Mécanique des fluides — Autour de la poussée d'Archimède

Théorème d'Archimède

Étant donné un corps immobile entièrement immergé dans un fluide au repos, placé dans le champ de pesanteur. La **résultante des forces de pression** exercées sur ce corps par le fluide est une force verticale, dirigée vers le haut, égale au poids du fluide remplacé.
Cette force est appelée *poussée d'Archimède*.
Son point d'application est le centre de masse du fluide remplacé.

En analyse vectorielle, le théorème du gradient indique que

$$\iiint_{P\in\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, G(P)\,\mathrm{d}\tau_P = \oint\!\!\oint_{M\in\Sigma} G(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

La résultante des forces de pression sur la surface surface Σ délimitant le volume $\mathcal{V}$ vaut donc

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = -\oint\!\!\oint_{M\in\Sigma} p(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = -\iiint_{M\in\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p(M)\cdot \mathrm{d}\tau_M\,.$$

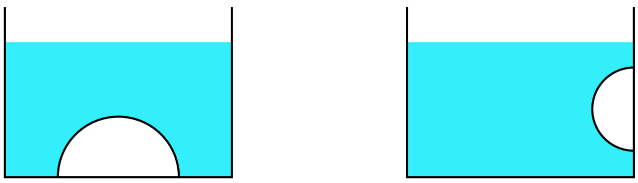
D'après la relation fondamentale de la statique des fluides $\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p + \mu\vec{g}$, on en déduit

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = -\left(\iiint_{M\in\mathcal{V}} \mu(M)\,\mathrm{d}\tau_M\right)\vec{g}$$

qui est bien opposé au poids du fluide de remplacement.
Dans le cas d'un liquide incompressible :

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = -\mu\mathcal{V}\vec{g}\,.$$

- Le corps doit être entièrement entouré de fluide pour que le théorème d'Archimède s'applique. Dans les deux cas suivant, **le théorème d'Archimède ne s'applique pas** :



- La poussée d'Archimède est due au caractère non uniforme de la pression dans le fluide : la pression augmente avec la profondeur ; les forces pressantes s'exerçant à la base du solide, qui tendent à le pousser vers le haut, sont plus intenses que les forces pressantes s'exerçant sur le sommet du solide, qui tendent à le pousser vers le bas.

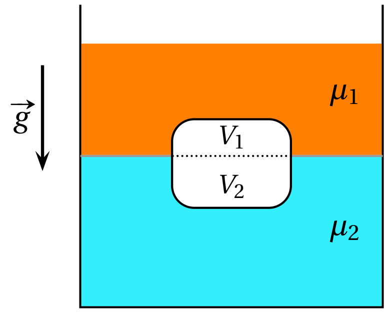
On peut en déduire une propriété importante :

La résultante des forces de pression exercées sur un solide entièrement immergé dans un fluide où la pression est uniforme est nulle.

- La pression au sein d'un gaz peut être considérée comme uniforme sur des hauteurs de quelques mètres. En particulier **on peut usuellement considérer la pression atmosphérique comme uniforme sur de telles distances.**

Cas particuliers

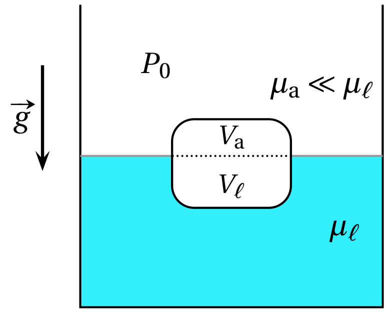
Fluides stratifiés



Dans le cas d'un corps immergé entre deux fluides superposés, il faut prendre en compte les poids des deux liquides remplacés :

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = -\left(\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2\right)\vec{g}\,.$$

Corps flottant



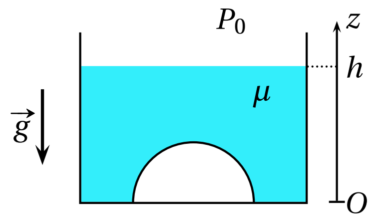
Un corps flottant ne semble pas complètement immergé… Il faut le considérer comme un corps immergé entre deux fluides superposés : le liquide et l'atmosphère qui le surplombe. La poussée d'Archimède serait donnée par

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = -\left(\mu_\ell V_\ell + \mu_{\mathrm{a}} V_{\mathrm{a}}\right)\vec{g}\,.$$

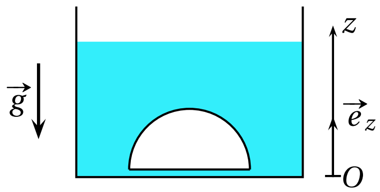
Comme $\mu_\ell \ll \mu_{\mathrm{a}}$, on peut négliger les forces de pression exercée par l'atmosphère devant celles exercées par le liquide, d'où le résultat usuel

$$\boxed{\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = -\mu_\ell V_\ell \vec{g}}\,.$$

Calculer la résultante des forces de pression



On considère une demi-sphère de rayon R posée sur le fond d'un récipient rempli d'une hauteur h de liquide. On demande la résultante des forces de pression exercée par le liquide sur la demi-sphère.
Un calcul direct serait fastidieux. Une astuce classique consiste à considérer que la demi-sphère est entièrement immergée, en imaginant une fine couche de liquide entre sa base et le fond du récipient[1] :



La résultante des forces de pression s'exerçant sur le solide est

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = \vec{F}_{\mathrm{b}} + \vec{F}$$

où $\vec{F}_{\mathrm{b}}$ est la résultante des forces de pression s'exerçant sur la base du solide, et $\vec{F}$ la résultante de ces forces sur la partie sphérique (c'est ce terme que l'on cherche).
La pression au fond du récipient est $P(0) = P_0 + \mu g h$. On en déduit

$$\vec{F}_{\mathrm{b}} = P(0)\pi R^2 \vec{e}_z = [P_0 + \mu g h]\pi R^2 \vec{e}_z\,.$$

Le solide étant maintenant complètement immergé, le théorème d'Archimède s'applique, et

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \mu g\,\vec{e}_z\,.$$

On a donc

$$\vec{F} = \vec{\Pi}_{\mathrm{A}} - \vec{F}_{\mathrm{b}} = \left(\frac{2}{3}\pi R^3 \mu g - [P_0 + \mu g h]\pi R^2\right)\vec{e}_z = -P_0 \pi R^2 \vec{e}_z + \pi R^2 \mu g\left(\frac{2}{3}R - h\right)\vec{e}_z\,.$$

1. Cela revient à modifier très faiblement la position du solide; la pression dans le fluide est inchangée sur ce faible déplacement vertical.