

## Étude de quelques phénomènes naturels et environnementaux

## Partie I — Séismes

## 1 — Étude du sismographe

**Q1. Système :** masse  $m$ .

**Référentiel :** terrestre, galiléen.

**Forces :**

$$\text{poids } m\vec{g} = -mg\vec{e}_z,$$

$$\text{frottement } \vec{F}_a = -\lambda \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z,$$

force élastique du ressort

$$\vec{T} = -k(\overline{HM} - \overline{H_0M_0})$$

où  $\overline{H_0M_0} = -\ell_0 \vec{e}_z$  est relatif au ressort au repos. Avec  $\overline{HM} = (z(t) - h) \vec{e}_z$ , on a donc  $\vec{T} = -k(z(t) - h + \ell_0) \vec{e}_z$ .

La position de la masse étant  $\overline{OM} = (z_s(t) + z(t)) \vec{e}_z$ , son accélération est  $\vec{a} = \left( \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) \vec{e}_z$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse s'écrit alors, en projection selon  $\vec{e}_z$  :

$$m \left( \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = -mg - \lambda \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - h + \ell_0) \quad (1)$$

Lorsque la masse est à l'équilibre en l'absence de séisme (donc pour  $z_s = 0$ ), l'équation précédente devient

$$0 = -mg - k(z_{\text{éq}} - h + \ell_0). \quad (2)$$

On a donc

$$z_{\text{éq}} = h - \ell_0 - \frac{mg}{k}.$$

En soustrayant l'équation (2) à l'équation (1) on obtient

$$m \left( \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = -\lambda \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - z_{\text{éq}}),$$

soit en posant  $u = z - z_{\text{éq}}$

$$m \left( \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \right) = -\lambda \frac{du(t)}{dt} - ku(t).$$

On en déduit l'équation différentielle sous forme canonique

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{du(t)}{dt} + \frac{k}{m} u(t) = -\frac{d^2 z_s(t)}{dt^2}. \quad (3)$$

**Q2.** Écrivons l'équation (3) sous forme complexe :

$$-\omega^2 \underline{u}(t) + j\omega \frac{\lambda}{m} \underline{u}(t) + \frac{k}{m} \underline{u}(t) = \omega^2 \underline{z}_s(t)$$

d'où la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + j\omega \frac{\lambda}{m} + \frac{k}{m}}$$

soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{m}{k} \omega^2}{1 + j\omega \frac{\lambda}{k} - \frac{m}{k} \omega^2}.$$

Il s'agit d'un **filtre passe-haut du deuxième ordre**.

**Q3.** Avec  $\underline{u}(t) = \underline{H}(j\omega) \underline{z}_c(t)$ , les amplitudes  $U$  de  $\underline{u}(t)$  et  $Z_0$  de  $\underline{z}(t)$  sont reliées par  $U = |\underline{H}| Z_0$ , soit

$$U = \frac{\frac{m}{k} \omega^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{\lambda}{k}\right)^2}} Z_0.$$

**Q4.** On a  $U \approx Z_0$  si le dénominateur de la fraction précédente est égal au numérateur  $\frac{m}{k} \omega^2$ , soit pour

$$1 \ll \frac{m}{k} \omega^2 \quad \text{et} \quad \omega \frac{\lambda}{k} \ll \frac{m}{k} \omega^2.$$

On doit donc avoir d'une part  $\omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}}$ , soit en terme de fréquence

$$f \gg \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

D'autre part, il faut  $\omega \gg \frac{\lambda}{m}$ , soit

$$f \gg \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{m}.$$

On doit donc avoir un ressort de faible raideur, et un système faiblement amorti, ce qui correspond à une **suspension souple**.

Avec les deux conditions précédentes, la fonction de transfert s'écrit  $\underline{H}(j\omega) \approx -1$  : **la masse vibre en opposition de phase avec le sol**.

**Q5.** La fonction de transfert peut s'écrire

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{-1 + \frac{k}{m\omega^2} + j\frac{\lambda}{m\omega}}.$$

Le gain vaut donc

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m\omega^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{m^2\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} X - 1\right)^2 + \frac{\lambda^2}{m^2} X}}$$

en posant  $X = 1/\omega^2$ .

On observe un phénomène de résonance si le dénominateur passe par un minimum, c'est-à-dire si

$$F(X) = \left(\frac{k}{m}X - 1\right)^2 + \frac{\lambda^2}{m^2}X = \frac{k^2}{m^2}X^2 + \left(\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{2k}{m}\right)X + 1$$

présente un minimum. Il faut donc

$$F'(X) = 0 = \frac{2k^2}{m}X + \left(\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{2k}{m}\right)$$

soit

$$X = \frac{m}{2k^2} \left(\frac{2k}{m} - \frac{\lambda^2}{m^2}\right) = \frac{m}{k} - \frac{\lambda^2}{2k^2}$$

Comme  $X > 0$ , cette condition n'est possible que si

$$\frac{m}{k} - \frac{\lambda^2}{2k^2} > 0.$$

On n'observera donc pas de résonance si  $\frac{m}{k} < \frac{\lambda^2}{2k^2}$ , soit

$$\frac{\lambda}{\sqrt{km}} > \sqrt{2}.$$

## 2 — Spectre d'un signal numérique

### Expérience 1

**Q6.** On mesure 3 périodes pour 8 divisions, soit  $3T = 8 \times 250 \mu\text{s} = 2,0 \text{ ms}$ , d'où

$$T = 0,67 \text{ ms}.$$

La fréquence  $f = 1/T$  vaut donc  $f = 1,5 \text{ kHz}$ .

La durée totale de l'échantillon est  $T_{\text{tot}} = 10 \times 250 \mu\text{s}$  avec

$$T_{\text{tot}} = NT_e = \frac{N}{f_{\text{éch}}}, \text{ d'où}$$

$$f_{\text{éch}} = 1 \text{ MHz}.$$

Le curseur 2 indique  $f_{\text{max}} = 496 \text{ kHz}$ ; selon le critère de Shannon, on ne peut restituer que des fréquences allant jusqu'à  $f_{\text{éch}}/2 = 500 \text{ kHz}$ . Les valeurs affichées sont bien compatibles avec ce critère.

**Q7.** On veut « zoomer » sur l'axe des fréquences en abscisses qui s'étend sur  $[0, f_{\text{max}}] = [0, f_{\text{éch}}/2]$ . Il faut donc diminuer la fréquence d'échantillonnage  $f_{\text{éch}}$ . En notant  $BT$  le calibre de la base de temps, comme

$$f_{\text{éch}} = \frac{N}{T_{\text{tot}}} = \frac{2480}{10 \times BT}$$

on en déduit qu'il faut **augmenter le calibre de la base de temps**.

C'est compatible avec l'oscillogramme de la figure 4, où la base de temps indiquée est de 25 ms, 100 fois plus élevée qu'à la mesure précédente. Cela revient bien à dilater d'un facteur 100 l'échelle des fréquences.

La plus grande fréquence du spectre doit donc être 100 fois plus faible; on a bien  $f_{\text{max}} = 4,960 \text{ kHz} = \frac{496 \text{ kHz}}{100}$ .

► Le curseur X1 indique une fréquence  $f = 1,5 \text{ kHz}$ , compatible avec la valeur déterminée à partir de l'oscillogramme à la question 6.

**Q8.** Sur l'oscillogramme de la figure 5, on détermine à partir de la base de temps de 100 ms la fréquence d'échantillonnage

$$f_{\text{éch}} = \frac{2480}{10 \times 100 \text{ ms}} = 2,5 \text{ kHz}.$$

On obtient  $f_{\text{max}} = f_{\text{éch}}/2 = 1,25 \text{ kHz}$  compatible avec la valeur 1,24 kHz indiquée par le curseur 2.

La fréquence du signal étant  $f = 1,5 \text{ kHz} > f_{\text{max}}$ , le critère de Shannon n'est plus respecté. On observe un phénomène de repliement de spectre, avec l'apparition de la fréquence

$$f_{\text{éch}} - f = 2,5 - 1 = 1,5 \text{ kHz}.$$

### Expérience 2

**Q9.** L'entrée inverseuse est au potentiel  $V_- = V_+ = 0$ . Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels à cette entrée :

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_s}{R_0} = 0$$

d'où

$$V_s = -R_0 \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right).$$

Ce montage agit comme un « sommateur pondéré, inverseur ».

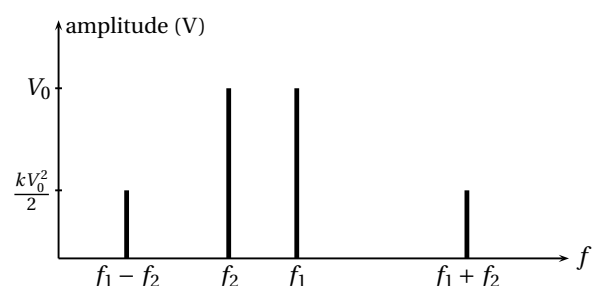
**Q10.** Avec  $R_0 = R_1 = R_2 = R_3$ , on a

$$V_s(t) = -(V_1(t) + V_2(t) + V_m(t)),$$

avec  $V_m(t) = kV_1(t)V_2(t)$ . On en déduit, en supposant  $f_1 > f_2$

$$\begin{aligned} V_s(t) &= -(V_0 \cos(2\pi f_1 t) + V_0 \cos(2\pi f_2 t) \\ &\quad + kV_0^2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)) \\ &= -V_0 \cos(2\pi f_1 t) - V_0 \cos(2\pi f_2 t) - \frac{kV_0^2}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) \\ &\quad - \frac{kV_0^2}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) \end{aligned}$$

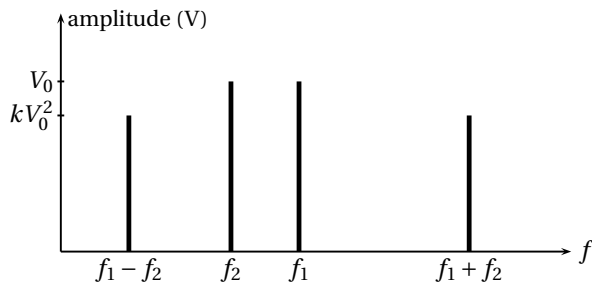
On obtient le spectre en amplitude de  $V_s(t)$  :



**Q11.** Lorsque  $R_0 = R_1 = R_2 = 2R_3$ , on a

$$V_s = -(V_1(t) + V_2(t) + 2V_m(t)).$$

L'amplitude des composantes de fréquences  $f_1 + f_2$  et  $f_1 - f_2$  est multipliée par deux.



**Q12.** Le curseur X1 donne une fréquence 300 Hz, le curseur X2 une fréquence 900 Hz.

L'amplitude du curseur X1 est égale à l'amplitude de la raie de fréquence la plus élevée, tandis que l'amplitude du curseur X2 est égale à celle de la fréquence voisine.

On en déduit que les deux fréquences extrêmes correspondent à  $f_1 - f_2$  et  $f_1 + f_2$ .

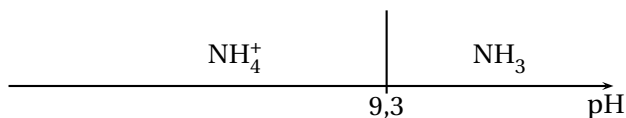
On identifie donc  $f_1 - f_2 = 300$  Hz.

En considérant  $f_1 > f_2$ , le curseur X2 correspond à la fréquence la plus élevée, soit  $f_1 = 900$  Hz.

On en déduit  $f_2 = 600$  Hz.

## Partie II — Eutrophisation

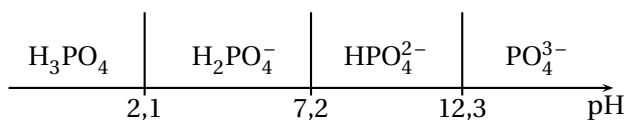
**Q13.** On a d'une part le couple acide-base  $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$ ; traçons le diagramme de prédominance des espèces en jeu :



À  $\text{pH} = 9,3$ , on a  $[\text{NH}_4^+] = [\text{NH}_3]$ . Comme  $[\text{NH}_4^+] + [\text{NH}_3] = C_N = 16 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , on en déduit  $[\text{NH}_4^+] = [\text{NH}_3] = C_N/2$ , soit

$$[\text{NH}_4^+] = [\text{NH}_3] = 8 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

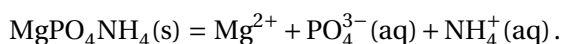
Traçons le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques du phosphore :



À  $\text{pH} = 9,3$ , on est dans le domaine de prédominance de  $\text{HPO}_4^{2-}$ , soit  $[\text{HPO}_4^{2-}] = C_P$ . On a donc

$$[\text{HPO}_4^{2-}] = 5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

**Q14.** L'équilibre de dissolution est



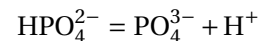
On observe la formation du précipité si  $Q \geq K_s$ , soit si

$$[\text{Mg}^{2+}][\text{PO}_4^{3-}][\text{NH}_4^+] \geq K_s.$$

La concentration minimale de  $\text{Mg}^{2+}$  pour laquelle le précipité de struvite apparaît est donc

$$[\text{Mg}^{2+}]_{\min} = \frac{K_s}{[\text{PO}_4^{3-}][\text{NH}_4^]}.$$

D'après



on a

$$K_{a3} = \frac{[\text{PO}_4^{3-}][\text{H}^+]}{[\text{HPO}_4^{2-}]}$$

ce qui permet d'exprimer  $[\text{PO}_4^{3-}]$  dans l'expression trouvée, soit

$$[\text{Mg}^{2+}]_{\min} = \frac{K_s[\text{H}^+]}{K_{a3}[\text{HPO}_4^{2-}][\text{NH}_4^]}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} [\text{Mg}^{2+}]_{\min} &= \frac{10^{-11} \times 10^{-9,3}}{10^{-12,3} \times 5 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{1}{40} 10^{-11-9,3+12,3+3+3} = \frac{1}{40} 10^{-3} \end{aligned}$$

soit

$$[\text{Mg}^{2+}]_{\min} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

**Q15.** La masse de chlorure de magnésium correspondante est

$$m = nM = [\text{Mg}^{2+}]_{\min} V M(\text{MgCl}_2) = 2,5 \times 10^{-4} \times 10^3 \times 95$$

soit

$$m = 24 \text{ g}.$$

## Partie III — Fonte de la banquise

**Q16.** Si  $v$  est le volume émergé, le volume immergé de l'iceberg est

$$v_{\text{im}} = V - v.$$

La poussée d'Archimède est opposée au poids d'un volume  $v_{\text{im}}$  d'eau salée.

La masse de l'iceberg est

$$m_{\text{ice}} = \rho_{\text{gl}} V = d_{\text{gl}} \rho_{\text{eau}} V$$

où  $\rho_{\text{eau}}$  est la masse volumique de l'eau douce liquide.

La masse du fluide de remplacement est

$$m_{\text{fl}} = \rho_{\text{oc}} v_{\text{im}} = d_{\text{oc}} \rho_{\text{eau}} (V - v).$$

À l'équilibre de l'iceberg, on a

$$m_{\text{ice}} g = m_{\text{fl}} g$$

soit

$$d_{\text{gl}} \rho_{\text{eau}} V = d_{\text{oc}} \rho_{\text{eau}} (V - v).$$

On a donc

$$d_{\text{gl}} = d_{\text{oc}} \left(1 - \frac{v}{V}\right)$$

d'où

$$\frac{v}{V} = 1 - \frac{d_{\text{gl}}}{d_{\text{oc}}}.$$

**Q17.** Si la banquise était constituée d'eau océanique gelée, sa fonte ne modifierait pas le niveau des océans : le fluide de remplacement (théorème d'Archimède) serait de la banquise fondue ; comme la masse de fluide de remplacement est égale à la masse de la banquise, la banquise une fois fondue occuperait exactement le volume immergé.

Ce qui change ici est que la banquise est constituée d'eau douce, tandis que les océans sont constitués d'eau salée, de densité légèrement supérieure. Le volume d'eau libéré par la fonte de la banquise sera donc supérieur au volume d'océan occupé par la banquise solide (volume immergé).

Soit  $S_{\text{b}}$  la surface de la banquise et  $h$  son épaisseur. La masse de banquise est

$$m = \rho_{\text{gl}} S_{\text{b}} h = d_{\text{gl}} \rho_{\text{eau}} S_{\text{b}} h.$$

Le volume d'eau (liquide) libérée par la fonte de la banquise est donc

$$V_{\text{fonte}} = \frac{m}{\rho_{\text{eau}}} = d_{\text{gl}} S_{\text{b}} h.$$

Le volume immergé est le volume occupé par la même masse d'eau océanique, soit

$$V_{\text{im}} = \frac{m}{\rho_{\text{oc}}} = \frac{m}{d_{\text{oc}} \rho_{\text{eau}}} = \frac{d_{\text{gl}}}{d_{\text{oc}}} S_{\text{b}} h.$$

L'excès de volume d'eau dû à la fonte de la banquise est donc

$$\Delta V = V_{\text{fonte}} - V_{\text{im}} = d_{\text{gl}} S_{\text{b}} h - \frac{d_{\text{gl}}}{d_{\text{oc}}} S_{\text{b}} h = S_{\text{b}} h d_{\text{gl}} \left(1 - \frac{1}{d_{\text{oc}}}\right).$$

La surface de la banquise est reliée à la surface  $S_{\text{T}}$  de la Terre par  $S_{\text{b}} = 0,015 S_{\text{T}}$ .

L'excès de volume se répartit sur une hauteur  $e$  sur les océans de surface  $S_{\text{oc}} = 0,7 S_{\text{T}}$ , d'où

$$\Delta V = e 0,7 S_{\text{T}} = 0,015 S_{\text{T}} h d_{\text{gl}} \left(1 - \frac{1}{d_{\text{oc}}}\right)$$

d'où

$$e = \frac{0,015}{0,7} h d_{\text{gl}} \left(1 - \frac{1}{d_{\text{oc}}}\right).$$

On peut estimer

$$\frac{0,015}{0,7} = \frac{15 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-1}} \approx 2 \times 10^{-2}$$

d'où

$$e \approx 2 \times 10^{-2} \times 4 \times 0,9 \left(1 - \frac{1}{1,1}\right) \approx 2 \times 10^{-2} \times 4 \times 0,9 \times 0,1 \approx 8 \times 9 \times 10^{-4}$$

soit

$$e \approx 7 \text{ mm}.$$

Cette épaisseur est très faible.

- La fonte des glaces terrestre a une influence plus importante (Antarctique).
- Le facteur principal de l'élévation du niveau océanique est la dilatation thermique de l'eau des océans.

## Partie IV — Tornade

**Q18.** En régime permanent, les équations de Maxwell relatives au champ magnétique sont

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

**Q19.** On considère un phénomène unidimensionnel en cartésiennes :

- densité volumique de charges  $\rho(x, t)$  ;
- densité volumique de courant électrique  $\vec{j} =$

$$j(x, t) \vec{e}_x.$$

On considère une tranche de milieu de section  $S$ , comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Elle contient la charge

$$\delta Q(t) = \rho(x, t) S dx.$$

Sa variation pendant  $dt$  est

$$d(\delta Q) = (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)) S dx = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt S dx.$$

La charge reçue par la tranche pendant  $dt$  est

$$\delta Q_{\text{reçue}} = j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt = -\frac{\partial j}{\partial x} dx S dt.$$

Le bilan de charge s'écrit

$$d(\delta Q) = \delta Q_{\text{reçue}}$$

soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt S dx = -\frac{\partial j}{\partial x} dx S dt,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}.$$

► On peut généraliser sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

**Q20.** Dans le cadre d'un écoulement stationnaire incompressible, l'équation de conservation de la masse devient

$$\text{div}(\mu \vec{v}) = \mu \text{div } \vec{v} = 0$$

d'où

$$\boxed{\text{div } \vec{v} = 0}.$$

Le théorème d'Ampère, issu de l'équation de Maxwell-Ampère  $\rho \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , s'écrit

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

où  $\Sigma$  est une surface s'appuyant sur le contour  $\Gamma$ .

Les équations de Maxwell

$$\text{div } \vec{B} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

s'écrivent ici sous forme analogue pour l'écoulement considéré :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}.$$

On peut donc écrire l'équivalent du théorème d'Ampère :

$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2 \iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}}.$$

1. Invariance par rotation et translation selon  $Oz$  : les composantes du champ ne dépendent ni de  $\theta$  ni de  $z$ ; le plan  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie, donc  $\vec{B}$  est selon  $\vec{e}_\theta$ .

**Q21.** Le vecteur tourbillon est analogue à la densité volumique de courant.

Considérons un cylindre d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_T$  parcouru par un courant uniforme  $\vec{j} = j \vec{e}_z$ . C'est une distribution à symétrie cylindrique qui crée un champ  $\vec{B}$  de la forme<sup>1</sup>

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta.$$

Par analogie, on peut en conclure qu'un vecteur tourbillon de la forme  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  sur un cylindre de rayon  $R_T$  correspond à un champ des vitesses de la forme

$$\vec{v}(M) = v(r) \vec{e}_\theta.$$

On prend comme contour  $\Gamma$  un cercle de rayon  $r$ , d'axe  $Oz$ , orienté selon  $\vec{e}_\theta$ . On a alors

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r v(r).$$

On a de plus

$$\iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \begin{cases} \pi r^2 \omega & \text{pour } r \leq R_T \\ \pi R_T^2 \omega & \text{pour } r > R_T. \end{cases}$$

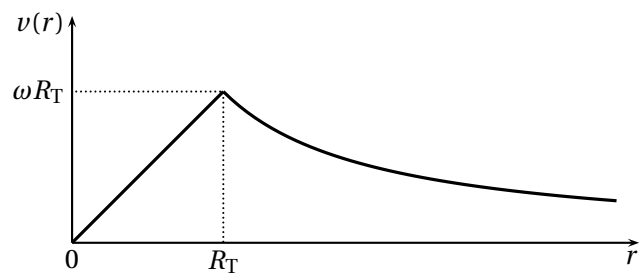
L'équivalent du théorème d'Ampère s'écrit alors

$$2\pi r v(r) = \begin{cases} 2\pi r^2 \omega & \text{pour } r \leq R_T \\ 2\pi R_T^2 \omega & \text{pour } r > R_T. \end{cases}$$

d'où le champ des vitesses

$$\boxed{\vec{v} = \begin{cases} \omega r \vec{e}_\theta & \text{pour } r \leq R_T \\ \omega \frac{R_T^2}{r} \vec{e}_\theta & \text{pour } r > R_T. \end{cases}}$$

Traçons l'allure de la courbe  $v(r)$  :



**Q22.** Hypothèses d'application du théorème de Bernoulli :

- écoulement stationnaire;
- fluide incompressible et homogène;
- fluide parfait.

On a alors le long d'une ligne de courant :

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{cte}}.$$

- Les lignes de courant étant circulaires de rayon  $r$ , on ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli entre un point loin de la tornade et un point à la surface de la tornade (deux rayons différents...).
- Ce n'est pas au programme, mais dans le cas d'un écoulement irrotationnel (tel que  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ ), le théorème de Bernoulli peut s'écrire dans tout le fluide (et pas seulement le long d'une ligne de courant). C'est ce que l'on peut écrire pour  $r > R_T$ , où  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ .

En considérant deux points à la même altitude  $z$ , l'un à  $r \gg R_T$  où  $P = P^\circ$ , l'autre à  $r = R_T$ , on a alors

$$0 + \frac{P^\circ}{\rho_0} + gz = \frac{v^2(R_T)}{2} + \frac{P(R_T)}{\rho_0} + gz$$

soit

$$P(R_T) = P^\circ - \frac{\rho_0 v^2(R_T)}{2}.$$

Avec

$$v(R_T) = \omega R_T$$

on obtient

$$P(R_T) = P^\circ - \frac{\rho_0 \omega^2 R_T^2}{2}.$$

**Q23.** On calcule

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\rho_0 v^2}{2} = \frac{1,2 \times 180^2}{(3,6)^2 \times 2} = \frac{180^2}{3 \times 3,6 \times 2} = \frac{180^2}{3 \times 1,8 \times 4} \\ &= \frac{180 \times 100}{12} = \frac{1,8 \times 10^4}{1,2 \times 10^1} = 1,5 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned}$$

La dépression à la surface de la tornade vaut

$$\Delta P = 1500 \text{ Pa}.$$

**Q24.** La force ascendante due à la dépression à la surface du toit vaut pour une surface  $S = 1 \text{ m}^2$  :

$$F = S \Delta P = 1500 \text{ N}.$$

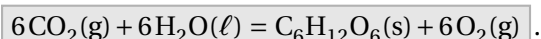
Le poids de cette même surface de tuiles vaut

$$F_{\text{pes}} = 40 \times 10 = 400 \text{ N}.$$

Le poids des tuiles ne leur permet pas de résister à la force ascendante due à la dépression : elles s'envolent si elles ne sont pas collées!

## Section V — Nécessité de la chlorophylle

**Q25.** Équilibrons l'équation bilan de la synthèse directe d'une mole de glucose :



**Q26.** Une masse  $m$  correspond à la quantité de glucose formé  $n = \frac{m}{M_g}$ , soit d'après la stœchiométrie de la réaction,

à la formation de la quantité  $n(\text{O}_2) = 6n = \frac{6m}{M_g}$  de dioxygène.

D'après l'équation d'état du gaz parfait  $PV(\text{O}_2) = n(\text{O}_2)RT$ , on en déduit

$$V(\text{O}_2) = \frac{6mRT}{M_g P}.$$

**Q27.** L'enthalpie libre de réaction de la synthèse du glucose vérifie

$$\Delta_r G_1 = \Delta_r G_1^\circ(T) + RT \ln Q$$

où le quotient de réaction est donné par

$$Q = \frac{(a(\text{O}_2))^6 \cdot a(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)}{(a(\text{CO}_2))^6 \cdot (a(\text{H}_2\text{O}))^6}.$$

Pour les phases solide et liquide pures, on a

$$a(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = 1 \quad \text{et} \quad a(\text{H}_2\text{O}) = 1.$$

Pour les gaz, on a

$$a(\text{O}_2) = x(\text{O}_2) \frac{P}{P^\circ} \quad \text{et} \quad a(\text{CO}_2) = x(\text{CO}_2) \frac{P}{P^\circ}$$

où  $x(\text{O}_2)$  et  $x(\text{CO}_2)$  sont les fractions molaires de  $\text{O}_2$  et de  $\text{CO}_2$ .

On a donc

$$Q = \left( \frac{x(\text{O}_2)}{x(\text{CO}_2)} \right)^6$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta_r G_1 &= \Delta_r G_1^\circ + 6RT \ln \frac{x(\text{O}_2)}{x(\text{CO}_2)} \\ &= 2870 \times 10^3 + 6 \times 8,31 \times 300 \times \ln \left( \frac{20}{0,03} \right) \end{aligned}$$

soit  $\Delta_r G_1 \approx 3 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

On a  $\Delta_r G_1 > 0$  : la réaction se produit spontanément dans le sens  $\leftarrow$ .

**La synthèse directe du glucose est donc provoquée.**

Il est donc indispensable d'avoir des arbres qui effectuent la réaction de manière forcée dans le sens direct, produisant du dioxygène.

## Section VI — Séchage des sols

**Q28.** La pression de vapeur saturante est la pression d'une phase gazeuse en équilibre avec la phase liquide du même corps.

Pour que le sol puisse sécher, il faut  $P_{\text{ext}} < P_{\text{sat}}(T)$ , sinon l'eau du sol pourra être en équilibre avec la vapeur d'eau de l'air.

**Q29.** La pression partielle de l'eau est un peu plus élevée au voisinage du sol humide. Le vent tend à homogénéiser cette pression partielle, et donc à la faire diminuer au voisinage du sol, ce qui tend à favoriser l'évaporation.

**Q30.** Loi de Fick :  $\vec{j}_N = -D \text{grad } n$ , où

- $\vec{j}_N$  est le vecteur densité de courant de particules, dont le module s'exprime en  $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ;
- $n$  est la densité volumique de particules, en  $\text{m}^{-3}$ ;
- $D$  est le coefficient de diffusion, en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q31.** Dans le phénomène unidimensionnel étudié ici, le bilan de particules s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_N}{\partial x}.$$

En régime stationnaire, soit  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ , on a donc  $\frac{\partial j_N}{\partial x} = 0$  et  $j_N$  est uniforme (indépendant de  $x$ ). Le flux étant donné par  $\Phi_s = j_N S$ , on en déduit qu'il est uniforme.

**Q32.** Dans la zone  $z_m(t) < z < H$ , la vapeur d'eau suit la loi de Fick

$$j_N = -D \frac{dn_{\text{vap}}(z)}{dz} \quad \text{avec} \quad \Phi_s = S j_N$$

d'où

$$\frac{dn_{\text{vap}}(z)}{dz} = -\frac{\Phi_s}{DS}.$$

On en déduit

$$\int_{n_{\text{vap}}(z_m(t))}^{n_{\text{vap}}(z)} dn_{\text{vap}} = -\frac{\Phi_s}{DS} \int_{z_m(t)}^z dz$$

d'où

$$n_{\text{vap}}(z) = n_{\text{vap}}(z_m(t)) - \frac{\Phi_s}{DS} [z - z_m(t)].$$

**Q33.** L'équation d'état des gaz parfait s'écrit

$$PV = N(\text{mol})RT = \frac{N}{N_A} RT$$

où  $N(\text{mol})$  est le nombre de moles de gaz dans le volume  $V$  et  $N$  le nombre de particules de gaz dans ce volume.

On a donc

$$P = \frac{N}{V} \frac{RT}{N_A}.$$

On retrouve la densité volumique de particules  $n = \frac{N}{V}$  d'où  $P = n \frac{RT}{N_A}$ .

En écrivant cette équation d'état à la cote  $z = z_m(t)$  où  $P = P_{\text{sat}}(T)$ , on obtient

$$n_{\text{vap}}(z_m(t)) = \frac{N_A P_{\text{sat}}(T)}{RT}.$$

**Q34.** Le résultat de la question 17 permet alors d'écrire

$$n_{\text{vap}}(z) = \frac{N_A P_{\text{sat}}(T)}{RT} - \frac{\Phi_s}{DS} [z - z_m(t)].$$

**Q35.** On a vu que la loi des gaz parfaits permet d'écrire

$$P(z) = n_{\text{vap}}(z) \frac{RT}{N_A}.$$

Pour  $z = H$  on obtient

$$P(H) = n_{\text{vap}}(H) \frac{RT}{N_A}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit

$$P(H) = \frac{RT}{N_A} \left( \frac{N_A P_{\text{sat}}(T)}{RT} - \frac{\Phi_s}{DS} [H - z_m(t)] \right)$$

soit

$$P(H) = P_{\text{sat}}(T) - \frac{RT \Phi_s}{N_A DS} [H - z_m(t)].$$

**Q36.** Le flux à l'interface sol-atmosphère est donné par

$$\Phi_s = j S = h S (P(H) - P_{\text{ext}})$$

soit

$$\begin{aligned} \Phi_s &= h S \left[ P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}} - \frac{RT \Phi_s}{N_A DS} (H - z_m(t)) \right] \\ &= h S [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}] - \frac{h RT}{N_A DS} [H - z_m(t)] \Phi_s. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\Phi_s = \frac{h S [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}]}{1 + \frac{h RT}{N_A D} [H - z_m(t)]}$$

**Q37.** Soit  $dz_m(t) < 0$  la variation de  $z_m(t)$  pendant  $dt$  ( $z_m(t)$  diminue quand l'eau s'évapore). Le volume de sol séchant pendant  $dt$  est donc  $d\tau = -S dz_m(t)$ ; la quantité de moles de vapeur d'eau créée est donc

$$n_{\text{liq}} d\tau = -S n_{\text{liq}} dz_m(t).$$

Ces molécules sont évacuées par diffusion à travers l'interface en  $z = z_m(t)$ ; la quantité diffusant à travers cette section est  $\Phi_s dt$ . Par identification, on a donc

$$-S n_{\text{liq}} dz_m(t) = \Phi_s dt$$

soit

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = -\frac{\Phi_s}{n_{\text{liq}} S}.$$

**Q38.** En combinant les deux questions précédentes, on obtient

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = -\frac{h}{n_{\text{liq}}} \frac{[P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}]}{1 + \frac{hRT}{2N_A D} [H - z_m(t)]}.$$

Nous allons procéder par séparation des variables :

$$\left(1 + \frac{hRT}{2N_A D} [H - z_m(t)]\right) dz_m = -\frac{h}{n_{\text{liq}}} [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}] dt.$$

Intégrons de  $t = 0$  où  $z_m = H$  à  $t = \tau$  où  $z_m = 0$  :

$$\int_H^0 \left(1 + \frac{hRT}{2N_A D} [H - z_m(t)]\right) dz_m = -\frac{h}{n_{\text{liq}}} [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}] \int_0^\tau dt,$$

soit

$$-\frac{h}{n_{\text{liq}}} [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}] \tau = \left[ z - \frac{hRT}{2N_A} (H - z)^2 \right]_H^0 = -H - \frac{hRT}{2N_A D} H^2$$

d'où

$$\tau_{\text{séchage}} = \frac{n_{\text{liq}} H}{h [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}]} \left[ 1 + \frac{hRT H}{2N_A D} \right]$$

**Q39.** On peut écrire

$$\tau_{\text{séchage}} = \frac{n_{\text{liq}} H}{h [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}]} \left[ 1 + \frac{H}{H_{\text{lim}}} \right]$$

avec

$$H_{\text{lim}} = \frac{2N_A D}{hRT}$$

Le terme  $H_{\text{lim}}$  apparaît que le rapport d'un terme diffusif (numérateur, proportionnel au coefficient de diffusion  $D$ ) sur un terme d'évaporation (dénominateur, proportionnel au coefficient  $h$ ) :

$$H_{\text{lim}} = \frac{\text{diffusion}}{\text{évaporation}}.$$

On peut donc distinguer deux domaines :

$H_{\text{lim}} \ll 1$  : l'évaporation est prédominante;

$H_{\text{lim}} \gg 1$  : la diffusion est prédominante.

**Q40.** Pour  $H \ll H_{\text{lim}}$ , on a  $1 + \frac{H}{H_{\text{lim}}} \approx 1$ , d'où la forme approchée

$$\tau_{\text{séchage}} = \frac{n_{\text{liq}} H}{h [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}]}.$$

Le temps de séchage est fonction linéaire de  $H$ , ce qui apparaît sur la figure 12 pour une hauteur  $H$  de l'ordre du millimètre.

Pour  $H \gg H_{\text{lim}}$ , on a  $1 + \frac{H}{H_{\text{lim}}} \approx \frac{H}{H_{\text{lim}}}$ , d'où la forme approchée

$$\tau_{\text{séchage}} = \frac{n_{\text{liq}}}{h [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{ext}}]} H^2.$$

Le temps de séchage est fonction quadratique de  $H$  (courbe parabolique), ce qui semble compatible avec l'aspect de la figure 11.

Avec les données, on calcule

$$H_{\text{lim}} = \frac{2 \times 6,022 \times 10^{23} \times 5 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{17} \times 8,31 \times 300}$$

soit  $H_{\text{lim}} = 4,8 \text{ mm}$ .

Cette valeur est compatible avec l'allure linéaire du début de la courbe de la figure 12, que l'on observe pour  $H < \frac{H_{\text{lim}}}{10} = 0,5 \text{ mm}$ .

La courbe de la figure 11 fait apparaître le début de la zone où la diffusion est prédominante.

- On retrouve le caractère lent du phénomène diffusif : quand l'évaporation prédomine, il faut un temps 2 fois plus élevé pour sécher une hauteur 2 fois plus grande de sol ; quand la diffusion prédomine, il faut un temps 4 fois plus élevé pour sécher une hauteur 2 fois plus grande de sol.