Mathématiques et physique — Les opérateurs vectoriels

1 — L'opérateur gradient

Soit un champ scalaire $G(M,t)$. Sa variation $\mathrm{d}G$ entraînée par un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M$ de M est, par définition de l'opérateur gradient :

$$\mathrm{d}G = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M$$

- Mathématiquement : la différentielle d'un champ scalaire est égale à la circulation élémentaire de son gradient.
- Physiquement : la variation d'un champ scalaire lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ est égal à la circulation élémentaire de son gradient sur ce déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$.
- L'opérateur gradient s'applique à un champ scalaire, qu'il transforme en un champ vectoriel :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}^3 & \longrightarrow & \boldsymbol{R} \\ G(M,t) & \longmapsto & \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t) \end{array}$$

- L'opérateur gradient est linéaire : $\forall(\lambda,\mu)\in\boldsymbol{R}^2$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\lambda G_1+\mu G_2) = \lambda\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G_1+\mu\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G_2$.

Le gradient d'un champ scalaire $G(M,t)$ est un champ vectoriel qui renseigne sur les variations spatiales de $G(M,t)$.

L'ensemble des points tels que $G(M,t_0) = G_0$ à un instant donné est une surface (surface « iso-G »). En tout point d'une telle surface, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)$ est normal à cette surface, et dirigé dans le sens des G croissants.

Démonstration : Soient M et M' deux points sur la surface $G(M) = G_0$, avec $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M$ élémentaire. Par définition du gradient, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M = \mathrm{d}G$; or $\mathrm{d}G = G(M')-G(M) = 0$ car par hypothèse $G(M) = G(M') = G_0$. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M = 0$, et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G\perp\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M$. Comme $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M$ est tangnent à la surface iso-G par construction, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G$ est normal à cette surface.
Considérons un déplacement du point M vers un point M'' selon $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ normal à la surface iso-G, dans le sens de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G$. La variation du champ scalaire vaut $G(M'')-G(M) = \mathrm{d}G = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$. Comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G$ est normal à la surface iso-G, il est colinéaire à $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$; on a supposé $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G$ de même sens, d'où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} > 0$. On a donc $\mathrm{d}G > 0$: le champ G augmente donc quand on se déplace dans le sens de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G$.

Un champ de gradient est à circulation conservative :

$$\oint_{M\in\Gamma}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M = 0\,;\quad\forall\Gamma\,.$$

Démonstration : par définition du gradient $\oint\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \oint\mathrm{d}G = G(A)-G(A) = 0$, le point de départ étant égal au point d'arrivée si l'on circule sur un contour qui est une courbe fermée.

- La circulation d'un champ de gradient entre deux points A et B est donc indépendant du chemin suivi.

Tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}(M,t)$ à circulation conservative est un champ de gradient :

$$\oint_{M\in\Gamma}\overrightarrow{A}(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_M = 0\,;\forall\Gamma\Longleftrightarrow\exists G(M,t),\ \overrightarrow{A}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)$$

- La circulation d'un champ de force représente le travail de la force sur le chemin considéré. Le résultat précédent est vu en mécanique sous la forme : **une force conservative dérive d'une énergie potentielle**.
  Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi, c'est-à-dire si $\oint\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = 0$. Il existe donc un champ scalaire [1] $-E_\mathrm{p}$ tel que $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_\mathrm{p}$.

1. Le signe $-$ est choisi pour l'interprétation énergétique de ce champ scalaire.

2 — L'opérateur divergence

> Soit un champ scalaire $\overrightarrow{A}(M,t)$. Son flux sortant $\delta\Phi$ à travers la surface délimitant le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_M$ entourant le point M est, par définition de l'opérateur divergence :
>
> $$\delta\Phi(t) = \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M$$

- La surface délimitant un volume $\mathrm{d}\tau_M$ étant par construction une surface fermée, le flux est pris positif s'il est sortant par convention.
- L'opérateur divergence s'applique à un champ vectoriel, qu'il transforme en un champ scalaire :

$$\mathrm{div}: \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & \longrightarrow & \boldsymbol{R}^3 \\ \overrightarrow{A}(M,t) & \longmapsto & \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M,t) \end{array}$$

- L'opérateur divergence est linéaire : $\forall(\lambda,\mu)\in\boldsymbol{R}^2$, $\mathrm{div}(\lambda\overrightarrow{A}_1+\mu\overrightarrow{A}_2)=\lambda\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}_1+\mu\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}_2$.

La divergence d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ est un champ scalaire qui renseigne sur le caractère localement divergent du champ $\overrightarrow{A}$; étant donné un petit volume $\mathrm{d}\tau$ au voisinage d'un point M :

— si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M)>0$, le champ, globalement, « sort » du volume $\mathrm{d}\tau$;

— si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M)<0$, le champ, globalement, « rentre » dans le volume $\mathrm{d}\tau$;

— si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M)=0$, le champ, globalement, ne rentre ni ne sort de $\mathrm{d}\tau$.

Théorème d'Ostrogradski

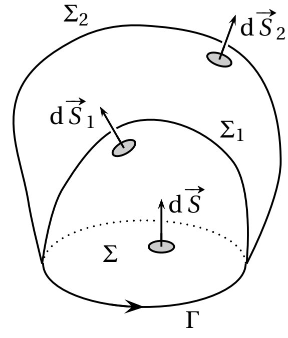
> Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(M,t)$ défini en tout point d'un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface Σ :
>
> $$\oiint_{P\in\Sigma}\overrightarrow{A}(P,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_P=\iiint_{M\in\mathcal{V}}\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

- S'il existe un point de singularité (où le champ n'est pas défini) à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$, le théorème d'Ostrogradski ne s'applique pas.
- Ce théorème est aussi appelé théorème de Green-Ostrogradski, ou théorème de flux-divergence.
- On peut l'envisager comme une extension « à grande échelle » de la définition locale de l'opérateur divergence.

Une conséquence de ce théorème est :

> Tout champ à divergence identiquement nulle est à flux conservatif, et réciproquement :
>
> $$\oiint_{P\in\Sigma}\overrightarrow{A}(P,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_P=0\,,\ \forall\Sigma \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M,t)=0\ \forall M,\ \forall t\,.$$

Le flux d'un champ à flux conservatif à travers une surface s'appuyant sur un contour orienté ne dépend pas du choix de cette surface ; on peut alors parler du **flux du champ à travers un contour**.



> *Démonstration :* Considérons la surface fermée comprise entre Σ_1 et Σ_2. On note les flux $\Phi_1=\oiint_{\Sigma_1}\overrightarrow{A}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_1$ et $\Phi_2=\oiint_{\Sigma_1}\overrightarrow{A}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_2$. Compte tenu de l'orientation des surfaces Σ_1 et Σ_2, le flux sortant de la surface fermée est $\Phi=-\Phi_1+\Phi_2$. Le champ étant conservatif, on a $\Phi=0$, d'où $\Phi_1=\Phi_2$.
> Le flux de $\overrightarrow{A}$ est donc identique à travers Σ, Σ_1, Σ_2, ou toute autre surface orientée s'appuyant sur le contour Γ.

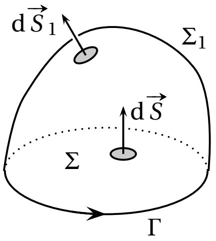
- **Le flux d'un champ à flux conservatif est constant à travers toute section d'un tube de champ.** Le champ est donc plus intense lorsque les lignes de champ se resserrent.
- Le champ des vitesses d'un fluide en écoulement incompressible est à flux conservatif : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v}=0$, et le débit volumique est conservée à travers toute section d'un tube de courant.

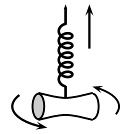
3 — L'opérateur rotationnel

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$. Sa circulation $\delta\mathcal{C}$ le long d'un contour élémentaire orienté $\mathrm{d}\Gamma$ entourant le point M est, par définition de l'opérateur rotationnel :

$$\delta\mathcal{C}(t) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

où $\mathrm{d}\vec{S}_M$ est une surface élémentaire orientée s'appuyant sur $\mathrm{d}\Gamma$.





Un contour Γ est une courbe fermée orientée. On l'oriente *arbitrairement* en lui associant un sens de parcours. L'orientation du contour définit l'orientation de toute surface Σ s'appuyant sur Γ selon la règle de Maxwell, appelée familièrement « règle du tire-bouchon » : un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens de l'orientation du contour avance dans le sens de l'orientation de la surface.

➤ L'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel, qu'il transforme en un champ vectoriel :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}^3 & \longrightarrow & \boldsymbol{R}^3 \\ \vec{A}(M,t) & \longmapsto & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t) \end{array}$$

➤ L'opérateur rotationnel est linéaire : $\forall(\lambda,\mu)\in\boldsymbol{R}^2, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\lambda\vec{A}_1+\mu\vec{A}_2) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}_1+\mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}_2$.

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est un champ vectoriel qui renseigne sur le caractère localement « tournant » autour de M.

Théorème de Stokes

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ défini en tout point d'une surface Σ s'appuyant sur un contour orienté Γ :

$$\oint_{P\in\Gamma}\vec{A}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_P = \iint_{M\in\Sigma}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t)\,\mathrm{d}\vec{S}_M\,.$$

➤ Ce résultats est vrai pour toute surface Σ s'appuyant sur Γ.

➤ Les orientations du contour Γ et de la surface Σ sont reliées par la règle de Maxwell.

➤ S'il existe un point où le champ n'est pas défini sur la surface Σ, le théorème de Stokes ne s'applique pas.

Une conséquence de ce théorème est :

Tout champ à rotationnel identiquement nul est à circulation conservative, et réciproquement :

$$\oint_{P\in\Gamma}\vec{A}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_P = 0\,,\ \forall\Gamma \quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t) = \vec{0}\ \ \forall M,\ \forall t\,.$$

Champ vectoriel à flux conservatif

La divergence d'un rotationnel est identiquement nulle : $\boxed{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t)\right)=0}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à flux conservatif est qu'il soit un champ de rotationnel :

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(M,t) = 0\,;\forall\, M \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\vec{R}(M,t)\,,\ \vec{A}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{R}(M,t)$$

Champ vectoriel à circulation conservative

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)\right) = \vec{0}}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à circulation conservatif est qu'il soit un champ de gradient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t) = \vec{0}\ ;\forall\, M \quad \Longleftrightarrow \quad \exists G(M,t)\ ,\ \vec{A}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)$$

4 — L'opérateur laplacien

Laplacien scalaire

Soit un champ scalaire $G(M,t)$. Son laplacien est défini par

$$\Delta G(M,t) = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)\right)$$

- L'opérateur laplacien Δ s'applique à un champ scalaire, qu'il transforme en un champ scalaire.
- Cet opérateur est linéaire.
- Le laplacien mesure l'écart du champ scalaire en un point par rapport à sa valeur moyenne au voisinage de ce point.
- On retiendra son expression en coordonnés cartésiennes :

$$\boxed{\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}}$$

Laplacien vectoriel

Le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ est défini par

$$\Delta\vec{A}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}(M,t)\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M,t)\right)$$

- Cet opérateur est parfois noté $\vec{\Delta}$. Il s'applique à un champ vectoriel, qu'il transforme en un champ vectoriel.
- *En coordonnées cartésiennes uniquement*, en notant $\vec{A} = A_x(M,t)\,\vec{e}_x + A_y(M,t)\,\vec{e}_y + A_z(M,t)\,\vec{e}_z$, il s'exprime en fonction des laplaciens des coordonnées :

$$\Delta\vec{A}(M,t) = \left(\Delta A_x(M,t)\right)\vec{e}_x + \left(\Delta A_y(M,t)\right)\vec{e}_y + \left(\Delta A_z(M,t)\right)\vec{e}_z$$

où $\Delta A_x(M,t) = \dfrac{\partial^2 A_x(M,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x(M,t)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x(M,t)}{\partial z^2}$, et de même pour les deux autres composantes.

5 — L'opérateur nabla

L'opérateur nabla, noté $\vec{\nabla}$, est appelé aussi *opérateur de dérivation spatiale*. Il permet d'exprimer les opérateurs vectoriels :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G = \vec{\nabla}G\ ; \qquad \mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\ ; \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

Expression de l'opérateur nabla dans les divers systèmes de coordonnées :

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

- L'opérateur laplacien s'écrit comme le carré scalaire de l'opérateur nabla : $\boxed{\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}$.