Espace vectoriel :

Exercice 1 Mines-Télécom 2021
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels distincts de dimension 3 dans un espace vectoriel E de dimension 4.

1. Calculer la dimension de $E_1 \cap E_2$.

2. On note $E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 4z + 3y - t = 0\right\}$ et $E_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = x\right\}$. Donner une base des espaces E_1, E_2 et $E_1 \cap E_2$.

3. Montrer que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^4$ puis donner une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs de E_1 et E_2.

• **Exercice 2** (classique)
Soit E un espace vectoriel. Déterminer les endomorphismes de E tels que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

⋆ **Exercice 3** (Liberté) Étudier la liberté des familles suivantes :

$$\mathcal{G} = \left(x \overset{g_1}{\mapsto} \arctan(x); x \overset{g_2}{\mapsto} x^3; x \overset{g_3}{\mapsto} \ln(1+x^2)\right) \quad \mathcal{H} = \left(X^k (X-1)^{n-k} : k \in [\![0; n]\!]\right).$$

Exercice 4 (Familles génératrices)
On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants : $\ell_1 = (1,1,1,1)$, $\ell_2 = (1,-1,1,-1)$, $\ell_3 = (1,3,1,3)$, $m_1 = (1,2,0,2)$, $m_2 = (1,2,1,2)$, $m_3 = (3,1,3,1)$.
Et les sous-espaces $L = \mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2, \ell_3), M = \mathrm{Vect}(m_1, m_2, m_3)$.

1. Calculer les dimensions de L et de M.

2. Préciser une équation de M.

3. Préciser le sous-espace $L + M$ et en déduire la dimension de $L \cap M$.

• **Exercice 5** (Endomorphisme et famille de vecteurs)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ une base de E et $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ des éléments de E.

1. Montrer que s'il existe un endomorphisme f de E tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(\vec{x}_k) = \vec{a}_k$ alors $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre.

2. Vérifier la réciproque.

Exercice 6 (Sous-espaces supplémentaires) Mines-Télécom 2024
Soient E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On considère $P = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 : x + y + z = 0\}$ et $D = \left\{xe_1 + ye_2 + ze_3 : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}\right\}$.

1. Montrer que P et D sont supplémentaires dans E.

2. Donner la matrice associé au projecteur sur P parallèlement à D dans la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 7 (Sous-espaces supplémentaires)
Soient S l'ensemble des suites réelles, C l'ensemble des suites réelles convergentes, C_0 l'ensemble des suites convergeant vers 0 et D l'ensemble des suites constantes.

1. Montrer que C, C_0 et D sont des sous-espaces vectoriels de S.

2. Montrer que $C = C_0 \oplus D$.

⋆ **Exercice 8** (Polynôme annulateur et sous-espaces supplémentaires)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E (de dimension quelconque) tel que $f^2 - 5.f + 6.Id = 0_{(E)}$.
Montrer que $E = \text{Ker }(f - 2Id) \oplus \text{Ker }(f - 3Id)$.

• **Exercice 9** Mines-Télécom 2025
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq Id$ et $u^3 = Id$. On note $E_1 = \ker(u^2 + u + Id)$ et $E_2 = \ker(u - Id)$.

1. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

2. Calculer $u^2 + u + Id - (u^2 - Id) \circ (u + 2Id)$ et en déduire que $E_1 \oplus E_2 = E$.

3. autres : peut-être, montrer que $E_1 = Im(u - Id)$.

⋆ **Exercice 10** (Projecteurs)
Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E tels que $p_1 \circ p_2 = 0_{(E)}$. On pose $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

1. Montrer que q est un projecteur.

2. Montrer que Ker $q = \text{Ker }(p_1) \cap \text{Ker }(p_2)$.

3. Montrer que $Im(q) = Im(p_1) + Im(p_2)$.

• **Exercice 11** (Projecteur) Soit p un projecteur de E, soit $f \in (E)$ tels que $Im(p)$ et Ker p sont stables par f.
Montrer que p et f commutent. # ie $p \circ f = f \circ p$

• **Exercice 12** (Noyaux et images de f et f^2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f en endomorphisme de E.

1. De manière générale, quelle relation d'inclusion a-t-on entre $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$? Et entre $Im(f)$ et $Im(f^2)$?

2. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes

$$(i)\ \ker(f) = \ker(f^2) \qquad (ii)\ Im(f) = Im(f^2).$$

3. Montrer également que (i) est équivalente à (iii) $E = \ker(f) \oplus Im(f)$.

⋆ **Exercice 13** CCINP 2022
Soient u et v deux endomorphismes de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. On suppose pour cette question uniquement que $Im(u) \cap Im(v) = \{O_E\}$.
Montrer que $\ker(u + v) = \ker(u) + \ker(v)$.

2. Comparer $rg(u + v)$ et $rg(u) + rg(v)$.

• **Exercice 14** (Noyaux et images)
Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

$$(i)\ \ \varphi^2 = 0 \text{ et } rg(\varphi) = p\ ; \qquad\qquad (ii)\ \ Im(\varphi) = \ker(\varphi).$$

Exercice 15 Mines-Télécom 2025
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que $\exists u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u) = Im(u) \iff n$ est pair.

• **Exercice 16** CCINP 2024 sans préparation
Soient E un espace vectoriel de dimension n et f, g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f+g=Id_E$, avec $rg(f)+rg(g)\leq n$.
Montrer que $Im(f)\oplus Im(g)=E$, puis que f et g sont des projecteurs.

Matrices et applications linéaires :

⋆ **Exercice 17** CCINP 2024 sans préparation
Soient E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer qu'il existe $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u)=F$ et $Im(u)=G$ si et seulement si $\dim(G)+\dim(F)=n$.

Exercice 18 Déterminer le rang de $\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Exercice 19 Mines-Télécom 2024 On note $\Theta=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
En faisant le moins de calcul possible, déterminer le ragn de Θ, $Im(\Theta)$ et $\ker(\Theta)$.

Exercice 20 Montrer que $A=(\sin(i+j))_{1\leq i,j\leq n}$ est de rang au plus 2.

⋆ **Exercice 21** CCINP MP 2025
On considère les matrices $N=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et l'espace $\mathcal{C}(N)=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : MN=NM\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(N)$ est un espace vectoriel. Déterminer le.
2. Montrer que N est un polynôme de degré 2 en T.
   On définit $E=\left\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : M^8=T\right\}$.
3. Montrer que $\forall M\in E$, M est un polynôme en N.
4. Déterminer E.

Exercice 22 (Commutant d'une matrice)
Soit M une matrice carrée d'ordre n. On note $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des matrices commutant avec M (pour la multiplication bien sûr) : $\mathcal{C}(M)=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,|AM=MA\}$.

1. Soit M une matrice carrée d'ordre n.
   Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(M)$ des matrices commutant avec M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que pour tout $k\in\mathbb{N}, M^k\in\mathcal{C}(M)$.
2. Dans cette question $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.
   Montrer que pour tout $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: A commute avec M ssi A est diagonale.
   En déduire la dimension de $\mathcal{C}(M)$ et que (I_2,M) est une base de $\mathcal{C}(M)$.
3. Dans cette question, $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser M^n et montrer que $M^n \in Vect(I_3, M)$.

b. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{C}(M)$ et n'est pas combinaison linéaire de puissances de M.

⋆ **Exercice 23** (Puissance n-ième d'un endomorphisme)
Soient E espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $2u^3 + 5u^2 - 3u = 0$. Exprimer, pour $n \geq 3$, u^n en fonction de u et u^2.

Exercice 24 Mines-Ponts 2024 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$, tel que $A^3 + dA = 0$.

2. Déterminer d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2.

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

• **Exercice 25** (Puissance n-ième de matrice) Mines-Télécom 2023
Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, B^n.

2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n.

3. Retrouver ce résultat par une autre méthode.

⋆ **Exercice 26** On souhaite montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il existe une telle matrice et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé.
Présicer le noyau et l'image de f^2 puis le noyau et l'image de f.
Conclure.

⋆ **Exercice 27** On pose $f_1 : x \mapsto \sin(x)$, $f_2 : x \mapsto x\sin(x)$, $f_3 : x \mapsto \cos(x)$, $f_4 : x \mapsto x\cos(x)$ et $E = Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E.

2. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.

3. Donner la matrice de φ dans la base de (f_1, f_2, f_3, f_4).

4. En déduire une primitive de $x \mapsto x(\sin x + \cos x)$.

• **Exercice 28** CCINP 2021
Soit n un entier impaire supérieur ou égal à 3. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall P \in E$,

$$\phi(P)(X) = P(1 - X) + P(0)X^n.$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E. Donner la matrice A dans la base canonique de E.

2. Calculer A^2 et montrer qu'elle est triangulaire.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

a. Justifier que si $\lambda \in Sp(A)$ alors $\lambda^2 \in Sp(A^2)$.

b. Montrer que la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique χ_A est paire.

c. En déduire que ϕ est un automorphisme.

• **Exercice 29** Mines-Télécom 2023

Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[X])$ tels que $f(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$.

Donner une condition nécéssaire et suffisante sur les $(a_0, \ldots, a_n)$ pour que f soit un isomorphisme.

⋆ **Exercice 30** Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1) - P(0), P(2) - P(1)) \end{array} \right.$

Préciser la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}^3$.

L'application φ est-il un isomorphisme ?

• **Exercice 31** CCINP 2022

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Dans une base $\mathcal{B}$ on peut écrire :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\ker(f^2) \oplus \ker(f - 2Id_E) = E$.

2. Donner un vecteur de $\ker(f^2)$ n'appartenant pas à $\ker(f)$.

3. Donner une base $\mathcal{B}'$ telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Supposons qu'il existe un endomorphisme g tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker(f^2)$ est stable par g : qu'en déduit-on ?

⋆ **Exercice 32** (Changement de base)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.

2. Déterminer une base de $Im(f)$.

3. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• **Exercice 33** (Projections)

La famille $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$, de la projection sur $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$.

2. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$, de la projection sur $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$ parallèlement à $\mathbb{R}\vec{i}$.

Trace :

• **Exercice 34** (Équation matricielle)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite résoudre l'équation $X + X^T = Tr(X)A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier que $M + {}^tM$ est symétrique et calculer sa trace.

2. On suppose dans cette question que A n'est pas symétrique.
Montrer qu'alors X est une solution si et seulement si X est antisymétrique.

3. On suppose dans cette question que A est symétrique.
Préciser l'ensemble des solutions (on envisagera deux cas selon la valeur de la trace de A).

Exercice 35 (Équation matricielle)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite résoudre l'équation $X + Tr(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $Tr(X + Tr(X)A)$.

2. Préciser l'ensemble des solutions (on envisagera deux cas selon la valeur de la trace de A).

⋆ **Exercice 36** (Divers classiques sur la trace)

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $AB - BA = I_n$.

2. Montrer que si $AB - BA = A$ (A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) alors A n'est pas inversible.

3. Montrer que si A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 alors $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Déterminants :

⋆ **Exercice 37** CCINP sans préparation 2025
On rappelle qu'une matrice B est dite racine de A lorsque $B^2 = A$.

1. Montrer que I_n admet au moins 2^n racines.

2. Montrer que $-I_{2n+1}$ n'admet pas de racine réel.

⋆ **Exercice 38** Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{pmatrix}$.

⋆ **Exercice 39** Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a & 4a^3+5a^2 \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b & 4b^3+5b^2 \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c & 4c^3+5c^2 \\ 1 & 2d+3 & 3d^2+4d & 4d^3+5d^2 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 40 Soit j l'une des deux racines cubiques de l'unité autre que 1 (on rappelle qu'alors $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$). On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $\overline{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{j} & \bar{j}^2 \\ 1 & \bar{j}^2 & \bar{j} \end{pmatrix}$.

1. Préciser la matrice J^2, en déduire $\text{Det}(J) = \pm i3\sqrt{3}$.

2. Calculer $\text{Det}(J)$ en fonction de j et j^2. Préciser le résultat du 1) en supposant que $j = e^{2i\pi/3}$.

3. Calculer $\overline{J} \times J$. En déduire l'inverse de J.

Exercice 41 Soit m un paramètre réel, on considère le système, d'inconnues réelles (x, y, z), suivant : $\mathcal{S}_m$: $\begin{cases} x & - & y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & m \end{cases}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le système a-t-il une solution unique ? Dans ce cas préciser l'unique solution du système.
2. Résoudre le système dans les autres cas.

Exercice 42 Soient a, b et c trois réels. On considère le déterminant suivant : $D = \begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 1 & \sin(b) & \cos(b) \\ 1 & \sin(c) & \cos(c) \end{vmatrix}$.

1. En développant D, montrer que D est la somme de trois sinus.
2. Par la méthode de Gauss, donner une expression factorisée de D (on sera sûrement amener à utiliser $\sin(p) - \sin(q) = \ldots$, $\cos(p) - \cos(q) = \ldots$).

• **Exercice 43** Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_0, \ldots, z_k$ des complexes. On note $P_0 = (X + z_0)^n, \ldots, P_k = (X + z_k)^n$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_0, \ldots, P_k)$ soit une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 44 Soient $P_0 = 1, P_1 = 2X - 1$, $P_2 = 3X^2 - 4X + 2$ et $P_3 = 4X^3 - 9X^2 + 8X - 2$.
Calculer le déterminant de (P_0, P_1, P_2, P_3) relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ puis relativement à la base de Taylor : $\mathcal{T} = (\frac{1}{0!}(X-1)^0, \frac{1}{1!}(X-1)^1, \frac{1}{2!}(X-1)^2, \frac{1}{3!}(X-1)^3)$.

Exercice 45 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On pose pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, $e'_k = e_k + e_{k+1}$ et $e'_n = e_n + e_1$.
Dans quels cas, selon n, $\mathcal{B}' = (e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ est-elle une base de E ?
Si $n = 3$ et (e_1, e_2, e_3) est directe, $\mathcal{B}'$ est-elle aussi directe ?

• **Exercice 46** Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x) : P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et une base.
2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

⋆ **Exercice 47** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme u_A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $u_A : B \mapsto AB$.
Vérifier que $\det(u_A) = (\det A)^2$.
Que dire de $Tr(u_A)$?

• **Exercice 48** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A_n la matrice carrée d'ordre n définie par : $A_n = (\max(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
Calculer $\det(A_n)$ en fonction de n.

⋆ **Exercice 49** Soient a, b des réels et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A_n = (a_{ij})$ carrée d'ordre $2n$ dont la diagonale principale est formée de « a » , l'« autre diagonale » de « b » , les autres coefficients étant nuls.

Par exemple : $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
On note Δ_n le déterminant de A_n.
Trouver une relation de récurrence permettant le calcul de Δ_n et achever ce calcul.

• **Exercice 50** Soit $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. On note Δ_n le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Déterminer Δ_2 et Δ_3.
2. Donner une relation entre Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n pour $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$.
3. Quelle valeur doit-on attribuer à Δ_1 pour que la relation précédente s'étende à $n = 1$? Pourrait-on aussi étendre à $n = 0$?
4. Déterminer Δ_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

• **Exercice 51** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit par blocs les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit matriciel PMQ et en déduire $\det(M) = \det(A + iB)\det(A - iB)$.

Exercice 52 *Ne pas généraliser impunément.*

1. Préciser les déterminants $\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ puis $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.
2. On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   A-t-on
   $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - CB \text{ ?} \qquad = \det(A)\det(D) - \det(C)\det(B) \text{ ?} \qquad = \det(AD - CB) \text{ ?}$$

• **Exercice 53** *Classique par ex Mines-Ponts 05*
Soit $n \geq 1$, A, B, C et D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\boxed{AC = CA}$ et on suppose $\boxed{A \text{ inversible.}}$
Montrer que :Det $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Det}(AD - CB)$.
Indication : Chercher une matrice blocs $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$ pour que $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ soit simple.

Exercice 54

1. Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair n'est pas inversible.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = -u$. Montrer que u n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Polynômes annulateurs :

$\star$ **Exercice 55** Donner un polynôme annulateur des matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\star$ **Exercice 56** Mines-Pont 2021 / Mines-Télécom 2025

On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & Tr(M)I_n + M \end{array} \right.$.

L'application φ est-elle diagonalisable ? bijective ? et si oui, donner φ^{-1}. Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ^n.

$\star$ **Exercice 57** Navale 2023 / CCINP 2025

Soient $f, u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$f = \lambda u + \mu v, \quad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, \quad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v.$$

Trouver un polynôme annulateur de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 58 Soit $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P = (X-1)(X-\frac{1}{3})$ annule A.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P = (X-1)(X-\frac{1}{3})$.
3. En déduire A^n en fonction de A et I_3 et préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$

Exercice 59 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) P annule M
   (ii) P annule A et B
2. On suppose que $X^2 - 3X + 2$ annule A et $X^2 + X - 2$ annule B.
   Donner un polynôme annulateur de M de degré 3.

Exercice 60 extrait CCP PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + {}^tA = I_3$.
Trouver un polynôme annulateur de A.