fourier et diffusion thermique

□ 15 — Dimension de la constante  $D$  d'après l'équation de la diffusion :

$$[D] = L^2 T^{-1}$$

La loi de Fourier s'écrit ici

$$j_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Comme  $j_{\text{th}}$  est une puissance surfacique, l'équation aux dimensions d'une puissance étant<sup>1</sup>

$$[\mathcal{P}] = ML^2 T^{-3},$$

on a

$$[j_{\text{th}}] = ML T^{-3} \Theta^{-1}.$$

De la relation

$$dU = mc dT$$

on obtient

$$[c] = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}.$$

On cherche la loi

$$D = \mu^\alpha \lambda^\beta c^\gamma.$$

Avec les expressions précédentes, on obtient

$$L^2 T^{-1} = M^\alpha L^{-3\alpha} M^\beta L^\beta T^{-3\beta} \Theta^{-\beta} L^{2\gamma} T^{-2\gamma} \Theta^{-\gamma}$$

Le terme en  $\Theta$  donne

$$\beta + \gamma = 0.$$

Le terme en  $M$  donne

$$\alpha + \beta = 0.$$

Le terme en  $L$  donne

$$2 = -3\alpha + \beta + 2\gamma.$$

Le terme en  $T$  donne

$$-1 = -3\beta - 2\gamma.$$

Avec la première relation, cette dernière s'écrit

$$-1 = -3\beta + 2\beta = -\beta.$$

On a donc

$$\beta = 1 \quad \text{et} \quad \gamma = -1,$$

puis  $\alpha = -1$ . On en déduit

$$D = \frac{\lambda}{\mu c}.$$

1. Avec  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  on obtient pour l'énergie  $[\mathcal{E}] = ML^2 T^{-2}$ .

Le temps caractéristique de diffusion sur une longueur  $L$  dans du fer est

$$\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \mu_f c}{\lambda}.$$

On calcule

$$\tau = \frac{(5 \times 10^{-1})^2 \times 7,9 \times 10^3 \times 4 \times 10^2}{80}$$

soit

$$\tau \approx 1 \times 10^4 \text{ s}.$$

► La diffusion thermique est un phénomène lent quand la distance devient importante.

□ 16 — La loi de Fourier pour la diffusion thermique est

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

Avec  $T(M, t) = T(\theta, t)$ , on obtient

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta.$$

Les lignes de champ de  $\vec{j}_{\text{th}}$  sont des **cercles concentriques, orientés selon  $-\hat{e}_\theta$** .

□ 17 — Le volume élémentaire en coordonnées cylindriques décrit par des variations  $dr$ ,  $d\theta$  et  $dz$  des variables  $r$ ,  $\theta$  et  $r$  est

$$dV = r^2 dr d\theta dz.$$

Comme  $a \ll R$ , on peut assimiler  $a$  à  $dr$  (radialement) et à  $dz$  (selon l'axe), d'où

$$dV = a^2 R d\theta.$$

Le volume  $dV$  a quatre faces en contact avec l'air :

— les deux faces supérieures et inférieures, chacune d'aire  $aR d\theta$  ;

— les faces internes et externes (entourant l'axe), chacune d'aire  $aR d\theta$ .

Finalement l'aire en contact avec l'air est

$$dS_{\text{lat}} = 4aR d\theta.$$

Effectuons un bilan d'énergie pour le volume considéré, entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$dU = \delta Q_{\text{reçu}},$$

soit

$$\mu c dV [T(\theta, t + dt) - T(\theta, t)] = j_{\text{th}}(R, \theta, t) a^2 dt - j_{\text{th}}(R, \theta + d\theta, t) a^2 dt - h [T(\theta, t) - T_e] dS_{\text{lat}} dt,$$

d'où

$$\mu c dV \frac{\partial T}{\partial t} dt = -a^2 \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial \theta} d\theta dt - h(T - T_e) dS_{\text{lat}} dt.$$

Dans l'anneau à  $r \approx R$ , on a

$$j_{\text{th}} = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

En remplaçant  $dV$  et  $dS_{\text{lat}}$  par leurs expressions, on obtient

$$\mu c a^2 R d\theta \frac{\partial T}{\partial t} dt = \frac{\lambda a^2}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} d\theta dt - 4ahR(T - T_e) d\theta dt$$

soit)

$$\mu c a^2 R \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda a^2}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - 4ahR(T - T_e).$$

On obtient bien l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a}(T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

□ 18 — En régime stationnaire, l'équation précédente devient

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{4h}{a}(T - T_e) = 0$$

soit

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{R^2}{\delta^2}(T - T_e) = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}.$$

L'angle  $\theta$  étant sans dimension, on obtient  $[\delta] = [R] = L$  :

**la grandeur  $\delta$  a la dimension d'une longueur.**

La solution générale peut s'écrire sous la forme

$$T(\theta) = T_e + A \exp\left(-\frac{R\theta}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right),$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes.

□ 19 — Le graphe de  $T(\theta)$  représente une décroissance de la température lorsqu'on s'éloigne du point de chauffage, selon une loi paire.

L'équation différentielle n'est pas valable en  $\theta = 0$ , point où l'on chauffe :  $T(\theta)$  n'est pas dérivable à l'origine.

Le graphe de  $j_{\text{th}}(\theta)$  indique bien un flux thermique dans le sens des températures décroissantes. La température est minimale à l'opposé du point de chauffe, le flux thermique y est nul.

On a d'une part d'après le graphe de  $T(\theta)$

$$T(0) = T_1 = T_e + A + B.$$

D'autre part, on a

$$j_{\text{th}}(\pi) = 0 = -\frac{\lambda}{R} \frac{dT}{d\theta}(\theta = \pi),$$

d'où

$$\frac{dT}{d\theta}(\pi) = 0.$$

Comme

$$\frac{dT}{d\theta} = -\frac{AR}{\delta} \exp\left(-\frac{R\theta}{\delta}\right) + \frac{BR}{\delta} \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right)$$

la condition en  $\theta = \pi$  s'écrit

$$-A \exp\left(-\frac{R\pi}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{R\pi}{\delta}\right) = 0.$$

On a donc

$$A = B \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)$$

d'où

$$B \left[ 1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right) \right] = T_1 - T_e.$$

On a donc

$$B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} \quad \text{et} \quad A = (T_1 - T_e) \frac{\exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)}.$$

On a donc

$$T(\theta) = T_e + \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} \left[ \exp\left(\frac{R(2\pi - \theta)}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right) \right]$$

pour  $\theta \in [0, +\pi]$ . On obtient l'expression de  $T(\theta)$  pour  $\theta \in [-\pi, 0]$  (on demandée) en utilisant  $T(-\theta) = T(\theta)$ .

□ 20 — La durée d'établissement de la diffusion thermique sur une longueur  $L = \pi R$  (entre  $\theta = 0$  et le point opposé en  $\theta = \pi$ ) est

$$\tau \approx \frac{L^2}{D} = \frac{\pi^2 R^2 \mu c}{\lambda}$$

soit

$$\tau \approx \frac{10 \times (0,15)^2 \times 8 \times 10^3 \times 4 \times 10^2}{80} \approx 10^3 \times 4 \times 10^2 \times (1,5)^2$$

ce qui donne

$$\tau \approx 9 \times 10^3 \text{ s}.$$

On retrouve bien une durée de l'ordre de 2 heures.

□ 21 — En l'absence de convection (aucune fuite thermique par la surface latérale), la température vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Écrivons que  $T_n(\theta, t) = f_n(\theta)g_n(t)$  vérifie cette équation :

$$\frac{\lambda}{R^2} f_n''(\theta)g_n(t) = \mu c f_n(\theta)g_n'(t),$$

soit

$$\frac{g_n'(t)}{g_n(t)} = \frac{\lambda}{\mu c R^2} \frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)}.$$

Le premier terme ne dépend pas de  $\theta$  et le second ne dépend pas de  $t$ ; ces deux termes sont donc égaux à une constante que l'on note  $\alpha_n$  :

$$\frac{g_n'(t)}{g_n(t)} = \alpha_n \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\mu c R^2} \frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)} = \alpha_n.$$

On a donc d'une part

$$g_n'(t) = \alpha_n g_n(t).$$

La solution est de la forme

$$g_n(t) = g_{n0} e^{\alpha_n t}.$$

La divergence de la température implique  $\alpha_n < 0$ ; on note

$$\alpha_n = -\frac{1}{\tau_n}$$

On a alors

$$f_n''(\theta) + \frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n} f_n(\theta) = 0.$$

La solution générale est de la forme

$$f_n(\theta) = F_n \cos\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right) + G_n \sin\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right).$$

La fonction devant être paire en  $\theta$ , on a  $G_n = 0$  et

$$f_n(\theta) = F_n \cos\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right).$$

En notant  $B_n = g_{n0} F_n$ , on a

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right) e^{-t/\tau_n},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$T_n(\theta) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n} \quad \text{avec} \quad \tau_n = \frac{\mu c}{\lambda} d_n^2 = \frac{d_n^2}{D}.$$

La constante  $\tau_n$  est homogène à un temps :  $[\tau_n] = \text{T}$ .

La constante  $d_n$  est homogène à une longueur :  $[d_n] = \text{L}$ .

□ 22 — On a

$$\langle T_0(\theta) \rangle = T_m.$$

**La constante  $T_m$  représente la moyenne spatiale de la température dans l'anneau.**

On remarque que  $T(\theta, t) = T_m$  est une solution de l'équation (3).

La solution doit avoir  $2\pi$  comme période angulaire et être paire en  $\theta$ . On a trouvé une famille de solutions  $T_n(\theta, t)$  admettant  $2\pi$  comme période angulaire, et fonction paire de  $\theta$ . L'équation différentielle étant linéaire, la solution peut s'écrire comme somme des solutions de cette famille, en prenant en compte la solution particulière constante, soit

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t).$$

La condition initiale s'écrit alors en  $t = 0$ , en remplaçant les  $T_n(\theta, 0)$  par leur expression déterminée précédemment :

$$T(\theta, 0) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta).$$

Cette relation est vraie pour tout  $\theta$ . Les fonctions  $\cos(n\theta)$  étant indépendantes entre elles, on peut identifier terme à terme, d'où

$$B_n = b_n \quad \text{et} \quad d_n = \frac{n}{R}.$$

De

$$\tau_n = \frac{\mu c}{\lambda} d_n^2$$

on déduit

$$\tau_n = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}.$$

□ 23 — On remarque que  $\tau_n \propto \frac{1}{n^2}$  : les harmoniques de rang  $n$  décroissent avec une constante de temps d'autant plus petite que  $n$  est grand (de façon quadratique).

Rapidement, les amplitudes des harmoniques de rang  $n > 1$  deviennent très faibles devant celle du fondamental, c'est-à-dire

$$e^{-t/\tau_n} \ll e^{-t/\tau_1} \quad \text{pour } n > 1.$$

On a alors

$$T(\theta, t) \approx T_m + B_1 \cos(\theta).$$



## Partie chimie

### 4 — Piles zinc-air

**Q1.** D'après la réaction de fonctionnement, le zinc est oxydé en ZnO.

**L'anode est constituée du revêtement A<sub>1</sub>, au contact avec la poudre de zinc.**

**La cathode est constituée du revêtement A<sub>2</sub>, où se déroule la réduction de O<sub>2</sub> qui entre par l'orifice C.**

Compte tenu des potentiels standard<sup>2</sup> :

— **La cathode A<sub>2</sub> est le pôle ⊕.**

— **L'anode A<sub>1</sub> est le pôle ⊖.**

**Q2.** La f.é.m. standard se calcule avec les potentiels standard<sup>3</sup> :

$$e^\circ = E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E^\circ(\text{ZnO}/\text{Zn}) = 1,23 - (-0,43)$$

soit

$$e^\circ = 1,66 \text{ V}.$$

**Q3.** D'après l'équation de fonctionnement de la pile



on peut calculer d'une part

$$\begin{aligned} \Delta_r H^\circ &= 2\Delta_f H^\circ(\text{ZnO}) - 2\Delta_f H^\circ(\text{Zn}) - \Delta_f H^\circ(\text{O}_2) \\ &= -700 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\Delta_r S^\circ = 2S^\circ(\text{ZnO}) - 2S^\circ(\text{Zn}) - S^\circ(\text{O}_2) = 80 - 80 - 200$$

soit

$$\Delta_r S^\circ = -200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On calcule

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ = -700 - 300 \times (-0,2)$$

soit

$$\Delta_r G^\circ = -640 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On a

$$\Delta_r G^\circ + RT \ln K^\circ = 0$$

d'où

$$K^\circ = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}} = \exp\left(\frac{640 \times 10^3}{8 \times 300}\right) = \exp\left(\frac{6,4}{2,4} 10^2\right) \approx e^{270}.$$

On peut calculer

$$\log K^\circ = \frac{\ln K^\circ}{\ln(10)} \approx \frac{270}{2,3} \approx 120$$

d'où

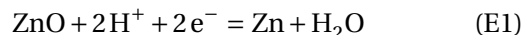
$$K^\circ \approx 10^{120}$$

On a  $K^\circ \gg 10^3$ , compatible avec une réaction totale.

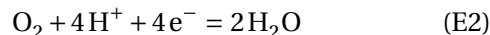
2. On peut aussi raisonner sur le sens du courant : les électrons, libérés par l'anode, vont de A<sub>1</sub> vers A<sub>2</sub> ; le courant électrique va donc de A<sub>2</sub> vers A<sub>1</sub>. Comme il circule de la borne positive à la borne négative, on peut reprendre.

3. Sans le terme logarithmique de la loi de Nernst.

**Q4.** Les équations électrochimiques des couples en jeu sont



et



On a alors

$$\Delta_r \tilde{G}_{(\text{E1})}^\circ = -2\mathcal{F}E^\circ(\text{ZnO}/\text{Zn})$$

et

$$\Delta_r \tilde{G}_{(\text{E2})}^\circ = -4\mathcal{F}E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}).$$

La réaction de fonctionnement de la pile



peut s'écrire

$$(\text{R}) = (\text{E2}) - 2(\text{E1})$$

On a donc pour la réaction de fonctionnement

$$\begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= \Delta_r \tilde{G}_{(\text{E2})}^\circ - 2\Delta_r \tilde{G}_{(\text{E1})}^\circ \\ &= -4\mathcal{F}E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) + 4\mathcal{F}E^\circ(\text{ZnO}/\text{Zn}) \end{aligned}$$

soit d'après la question 2

$$\Delta_r G^\circ = -4\mathcal{F}e^\circ.$$

On en déduit

$$e^\circ = -\frac{\Delta_r G^\circ}{4\mathcal{F}} = -\frac{640 \times 10^3}{4 \times 10^5} = \frac{6,4}{4}$$

soit  $e^\circ = 1,6 \text{ V}$ .

Résultat tout à fait comparable à la valeur trouvée à la question 1.

**Q5.** La quantité de zinc (réactif limitant car O<sub>2</sub> arrive en continu à l'électrode) initialement présente est

$$n(\text{Zn}) = \frac{m(\text{Zn})}{M(\text{Zn})} = \frac{0,65}{65} = 10^{-2} \text{ mol}.$$

Compte tenu de la stœchiométrie de la réaction de fonctionnement et du nombre d'électrons échangés, on a

$$\frac{n(\text{Zn})}{2} = \frac{n(\text{e}^-)}{4}.$$

La charge échangée pendant le fonctionnement de la pile jusqu'à disparition du zinc vaut donc

$$Q = \mathcal{F}n(\text{e}^-) = 2\mathcal{F}n(\text{Zn}).$$

La durée de fonctionnement pour une intensité  $I$  est donnée par

$$Q = I\tau$$

d'où

$$\tau = \frac{2n(\text{Zn})\mathcal{F}}{I} = \frac{2 \times 10^{-2} \times 10^5}{0,8 \times 10^{-3}} = \frac{1}{4} \times 10^{-2+5+4}$$

soit

$$\tau \approx 2,5 \times 10^6 \text{ s}.$$

Cette durée correspond à environ 1 mois (30 jours).

**Q6.** L'énergie fournie est donnée par

$$W = U^\circ I\tau$$

où  $U$  est la tension de fonctionnement, soit

$$W = 1,5 \times 8 \times 10^{-4} \times 2,5 \times 10^6 = 3 \times 10^3 \text{ J}.$$

La pile fournie une énergie  $W = 3 \text{ kJ}$ .

## 5 — Énergie du sportif

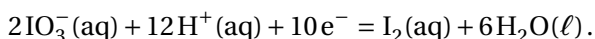
**Q7.** On sait que n.o.(O) = -II dans  $\text{IO}_3^-$ .

espèce	$\text{I}_2$	$\text{I}^-$	$\text{IO}_3^-$
n.o. (I)	0	-I	+V

**Q8.** On place les espèce par nombre d'oxydation croissant du bas vers le haut du diagramme, d'où

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
$\text{I}^-$	$\text{I}_2$	$\text{IO}_3^-$

**Q9.** La droite 2 sépare les domaines de  $\text{IO}_3^-$  et  $\text{I}_2$ . Réaction électrochimique :



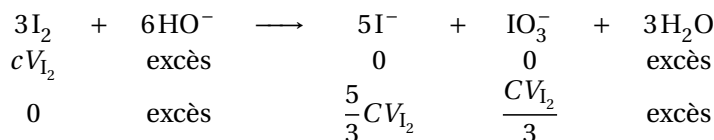
La loi de Nernst s'écrit

$$\begin{aligned} E &= E^\circ(\text{IO}_3^-/\text{I}_2) + \frac{0,06}{10} \ln \frac{[\text{IO}_3^-]^2 [\text{H}^+]^{12}}{[\text{I}_2] (c^\circ)^{13}} \\ &= E^\circ(\text{IO}_3^-/\text{I}_2) - \frac{0,06 \times 12}{10} \text{pH} + 0,006 \log \frac{[\text{IO}_3^-]^2}{[\text{I}_2]} \\ &= E^\circ(\text{IO}_3^-/\text{I}_2) - 0,072 \text{pH} + 0,006 \log \frac{[\text{IO}_3^-]^2}{[\text{I}_2]} \end{aligned}$$

**Q11.** Notons  $V_2$  le volume de la solution de diiode à la concentration  $C$ , et  $n_g$  la quantité de glucose dans la solution S1.

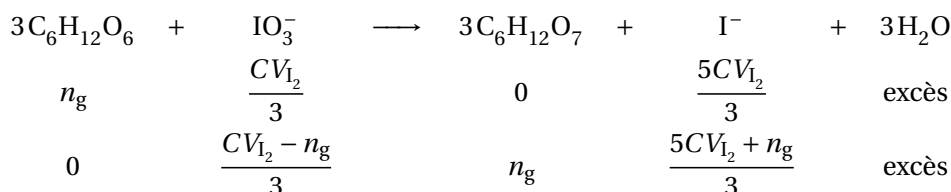
**1<sup>re</sup> étape**

Dismutation du diiode. On dresse le tableau d'avancement en indiquant la composition initiale et la composition en fin de réaction.



**2<sup>e</sup> étape**

Dosage.

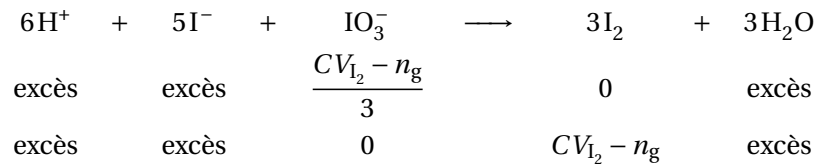


4. Obtenue en éliminant les électrons du bilan.

### 3<sup>e</sup> étape

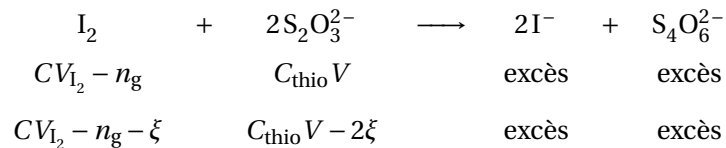
On reforme du diiode en milieu acide.

Compte tenu du résultat de l'étape précédente,  $I^-$  est en excès par rapport à  $IO_3^-$  dans cette réaction.



### 4<sup>e</sup> étape

Dosage du  $I_2$  par le thiosulfate. Le volume équivalent  $V_{eq}$  correspond à la disparition du  $I_2$ .



À l'équivalence, on a  $\frac{thio V_{eq}}{2} = CV_{I_2} - n_g$ .

La quantité de glucose dans la solution (S1) vaut donc

$$n_g = CV_{I_2} - \frac{C_{thio} V_{eq}}{2}.$$

La concentration molaire de glucose dans la solution (S1) de volume  $V_G$  vaut

$$[C_6H_{12}O_6]_{(S1)} = \frac{n_g}{V_G}.$$

D'après la dilution effectuée, la concentration molaire de glucose dans le jus d'orange vaut donc

$$[C_6H_{12}O_6] = 5[C_6H_{12}O_6]_{(S1)} = \frac{5}{V_G} \left( CV_{I_2} - \frac{C_{thio} V_{eq}}{2} \right).$$

La concentration massique vaut donc  $C_{m,gl} = M(\text{glucose})[C_6H_{12}O_6]$  soit

$$C_{m,gl} = \frac{5M(\text{glucose})}{V_G} \left( CV_{I_2} - \frac{C_{thio} V_{eq}}{2} \right).$$

On calcule

$$C_{m,gl} = \frac{5 \times 180}{20} \left( 5 \times 10^{-2} \times 20 - \frac{0,1 \times 8,8}{2} \right) = 45 \times (1 - 0,44)$$

soit  $C_{m,gl} = 25,2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ .