TD phénomènes de transport — Diffusion de charge

1 — Vitesse moyenne des électrons de conduction

1. La masse volumique du cuivre est $\mu_{\text{Cu}} = d\mu_0 = 8{,}95 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
Soit N le nombre d'atome de cuivre dans un volume V ; la masse de ce volume s'écrit

$$m = \mu_{\text{Cu}} V = \frac{N}{\mathcal{N}_{\text{A}}} M.$$

Le nombre d'électrons de conduction par unité de volume est égal au nombre d'atomes de cuivre par unité de volume (chaque atome libérant un électron), soit

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\mu_{\text{Cu}} \mathcal{N}_{\text{A}}}{M} = \frac{8{,}95 \times 10^3 \times 6{,}02 \times 10^{23}}{63{,}5 \times 10^{-3}}$$

d'où $\boxed{n = 8{,}5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}}$.

2. La densité volumique de courant vaut

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{10^{-6}}$$

soit $\boxed{j = 1{,}0 \times 10^6\ \text{A}\cdot\text{m}^{-2}}$.

3. La vitesse moyenne des électrons de conduction vérifie (en valeur absolue)

$$j = n\text{e}v$$

d'où

$$v = \frac{j}{n\text{e}} = 7{,}4 \times 10^{-5}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

On a $\boxed{v = 74\ \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$: la vitesse de dérive est très faible.

---

3 — Modèle de Drude

On modélise le cuivre par un réseau cristallin constitué d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction se déplacent.
On appelle n le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume et on suppose que chaque élément cuivre libère un électron de conduction. On note e la charge élémentaire.
Les collisions des élections sur les ions du réseau sont modélisés par une force de frottement fluide

$$\vec{F}_{\text{v}} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}.$$

On applique au cuivre un champ électrique extérieur $\vec{E} = E\vec{u}_z$.

1. On applique le PFD à un électron :

$$m\frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = -\text{e}\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

d'où

$$\frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{\text{e}}{m}\vec{E}.$$

2. En régime permanent, l'équation précédente s'écrit

$$\vec{v} = -\frac{\text{e}\tau}{m}\vec{E}.$$

Le vecteur densité volumique de courant vaut

$$\vec{j} = -n\text{e}\vec{v} = \frac{n\text{e}^2\tau}{m}\vec{E}.$$

On a bien

$$\boxed{\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\gamma_0 = \frac{n\text{e}^2\tau}{m}}.$$

3. On se place en notation complexe ; le champ électrique est

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \text{e}^{\text{i}\omega t}\vec{u}_z.$$

L'équation différentielle vérifiée par la vitesse s'écrit alors

$$\text{i}\omega\underline{\vec{v}} + \frac{\underline{\vec{v}}}{\tau} = -\frac{\text{e}}{m}\underline{\vec{E}},$$

d'où

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-\text{e}/m}{\text{i}\omega + 1/\tau}\underline{\vec{E}}.$$

De $\underline{\vec{j}} = -n\text{e}\underline{\vec{v}}$ on déduit

$$\underline{\vec{j}} = \frac{\frac{n\text{e}^2}{m}}{\text{i}\omega + \frac{1}{\tau}}\underline{\vec{E}} = \frac{n\text{e}^2\tau}{m}\frac{1}{1+\text{i}\omega}\underline{\vec{E}},$$

de la forme $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$.
On peut définir une conductivité électrique complexe :

$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + \text{i}\frac{\omega}{\omega_{\text{c}}}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_{\text{c}} = \frac{1}{\tau}}.$$

4. Si $\omega \ll \omega_{\text{c}}$, on a

$$\underline{\gamma} \approx \gamma_0.$$

La conductivité est réelle. Avec $\vec{E} = E_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$, on a $\vec{j} = \gamma_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$. La puissance volumique instantanée reçue par le conducteur est

$$p(t) = \vec{j}(t)\cdot\vec{E}(t) = \gamma_0 E_0^2\cos^2(\omega t).$$

La valeur moyenne vaut

$$\boxed{\langle p\rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} > 0}.$$

Le conducteur reçoit bien en moyenne de la puissance, qui sera dissipée par effet Joule.

5. Si $\omega \gg \omega_c$, on a

$$\underline{\gamma} \approx \frac{\gamma_0}{\mathrm{i}\omega/\omega_c} = -\mathrm{i}\frac{\omega_c \gamma_0}{\omega}.$$

La conductivité est imaginaire pure.
Avec $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x$, on a

$$\underline{\vec{j}} = -\mathrm{i}\frac{\omega_c \gamma_0}{\omega} E_0[\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)]\vec{u}_x$$

d'où en prenant la partie réelle

$$\vec{j} = \frac{\omega_c}{\omega}\gamma_0 E_0 \sin(\omega t)\vec{u}_x.$$

Le champ électrique et la densité de courant sont en quadrature.
La puissance volumique instantanée reçue vaut

$$p(t) = \frac{\omega_c}{\omega}\gamma_0 E_0 \cos(\omega t)\sin\omega t).$$

En valeur moyenne, on a

$$\boxed{\langle p \rangle = 0}.$$

On est dans un régime non dissipatif.

6 — Résistance électrique d'une coquille sphérique

1. On considère une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur $\mathrm{d}r$. On effectue un bilan de charge entre t et $t + \mathrm{d}t$ en régime stationnaire :

$$\mathrm{d}Q = 0 = \delta Q_{\text{reçu}} = I(r)\,\mathrm{d}t - I(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r} = 0$: l'intensité I ne dépend pas de r.
Le problème étant à symétrie sphérique, on a $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.
À travers une sphère Σ de rayon $r \in [R_1, R_2]$, on a

$$I = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 j(r).$$

Avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, on en déduit le champ électrique dans le conducteur

$$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}\vec{e}_r}.$$

2. Avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on a

$$-\mathrm{d}V = \frac{I}{4\pi\gamma}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

d'où

$$-\int_{V_1}^{V_2}\mathrm{d}V = \frac{I}{4\pi\gamma}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

soit

$$V_1 - V_2 = U = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{I}{4\pi\gamma}\frac{R_2 - R_1}{2\pi\gamma R_1 R_2}.$$

De $U = RI$ on déduit la résistance

$$\boxed{R = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\gamma R_1 R_2}}.$$

3. Si $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, on a $R_1 R_2 \approx R_1^2$, d'où

$$R \approx \frac{e}{4\pi R_1^2 \gamma} = \frac{e}{\gamma S}.$$

On retrouve une expression de la même forme que pour un système unidimensionnel en coordonnées cartésiennes : résultat classique, où l'on peut considérer que la courbure du conducteur est localement négligeable si l'épaisseur de la coquille est très faible devant son rayon.

8 — Prise de terre d'un paratonnerre

1. La densité de courant $j(r)$ s'exprime en $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. On a $I = 2\pi r^2 j(r)$ à travers la demi-sphère de rayon r, d'où

$$\boxed{j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}}.$$

2. On applique la loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma_m r^2}\vec{e}_r}.$$

3. Avec $\vec{E} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on obtient

$$-\mathrm{d}V = \frac{I}{2\pi\gamma_m}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

soit

$$U = V(r_a) - V(r_b) = \frac{I}{2\pi\gamma_m}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma_m}\frac{r_b - b_a}{r_a r_b}$$

On en déduit la résistance

$$\boxed{R_m = \frac{r_b - r_a}{2\pi\gamma_m r_a r_b}}.$$

4. Dans le sol, on a de même

$$-\int_{V(r)}^{V(\infty)}\mathrm{d}V = \frac{I}{2\pi\gamma_s}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2}$$

soit en prenant $V(\infty) = 0$

$$V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma_s r}.$$

On a donc

$$V(r_b) = R_s I = \frac{I}{2\pi\gamma_s r_b}$$

d'où la résistance

$$\boxed{R_s = \frac{1}{2\pi\gamma_s r_b}}.$$

5. La prise de terre est le sol sont associés en série (ils sont traversés par la même intensité I) ; la résistance totale est donc $R_T = R_m + R_s$, soit

$$\boxed{R_T = \frac{r_b - r_a}{2\pi\gamma_m r_a r_b} + \frac{1}{2\pi\gamma_s r_b}}.$$

6. On calcule

$$R_T = \frac{0{,}34}{2\pi\times 60\times 10^6\times 35\times 10^{-4}} + \frac{1}{2\pi 10^{-3}\times 0{,}35}$$

soit $\boxed{R_T = 455\ \Omega}$.

7. L'installation proposée n'est pas conforme aux règles de sécurité.

Pour remédier à ce problème, on pourrait :

- augmenter le rayon r_b (c'est le deuxième terme qui est largement prépondérant) ;
- choisir un sol de meilleur conductivité électrique ;
- placer plusieurs piquets en parallèle sur la même ligne : une association de N résistances identiques R en parallèle a pour résistance équivalente R/N.

9 — Magnétorésistance

1. La force $-\dfrac{m\vec{v}}{\tau}$ représente les interactions entre les électrons de conduction et les défauts du réseau cristallin. Le temps τ représente la durée moyenne entre deux chocs pour un électron donné.

2. Sous l'effet de la différence de potentiel entre les cylindres, il apparaît une densité de courant $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$. Le champ électrique $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$ est donc de la forme

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r}\vec{e}_r$$

où α est une constante.
De $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ on déduit

$$-\mathrm{d}V = \alpha\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

La tension U est alors donnée par

$$-\int_a^b \mathrm{d}V = U = \alpha\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \alpha\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On a donc $\alpha = \dfrac{U}{\ln(b/a)}$ et le champ électrique s'écrit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{\vec{e}_r}{r}}.$$

3. On écrit le PFD à un porteur de charge en régime permanent :

$$\vec{0} = \mathrm{e}\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

d'où $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{e}\tau}{m}\vec{E}$. On a donc

$$\vec{j}_0 = n\mathrm{e}\vec{v} = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

d'où la conductivité

$$\boxed{\sigma = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}}.$$

4. L'intensité I traversant le conducteur est

$$I = 2\pi r h j(r) = 2\pi\sigma h r E(r) = \frac{2\pi\sigma h U}{\ln(b/a)} = \frac{U}{R_0}$$

d'où la résistance

$$\boxed{R_0 = \frac{1}{2\pi\sigma h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

5. Le conducteur est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$.

5.a) Chaque porteur de charge est soumis à la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = \mathrm{e}\vec{E} + \mathrm{e}\vec{v}\wedge\vec{B}.$$

Le PFD appliqué à ce porteur en régime permanent s'écrit donc

$$\vec{0} = \mathrm{e}\vec{E} + \mathrm{e}\vec{v}\wedge\vec{B} - \frac{m}{\tau}\vec{v},$$

soit comme $\vec{j} = \mathrm{e}\vec{v}$,

$$\vec{0} = \mathrm{e}\vec{E} + \frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{n} - \frac{m}{n\mathrm{e}\tau}\vec{j}.$$

On a donc

$$\vec{j} = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\vec{E} + \frac{n\mathrm{e}\tau}{m}\frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{n} = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\vec{E} + \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}\frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{n\mathrm{e}},$$

soit

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E} + \sigma R_h(\vec{j}\wedge\vec{B})}$$

avec

$$\sigma = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m} \quad \text{avec} \quad R_h = \frac{1}{n\mathrm{e}}.$$

5.b) Notons

$$\vec{j} = j_r\vec{e}_r + j_\theta\vec{e}_\theta + j_z\vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques. Comme $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$, la relation précédente s'écrit

$$\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma R_h\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

soit

$$j_r = \sigma E + \sigma R_\mathrm{h} j_\theta B_0$$
$$j_\theta = -\sigma R_\mathrm{h} j_r B_0$$
$$j_z = 0$$

Le vecteur $\vec{j}$ est donc $\vec{j} = j_r \vec{e}_r + j_\theta \vec{e}_\theta$, normal à l'axe Oz.
Le champ $\vec{E}$ étant selon $\vec{e}_r$, il forme un angle α avec $\vec{E}$ tel que

$$\tan\alpha = \frac{j_\theta}{j_r} = -\sigma R_\mathrm{h} B_0 .$$

Cet angle est constant.
Les lignes de courant font donc avec $\vec{E}$ un angle α constant.

5.c) Des équations précédentes on tire

$$j_r = \sigma E + \sigma R_\mathrm{h}(-\sigma R_\mathrm{h}) B_0^2 j_r$$

soit

$$\left[1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2\right] j_r = \sigma E = j_0 .$$

On a donc

$$\boxed{j_r = \frac{j_0}{1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}} .$$

5.d) On reprend le calcul de la première partie, en remplaçant σ_0 par $\dfrac{\sigma_0}{1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}$. On en déduit immédiatement

$$R = \frac{1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}{2\pi\sigma h} \ln\left(\frac{b}{a}\right) .$$

soit

$$\boxed{R = R_0 \left[1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2\right]} .$$

La variation relative de la résistance due à l'application du champ magnétique est donc

$$\boxed{\frac{R - R_0}{R_0} = (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2} .$$

Pour le cuivre, on a $\dfrac{R - R_0}{R_0} = 1{,}8 \times 10^{-3}$.
Pour l'arséniure d'indium, on a $\dfrac{R - R_0}{R_0} = 0{,}5$.
La variation de la résistance est facilement mesurable avec les moins bons conducteurs (l'arséniure d'indium est un semi-conducteur).

➤ La magnétorésistance est utilisée pour mesurer des champs magnétiques.

10 — Conductivité d'un électrolyte

La mobilité μ d'un porteur de charge est définie par la relation $\vec{v} = \mu\vec{E}$, où $\vec{v}$ est la vitesse moyenne du porteur et $\vec{E}$ est le champ électrique dans le matériau. Les porteurs de charge ont une masse m, une charge q, et leur densité volumique est n.

1. On a

$$\vec{j} = nq\vec{v} = nq\mu\vec{E} .$$

En identifiant avec la loi d'Ohm locale j $= \sigma\vec{E}$, on obtient

$$\boxed{\sigma = nq\mu} .$$

2. Si $q > 0$, la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$ est dans le même sens que $\vec{E}$; la vitesse acquise par les charges sous l'effet de cette force est donc dans le même sens que $\vec{E}$ et on a $\mu > 0$. On a donc $\sigma > 0$.
Si $q < 0$, la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$ est dans le sens opposé à celui de $\vec{E}$; la vitesse acquise par les charges sous l'effet de cette force est donc opposée à $\vec{E}$ et on a $\mu < 0$. On a donc $q\mu > 0$ et $\sigma > 0$.
La conductivité est toujours positive.

3. La densité volumique de courant s'écrit

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i .$$

Avec $\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$, on a

$$\vec{j} = \left(\sum_i n_i q_i \mu_i\right)\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

et la conductivité s'écrit

$$\boxed{\sigma = \sum_i n_i q_i \mu_i} .$$

4. Dans l'eau pure, les porteurs de charge sont les ions H_3O^+ et HO^-, avec

$$[H_3O^+] = [HO^-] = 10^{-7}\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}} = 10^{-4}\ \mathrm{mol\cdot m^{-3}}$$

à 25° (on rappelle le produit ionique de l'eau $[H_3O^+][HO^-] = K_\mathrm{e} = 10^{-14}$).
Les concentrations volumiques valent

$$n(H_3O^+) = n(HO^-) = n = \mathcal{N}_\mathrm{A} c = 6{,}02 \times 10^{19}\ \mathrm{m^{-3}} .$$

On en déduit la conductivité électrique de l'eau pure

$$\sigma = +en\left(\mu(H_3O^+) - \mu(HO^-)\right)$$

soit $\boxed{\sigma = 5{,}65 \times 10^{-6}\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}}$.

5. L'acide chlorhydrique est un acide fort qui se dissocie totalement dans l'eau selon

$$HCl + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + Cl^- .$$

On a donc

$$[H_3O^+] = [Cl^-] = 10^{-1}\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}} = 10^{2}\ \mathrm{mol\cdot m^{-3}} .$$

Du produit ionique de l'eau on déduit

$$[HO^-] = 10^{-13}\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}} = 10^{-10}\ \mathrm{mol\cdot m^{-3}} .$$

Les densités particulaires valent

$$n(\mathrm{H_3O^+}) = n(\mathrm{Cl^-}) = n = 6{,}02 \times 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$$

et

$$n(\mathrm{HO^-}) = 6{,}02 \times 10^{13}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

La conductivité est donnée par

$$\sigma = \mathrm{e}\left[n\left(\mu(\mathrm{H_3O^+}) - \mu(\mathrm{Cl^-})\right) - n(\mathrm{HO^-})\mu(\mathrm{HO^-})\right].$$

On peut négliger la quantité d'ions $\mathrm{HO^-}$, soit

$$\sigma = \mathrm{e}n\left(\mu(\mathrm{H_3O^+}) - \mu(\mathrm{Cl^-})\right)$$

d'où $\boxed{\sigma = 4{,}4\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}}$.
Ce sont les ions $\mathrm{H_3O^+}$ qui contribuent le plus à la conductivité de la solution.

➤ Piège : on donne la mobilité des ions $\mathrm{Na^+}$, mais il n'y en a pas ici !